现代应用数学手册

《现代应用数学手册》编委会

分析与方程卷

清華大學出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

数学科学的成就已成为当今高科技时代进步发展的重要基础，应用数学的发展是科技工业兴旺发达的强有力支柱。为了迎接21世纪的挑战，本手册向您介绍现代应用数学的各个分支，为您在解决科研、教学以及生产实践的各种问题中，提供不可缺少的工具。全书共计六卷：

《运筹学与最优化理论卷》
《现代应用分析卷》
《概率统计与随机过程卷》
《离散数学卷》
《分析与方程卷》
《计算与数值分析卷》

各卷内容自成体系，互相独立，方便读者按需选用。

ISBN 7-302-06261-7
9 787302 062615 >
定价：59.90元

《现代应用数学手册》编委会

现代应用数学手册

分析与方程卷

清华大学出版社

内容简介

本卷包括一元微积分、多元微积分、复变函数、常微分方程、矩阵分析与线性系统、系统辨识、偏微分方程、积分方程共8部分内容.书中从理论与应用方面深入浅出地阐述了各分支中的基本概念、基本理论与基本方法.内容注重背景,强调应用,便于读者加深理解、掌握与应用.本书可供理、工、农、医、经管等领域的广大科技人员,大、中专院校教师、学生及研究生使用.

图书在版编目(CIP)数据

现代应用数学手册.分析与方程卷/《现代应用数学手册》编委会编著.—北京:清华大学出版社,2006.6
ISBN 7-302-06261-7

Ⅰ.现… Ⅱ.现… Ⅲ.应用数学—手册 Ⅳ.O29-62

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第004204号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969
责任编辑:刘 颖
印 刷 者:北京鑫丰华彩印有限公司
装 订 者:三河市春园印刷有限公司
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开 本:140×203 印张:33.875 字数:848千字
版 次:2006年6月第1版 2006年6月第1次印刷
书 号:ISBN 7-302-06261-7/O·276
印 数:1~3000
定 价:59.90元

《现代应用数学手册》
编 辑 委 员 会

分析与方程卷

责任编委　刘坤林

章　次	编　者	校　者
1～4	柏　瑞	胡蕗犀
5	胡蕗犀	马振华
6	黄昭度	胡蕗犀
7～8	胡蕗犀	马振华
9	胡蕗犀　黄昭度	马振华
10～12	胡蕗犀	马振华
13	黄昭度	胡蕗犀
14	黄昭度	马振华
15～20	范景媛	马振华
21～26	陈水莲	李建国
27～32	刘坤林	姜启源
33～40	刘坤林	姜启源
41～46	高策理	李建国
47～53	靳志和　高策理	李建国

序

随着计算机科学技术的飞速发展，人类正进入信息时代.

信息时代是应用数学大发展的时代，人类长期积累起来的知识体系，正面临着第3次数学化. 数学思想，数学方法与数学模型随着计算机的广泛应用，日益渗透到各种行业中.

当代，除了古典的数学理论（初等数学，微积分学，微分方程，复变函数等）早已得到广泛的应用外，一些比较抽象的现代数学理论（集合论、数理逻辑、范畴论、抽象代数、泛代数、代数几何、拓扑学、泛函分析等）以及一些新兴的数学理论（随机过程、时间序列、运筹学、最优化理论、有限元方法、模糊数学、混沌与分形等）也逐渐成为社会生产、科学实验、工程技术及经济管理中不可缺少的工具，应用数学的适用范围正在迅速扩大.

为了满足日益增长的社会需求，清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会，组织编写了这套多卷集的手册.

本书读者是理、工、医、农、经管等领域的广大工程技术人员、科研人员、大、中专院校的教师、学生、研究生及其他使用数学工具的实际工作者. 其中有些内容对于中学生也是适用的.

编者力求使本书成为一套高质量的工具书，它有下列特点：

(1) **内容"新颖"** 本书力求做到内容现代化，除用现代观点介绍古典内容外，对已出现的新理论、新方法尽量优先选入.

(2) **突出"应用"** 本书在选材上突出数学理论的应用，以通

俗易懂的方式着重介绍在现代科学技术等实际领域中应用广泛的数学理论和方法.

(3) **紧密"结合"计算机应用** 为了更有效地应用数学方法解决各种实际问题,广大科技人员迫切要求数学方法与计算机应用相结合,提高工作效率.为此,本书在结合计算机应用方面给予特别的重视.

(4) **版面设计"合理",便于迅速查阅** 为方便读者使用,本书采用了一套较为完善的索引体系.除正文中章、节的编号沿用国际通行的十进制编号外,对于重要的定义、定理、例题、公式、图、表等均有编号.读者可以从(1)目录,(2)中文—外文名词索引,(3)外文—中文名词索引等三种途径,迅速找到所需资料.此外,本书对载入的外国科学家人名,尽量采用"名从主人"的原则.

(5) **数学符号力求"统一"与国际化** 鉴于目前国内各种文献、书籍中使用的数学符号不够统一与国际化,增加了读者阅读时的困难.本书除按国家标准 GB 3102—93 外,兼用国际数学界权威著作《数学大百科辞典》(Encyclopedic Dictionary of Mathematics, EDM)中的符号为标准.对于不在上述文献中的其他新符号,则选用较为流行者.

本手册各卷内容独立完整,便于个体和团体读者按需选购.当前应用数学急剧发展,编委会在条件成熟的时候,还将增出新卷.

本书的编撰是与清华大学应用数学系领导,特别是萧树铁教授的热心支持,编辑委员会各位编委的通力协作,校内外的许多教师、科研工作者的大力支持分不开的,编者深致谢意.

在编辑出版过程中,还得到清华大学出版社的热情支持.

本书从编撰到出版,历尽艰辛,饮水思源,编者还要感谢本书的发起人,清华大学应用数学系陆璇教授,北京出版社李利军编辑

及已故的北京出版社社长王政人先生.

最后,编者还要对夫人王华敏表示谢忱,没有她的深刻理解、热情支持与持久的帮助,本书也难以问世.

主编　马振华

1997 年于清华园

符 号 表

$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\inf E / \inf\limits_{x\in E}\{x\}$	下确界
$\sup E / \sup\limits_{x\in E}\{x\}$	上确界
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, a_n \to A$	数列$\{a_n\}$收敛于A，或以A为极限
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n\ (\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n)$	上（下）极限
$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}, f'(x_0)$	函数 f 在 x_0 处的导数
$f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2f}{dx^2}$	二阶导函数
$f^{(n)}(x), \dfrac{d^ny}{dx^n}, \dfrac{d^nf}{dx^n}$	n 阶导函数
$\int f(x)dx$	$f(x)$ 在 I 上的不定积分
$6!! = 2\times 4\times 6$	二阶阶乘
$7!! = 1\times 3\times 5\times 7$	二阶阶乘
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$	无穷级数
$\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$	二重级数
$\sum\limits_{i,j,\cdots,l=1}^{\infty} a_{i,j,\cdots,l}$	多重(r-重)级数

$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$ 无穷乘积

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ 函数项级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$ 幂级数

$\| \cdot \|$ 范数

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 无穷限广义积分

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ n 维(重)实空间

$\mathscr{E}^n(\mathscr{E}^m)$ $n(m)$ 维欧氏空间

$\forall$ 全称量词,所有的……

$\exists$ 存在量词,存在……,至少有……

$B_0(\boldsymbol{x}_0;\delta), B(\boldsymbol{x}_0)$ $\boldsymbol{x}_0$ 的 δ 邻域,$\boldsymbol{x}_0$ 的邻域

$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|$ 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的距离

$\varnothing$ 空集

$\rho(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x,y)$ 集合 A,B 间的距离

$d(S) = \sup_{x \in S, y \in S} \rho(x,y)$ 集合 S 的直径

$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(\boldsymbol{x}) = A$, $\lim_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = A$, $\lim_{\substack{x_1 \to x_1^* \\ \cdots \\ x_n \to x_n^*}} f(x_1, \cdots, x_n) = A$ 多元函数的极限

$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big\|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}, f'_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)$, $f'_{x_i}(x_1^0,\cdots,x_n^0)$, $\frac{\partial f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\partial x_i}, f'_{x_i}\Big\|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$	一阶偏导数
$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{l}}$	方向导数
grad, ∇	Nabla 算子
$\frac{\partial^n f(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k_n}\cdots\partial x_{k_2}\partial x_{k_1}}$	n 阶偏导数
$\mathrm{d}^n f$	n 阶全微分
$D_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), D_{\boldsymbol{y}}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 对向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的偏导数
$\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y$	含参量积分
$S^+(f,\Delta), S_-(f,\Delta)$	f 关于划分 Δ 的大和及小和
∇^2	Laplace 算子
$\boldsymbol{\Phi}_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} = \boldsymbol{\Phi}(r^{i_1},\cdots,r^{i_r}, g_{j_1},\cdots,g_{j_s})$	张量
$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$	$\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的张量积
$\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}$	$\boldsymbol{\Phi}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}$ 的外积
$\delta_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_r}$	r 阶广义 Kronecker 符号
$\mathrm{Res}(f,a)$	函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的函数
$\mathrm{D}^k = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$	微分算子
$\mathscr{L}$	Laplace 变换算子
$\\|\boldsymbol{x}\\|_1, \\|\boldsymbol{x}\\|_p, \\|\boldsymbol{x}\\|_\infty$	向量的范数
$\mu(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的测度
$\boldsymbol{A}'(x) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}$	矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$ 的导数

$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{A}}$	矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对 $\boldsymbol{A}$ 的导数
$\overset{\text{def}}{=\!=}$	定义为 ……
$\mathscr{Z}$	Z 变换
$\oplus$	模 2 加法
$\sum \oplus$	模 2 加法求和
$F[f], \hat{f}$	$f(x)$ 的 Fourier 变换
$F^{-1}[g], \check{g}$	$g(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换
$f_1 * f_2$	$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积
$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$	$f(t)$ 的 Laplace 变换
$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{st} F(s) ds$	Laplace 逆变换

目　　录

一 元 分 析

多 元 分 析

复变函数论

常微分方程

矩阵分析与线性系统

系 统 辨 识

偏微分方程

积 分 方 程

一 元 分 析

1 函数、数列、极限、函数连续性

1.1 实数

定义 1.1.1 整数(正的,负的以及零)和分数统称之为**有理数**(rational number).

每个有理数都可以用分数形式 p/q(p,q 为整数,$q\neq 0$ 且 $(p,q)=1$)表示,也可以用有限十进小数或无限十进循环小数表示.

1.1.1 实数的定义

(1) Dedekind(戴德金)方法

设$\mathbb{Q}$是有理数全体,将$\mathbb{Q}$分为 Q_1 和 Q_2 两部分,使得

① Q_1 和 Q_2 都不是空集(即至少包含一个有理数).

② Q_1 中任何数小于 Q_2 中的任一数.则称这样的分法为**划分**(partition),记作$(Q_1|Q_2)$,其中 Q_1 称为下组,Q_2 为上组.当下组 Q_1 中有最大数,或上组 Q_2 中有最小数时,这样的划分称为有端划分.其最大(小)数称为划分的端.不可能出现既在 Q_1 中有最大数,同时又在 Q_2 中有最小数的情形,因为这将与有理数的稠密性相矛盾.如果下组 Q_1 中没有最大数,上组 Q_2 中也没有最小数,这样的划分称为无端划分.

所有划分全体叫做**实数**(real number)**域**或称实数空间，其中有端划分称之为有理数(即端)，无端划分则称之为**无理数**(irrational number).

(2) Cantor(康托尔)方法

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是有理数所组成的数列(定义 1.2.11)，若对于任给的正有理数 ε，总存在正整数 N，使当 $p, q > N$ 时，有 $|a_p - a_q| < \varepsilon$，则称 $\{a_n\}$ 是有理数所构成的**基本数列**. 若两个基本数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足下列条件：

对任意的有理数 $\varepsilon > 0$，都存在正整数 N，使当 $n > N$ 时总有 $|a_n - b_n| < \varepsilon$，则称 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 等价.

考虑基本数列的全体，把彼此等价的基本数列归为一类，则每一类称为一个实数. 凡和任一有理数 r 组成的常数列 $\{r, r, \cdots, r, \cdots\}$ 等价的类，称为有理数，不能和任一有理数常数列等价的类，称为无理数.

例 1.1.2 用 Dedekind 方法定义无理数 $\sqrt{2}$.

取 $a_1^2 < 2$ 的一切正有理数 a_1，0 及一切负有理数归入 Q_1 组. 同时将 $a_2^2 > 2$ 的一切正有理数 a_2 归入 Q_2 组，则划分 $Q_1 | Q_2$ 定义了实数(无理数) $\sqrt{2}$.

例 1.1.3 用 Cantor 方法定义无理数 $\sqrt{2}$.

有理数基本数列 $\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots\}$ 是由 2 的开方运算逐次将所得的一系列有限小数排列而成. 它不能与任何有理数常数列等价. 这个有理数基本数列定义了实数(无理数) $\sqrt{2}$.

1.1.2 实数的性质及四则运算

实数的主要性质：

(1) 有序性　每一对实数 α 与 β 之间必有且仅有下列关系之一

$$\alpha < \beta; \quad \alpha = \beta; \quad \alpha > \beta.$$

(2) 传递性　由 $\alpha>\beta$ 及 $\beta>\gamma$,可推知 $\alpha>\gamma$.

(3) 稠密性　任意两个不相等的实数之间有有理数,也有无理数.

(4) 完备性(连续性)　对实数域 $\mathbb{R}$ 或实数空间自身所做的任一 Dedekind 划分,必为有端划分,只产生实数.或者说,$\mathbb{R}$ 中实数 Cantor 基本数列的等价类和有理数 Cantor 基本数列的等价类是一一对应的,所得集合仍为$\mathbb{R}$.

实数的四则运算:

(1) 交换律　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$; $\alpha\beta=\beta\alpha$.

(2) 结合律　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$; $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$.

(3) 分配律　$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

(4) 保序性　由 $\alpha>\beta$ 推知 $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$;由 $\alpha>\beta$ 及 $\gamma>0$ 推知 $\alpha\gamma>\beta\gamma$.

(5) 零元素与负元素存在性　在 $\mathbb{R}$ 中存在惟一一个元素"0",使对任一实数 α,有 $\alpha+0=\alpha$;又对每一个实数 α,有且仅有一个实数$(-\alpha)$使 $\alpha+(-\alpha)=0$.

(6) 单位元素与逆元素存在性　在实数域 $\mathbb{R}$ 中存在惟一一个元素"1",使对每个实数 α 有 $\alpha\cdot 1=\alpha$;又对每一个非零实数 α,有且仅有一个实数$\frac{1}{\alpha}$,使 $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$.

(7) Archimedes(阿基米德)性　对任意实数 α,β,若 $\beta>\alpha>0$,则存在正整数 N,使 $N\alpha>\beta$.

当一个数集满足实数的有序性及实数的四则运算特征时,称为 Archimedes 有序域(Archimedes ordered field),因此全体实数域构成 Archimedes 有序域.

实数的**绝对值**(absolute value)及其性质

实数 α 的绝对值定义为

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \alpha\geqslant 0,\\ -\alpha, & \alpha<0.\end{cases}$$

它有下列主要性质：

(1) $|\alpha|=|-\alpha|\geqslant 0$ 且仅当 $\alpha=0$ 时才有 $|\alpha|=0$.

(2) $-|\alpha|\leqslant\alpha\leqslant|\alpha|$.

(3) 若 $|\alpha|\leqslant\beta$,则 $-\beta\leqslant\alpha\leqslant\beta$.

若 $|\alpha|>\beta(\beta\geqslant 0)$,则 $\alpha>\beta$ 或 $\alpha<-\beta$.

(4) $|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha\pm\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$(三角形不等式).

(5) $|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|$.

(6) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ $(\beta\neq 0)$.

不等式(inequality)

(1) 算术平均值与几何平均值不等式：

① 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数,则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

即几何平均值不超过算术平均值.

② $$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}},$$

等号仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数时有

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^r\leqslant\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n},\qquad r\geqslant 1.$$

(2) 带权平均值不等式：

对 n 个正数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$,带权 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$的平均值 $\sum\limits_{i=1}^{n}r_ia_i\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}r_i$ 满足

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{r_i} \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} r_i} \right)^{\sum_{i=1}^{n} r_i},$$

等号仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立.

(3) $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1+\frac{1}{12n-1}\right)$, $\mathrm{e}=2.718\cdots$.

(4) Bernoulli(伯努利)不等式

$(1+h)^n \geqslant 1+nh$,其中 $h>-1$,n 为自然数. 特别当 $(1+h)=\sqrt[n]{a}$ $(a>1)$ 时有

$$\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}.$$

(5) Hölder(赫尔德)不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 p,q 为正数,且满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 等号仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 时才成立.

这个不等式还可推广到积分的情形,即:设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续非负函数,且假定 p,q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b \{f(x)\}^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \{g(x)\}^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中等号仅当存在数 r 使

$$\{g(x)\}^q = r\{f(x)\}^p, \qquad a\leqslant x\leqslant b$$

时才成立.

(6) Cauchy-Schwarz(柯西-施瓦茨)不等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right),$$

其中等号仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时才能成立.

这个不等式可推广到无穷情形，即设 $a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots$ 是两串数列(定义 1.2.11)，且级数(定义 4.1.1) $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2$ 分别收敛于 A,B，则相应有级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$$

收敛(设收敛于 C)，且

$$C^2\leqslant AB,$$

等号仅当有某个数 r 使 $b_k=ra_k(k=1,2,\cdots)$时才成立.

(7) Minkowski(闵可夫斯基)不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $p\geqslant1$，且等号仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时才成立.

(8) Jensen(詹森)不等式

① 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且 $0<p<q$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

② 设 $f(x)$是区间$[a,b]$上的凸函数(定义 2.3.10)，且假定 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为$[a,b]$中的任意点集，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是满足

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1$$

的非负数. 则

$$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)\leqslant\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i).$$

例如，令 $f(x)=-\ln x(x>0)$，它是凸的$\Big($因为 $f''(x)=$

$\left.\frac{1}{x^2}>0\right)$. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是一正数集，若在 Jensen 不等式中令 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$，则可得

$$-\ln\left\{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right\}\leqslant-\frac{1}{n}\ln(a_1 a_2\cdots a_n).$$

很明显，这个不等式与①是一致的.

(9) Chebyshev(切比雪夫)不等式

设 $a_i>0, b_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$；或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，且 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，而 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

若推广到积分形式，则有不等式

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $p(x)$ 是正的可积函数，而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是单调递增函数.

1.1.3 关于实数的一些基本定理

定理 1.1.4 单调有界原理 单调有界数列必有极限.

定义 1.1.5 若闭区间序列 $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ 具有如下性质：

(1) $[\alpha_n, \beta_n]\supset[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$， $n=1,2,\cdots$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n-\alpha_n)=0$，

则称这个闭区间序列为一**区间套**(nest of intervals).

定理 1.1.6 区间套定理 设 $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ 是一个区间套，则存在惟一的一个点 γ，使 $\gamma\in[\alpha_n, \beta_n]$ $(n=1,2,\cdots)$.

例 1.1.7 设 a, b 为两个正数，且 $a>b$. 分别取它们的算术平

均值及几何平均值

$$a_1=\frac{a+b}{2},\quad b_1=\sqrt{ab}.$$

根据算术平均值与几何平均值之间的不等式应有 $a>a_1>b_1>b$. 再分别取 a_1,b_1 的两个平均值

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_1b_1}.$$

则同样有 $a_1>a_2>b_2>b_1$. 依此类推，对于

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

有 $a>a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n>b$. 这样就分别得到有界的单调递减数列$\{a_n\}$及单调递增数列$\{b_n\}$. 根据单调有界原理知，它们分别有极限(设为 α,β). 由关系式 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$或 $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$两边取极限不难证明它们相等，$\alpha=\beta$. 可见算术平均值数列及几何平均值数列有公共的极限$\mu=\mu(a,b)$. 同时可以看到，这个数 μ 就是区间套$\{[b_n,a_n]\}$所确定的点. 而且，借助椭圆积分可以算得 $\mu(a,b)=\frac{\pi}{2G}$，其中

$$G=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varphi.$$

定义 1.1.8 对于给定的数集 $E=\{x\}$，若有这样的数 M 存在，使一切 $x\leqslant M$，则 M 称为数集 E 的**上界**(upper bound). 类似地，若有数 m 存在，使一切 $x\geqslant m$，则 m 称为数集 E 的**下界**(lower bound).

定义 1.1.9 对于给定的数集 $E=\{x\}$，若数 β 满足：

(1) β 是 E 的上界；

(2) 对任给的正数 ε，总存在 $x_0\in E$，使 $x_0>\beta-\varepsilon$.

则称数 β 是数集 E 的**上确界**(supremum)，记作 $\beta=\sup E$ 或

$\beta=\sup\limits_{x\in E}\{x\}$.

类似地,若数 α 满足:

(1) α 是 E 的下界;

(2) 对任给的正数 $\varepsilon>0$,总存在 $\bar{x}\in E$,使 $\bar{x}<\alpha+\varepsilon$.

则称数 α 是数集 E 的**下确界**(infimum),记作 $\alpha=\inf E$ 或 $\alpha=\inf\limits_{x\in E}\{x\}$.

例 1.1.10 (1) 设 $N=\{n\}$ 是自然数集,则 $\inf N=1$,$\sup N$ 不存在.

(2) 设 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是自然数的倒数集,则 $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\}=0$,$\sup\left\{\frac{1}{n}\right\}=1$.

(3) $\sup\limits_{x\in(0,\pi]}\{\cos x\}=1$,$\inf\limits_{x\in(0,\pi]}\{\cos x\}=-1$.

从上述例子可以看到,一个数集的上(下)确界可以属于数集,也可以不属于数集.且如果上(下)确界存在,必定惟一.

定理 1.1.11 有限覆盖(finite covering)定理 若开区间所成的区间集 E 覆盖了一个闭区间 $[a,b]$,则总可从 E 中选出有限个开区间覆盖 $[a,b]$.

1.2 函数与数列

1.2.1 变量变化区间

连续变量的取值范围及变动域,常常用区间来表示,这些区间大致可分为:

(1) **闭区间**(closed interval)$[a,b]$:$a\leqslant x\leqslant b$.

(2) **开区间**(open interval)(a,b):$a<x<b$.

(3) 半开区间(semi-open interval):$(a,b]$,$[a,b)$ 或 $a<x\leqslant b$,$a\leqslant x<b$.

(4) **无穷区间**(infinite interval)$(-\infty,+\infty)$:$-\infty<x<+\infty$.

(5) 半无穷区间(semi-infinite interval)$(-\infty,b)$或$(a,+\infty)$：$-\infty<x<b$ 或 $a<x<+\infty$.

(6) x_0 的 δ **邻域**(neighborhood)$(x_0-\delta,x_0+\delta)$：$x_0-\delta<x<x_0+\delta(\delta>0)$. 对于排除 x_0 的邻域，叫做**空心邻域**(deleted neighborhood).

1.2.2 函数概念及分类

定义 1.2.1 设有实数集 D，若按照某一确定的对应规则 f，对于 D 中的每一个数 x 有确定的值 $f(x)$ 与其对应，则称 f 为确定在数集 D 上的**函数**(function). 并称 x 为函数 f 的**自变量**(independent variable)，D 为函数的**定义域**(domain)，$f(x)$ 为函数 f 在 x 的值. 当 x 取遍 D 中各数时，由 $f(x)$ 所构成的数集 V 称为函数 f 的**值域**(range of a function).

由上述定义可以看出，f 和 D 是确定函数的两个重要因素. 由于在古典分析中，对应规则 f 常常是通过函数值 $f(x)$ 的代数运算的显式，如 $f(x)=\dfrac{x^2-7}{1+x}$，$f(x)=\sqrt{2-\cos x}$ 等来表示，因此对于定义于 D 上的函数 $f:D\to V$. 习惯上常写成 $f(x)$，$x\in D$ 或 $y=f(x)$，$x\in D$.

定义 1.2.2 在函数定义中，若对于 D 中的每一个值 x 仅有一个确定值 $f(x)$ 与之对应，则称 f 是 D 上的**单值函数**(single valued function). 若有多个的值 $f(x)$ 与之对应，则称 f 是 D 上的**多值函数**(multiple valued function).

定义 1.2.3 设 f 是定义在 D 上的函数，其值域为 V，若对于 V 内的每一个值可以按相应的反对应规则，使 D 内有一个或几个值与其对应，这种反对应规则称为函数 f 的**反函数**(inverse function)，并记作 f^{-1}. 若函数 $f:D\to V$ 是一对一的对应，则有 $f^{-1}[f(x)]=x$.

定义 1.2.4 设 g 为域 D 上的函数，其值域为 V. 若 f 又为域 V 上的函数，则以函数 g 为媒介，域 D 上的值与函数 f 的值产生某种对应规则，从而在域 D 上构成新的函数关系，称之为**复合函数**(composite function)，记作

$$f(g(x)),\quad x\in D \quad \text{或} \quad (f\circ g)(x),\quad x\in D.$$

定义 1.2.5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 为对称于原点的数集，即当 $x\in D$ 时，亦有 $-x\in D$，则：

(1) 若对任何 $x\in D$ 有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为**奇函数**(odd function).

(2) 若对任何 $x\in D$ 有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为**偶函数**(even function).

定义 1.2.6 若有实数 $T>0$，使对于 D 内所有 x 有 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**(periodic function). 其中具有这一性质的最小 T 值，称为周期函数 $f(x)$ 的基本周期.

定义 1.2.7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在实数 $M>0$，使对一切 $x\in D$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**有界函数**(bounded function). 其中 M 称为界，否则称为**无界函数**(unbounded function). 又若只存在实数 M(或 m)，使不等式 $f(x)\leqslant M$(或 $m\leqslant f(x)$)在域 D 上成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界(或下界).

定义 1.2.8 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对于 D 中任意的 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ $(f(x_1)<f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 D 上递增(严格递增).

(2) $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$；则称 $f(x)$ 在 D 上递减(严格递减).

满足这些条件的函数，统称为**单调(严格单调)函数**(monotone

strictlg monotone function)

函数特例

(1) Dirichlet(狄利克雷)函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

(2) Riemann(黎曼)函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ \left(p,q\text{ 为正整数},\dfrac{p}{q}\text{为既约}\right), \quad x\in[0,1],\\0, & x=0,\ 1\text{ 及无理数}.\end{cases}$$

(3) Kronecker(克罗内克)符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0.\end{cases}$$

(4) Gauss(高斯)整数函数

$f(x)=[x]=n$,其中 n 为整数,且 $x=n+r,0\leqslant r<1$,即 n 为不超过 x 的最大整数.

1.2.3 初等函数及其图象

定义 1.2.9 通常称幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数为"基本初等函数",而由基本初等函数经有限次四则运算和复合运算构成的单一数学式子所表示的函数,称为初等函数(elementary functions).

常用的初等函数有:

(1) **幂函数**(power function) 函数 x^{α} 称为幂函数,其中 α 为任意实数,图 1.1 中所示为 α 取不同值时幂函数曲线在第 I 象限内的形状.

(2) **有理函数**(rational function) 有理函数可分为:

① **有理整函数**(rational integral function) x 的任何多项式

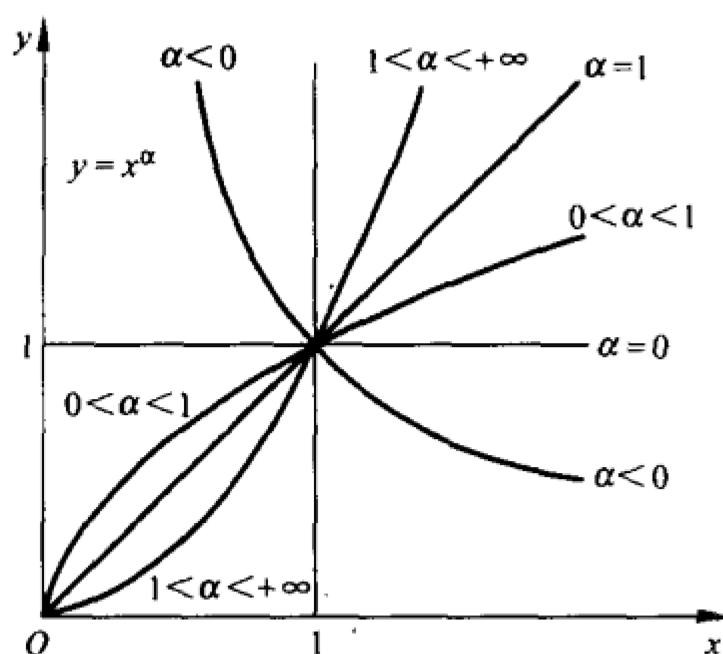


图 1.1 幂函数

(polynomial)$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k$($a_0,a_1,\cdots,a_k$ 为实常数,k 为自然数)称为有理整函数.

② **有理分式函数**(rational fractional function) 任意两个多项式的商

$$\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^r+b_1x^{r-1}+\cdots+b_{r-1}x+b_r}$$

(分母不为零)称为有理分式函数.

(3) **无理函数**(irrational function) 有理函数的根式称为无理函数.

(4) **三角函数**(trigonometric function)与**反三角函数**(invese trigonometrie function).

① 三角函数定义 如图 1.2 所示,在 $\eta O\xi$ 坐标系中以 O 为圆心,R 为半径作圆,$P(X,Y)$是圆周上的一个动点,x 为 OP 与 OX 的夹角(弧)(逆时针方向为正,顺时针方向为负),则有:

正弦函数 $\sin x=\dfrac{Y}{R}$; 余弦函数 $\cos x=\dfrac{X}{R}$;

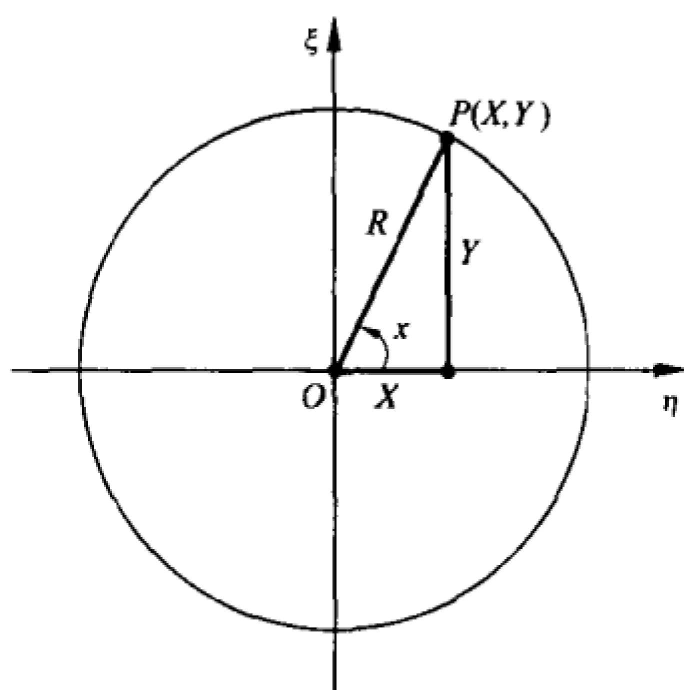


图 1.2　三角圆

正切函数 $\tan x=\frac{Y}{X}$；　余切函数 $\cot x=\frac{X}{Y}$；

正割函数 $\sec x=\frac{R}{X}$；　余割函数 $\csc x=\frac{R}{Y}$.

② **反三角函数及其主值**　三角函数的反函数记作 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\arctan x$、$\operatorname{arccot} x$、$\operatorname{arcsec} x$、$\operatorname{arccsc} x$，通称为反三角函数. 它们都是多值函数，为得到单值分支函数，冠以符号"Arc"以表示主值. 相应的主值范围及其与一般值的关系为：

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{Arcsin} x\leqslant \frac{\pi}{2};\ \arcsin x=k\pi+(-1)^k \operatorname{Arcsin} x,\quad |x|\leqslant 1.$$

$$0\leqslant \operatorname{Arccos} x\leqslant \pi;\ \arccos x=2k\pi\pm \operatorname{Arccos} x,\quad |x|\leqslant 1.$$

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arctan} x<\frac{\pi}{2};\ \arctan x=k\pi+\operatorname{Arctan} x.$$

$$0<\operatorname{Arccot} x<\pi;\ \operatorname{arccot} x=k\pi+\operatorname{Arccot} x.$$

$$0\leqslant \operatorname{Arcsec} x\leqslant \pi;\ \operatorname{arcsec} x=2k\pi\pm \operatorname{Arcsec} x,\quad |x|\geqslant 1.$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{Arccsc} x\leqslant \frac{\pi}{2};\ \operatorname{arccsc} x=k\pi+(-1)^k \operatorname{Arccsc} x,\quad |x|\geqslant 1.$$

上式中的 k 为任意整数.

反三角函数满足下列恒等式:

$\sin(\arcsin x)=x$, $\cos(\arccos x)=x$, $\quad |x|\leqslant 1$;

$\sec(\operatorname{arcsec} x)=x$, $\csc(\operatorname{arccsc} x)=x$, $\quad |x|\geqslant 1$;

$\tan(\arctan x)=x$, $\cot(\operatorname{arccot} x)=x$;

$\operatorname{Arcsin}(\sin x)=x$, $|x|\leqslant\pi/2$; $\operatorname{Arccos}(\cos x)=x$, $\quad 0\leqslant x\leqslant\pi$;

$\operatorname{Arctan}(\tan x)=x$, $\operatorname{Arccsc}(\csc x)=x$, $\quad |x|<\pi/2$;

$\operatorname{Arcsec}(\sec x)=x$, $\operatorname{Arccot}(\cot x)=x$, $\quad 0<x<\pi$;

$$\operatorname{Arcsin} x=\operatorname{Arccos}\sqrt{1-x^2}=\operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\operatorname{Arccsc}\frac{1}{x}=\operatorname{Arcsec}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{Arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$\operatorname{Arcsin}(-x)=-\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos}(-x)=\pi-\operatorname{Arccos} x$,

$\quad |x|\leqslant 1$;

$\operatorname{Arctan}(-x)=-\operatorname{Arctan} x$, $\operatorname{Arccot}(-x)=\pi-\operatorname{Arccot} x$;

$\operatorname{Arcsec}(-x)=\pi-\operatorname{Arcsec} x$, $\operatorname{Arccsc}(-x)=-\operatorname{Arccsc} x$,

$\quad |x|\geqslant 1$;

$$\operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin} y=\begin{cases}\operatorname{Arcsin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}) \\ (\text{若}\ |\operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin} y|<\pi/2), \\ \pi-\operatorname{Arcsin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}) \\ (\text{若}\ \operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin} y>\pi/2), \\ -\pi-\operatorname{Arcsin}(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}) \\ (\text{若}\ \operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin} y<-\pi/2);\end{cases}$$

$\operatorname{Arcsin} x-\operatorname{Arcsin} y=\operatorname{Arcsin} x+\operatorname{Arcsin}(-y)$;

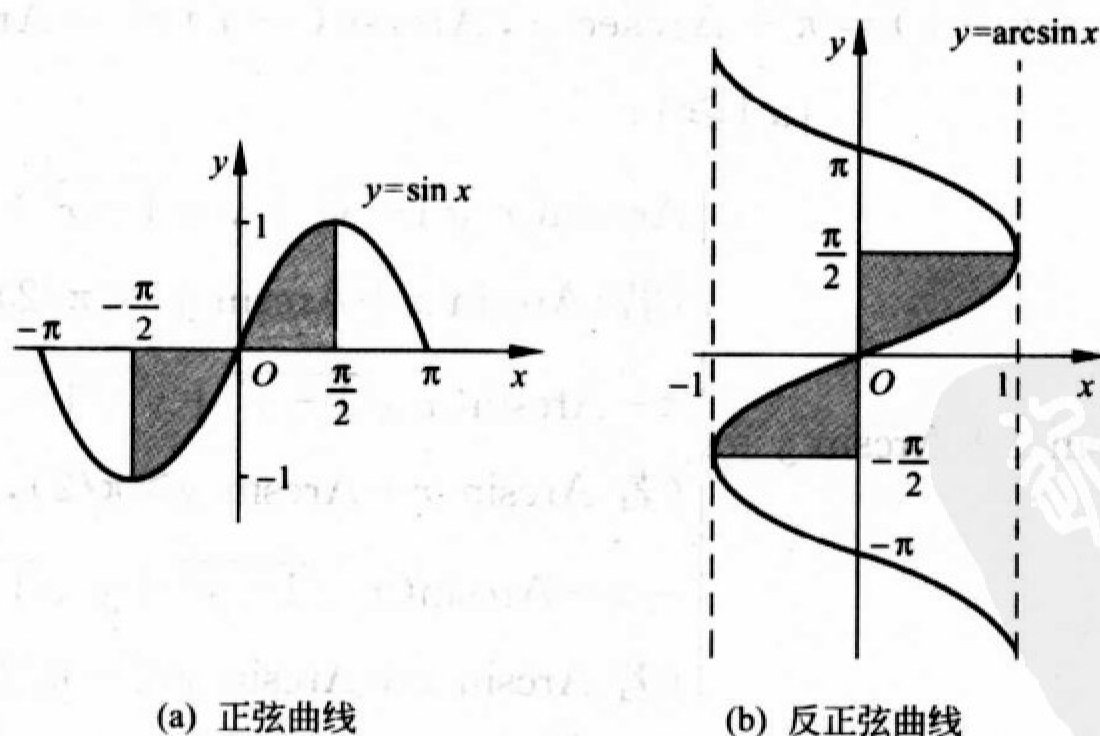
$$\text{Arccos } x+\text{Arccos } y=\begin{cases}\text{Arccos}(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) \\ (\text{若 Arccos } x+\text{Arccos } y<\pi), \\ 2\pi-\text{Arccos}(xy-\sqrt{1-y^2}) \\ (\text{若 Arccos } x+\text{Arccos } y>\pi);\end{cases}$$

$$\text{Arccos } x-\text{Arccos } y=\text{Arccos } x+\text{Arccos}(-y)-\pi;$$

$$\text{Arctan } x+\text{Arctan } y=\begin{cases}\text{Arctan }\dfrac{x+y}{1-xy} \\ (\text{若}\,|\text{Arctan } x+\text{Arctan } y|<\pi/2), \\ \pi+\text{Arctan }\dfrac{x+y}{1-xy} \\ (\text{若 Arctan } x+\text{Arctan } y>\pi/2), \\ -\pi-\text{Arctan }\dfrac{x+y}{1-xy} \\ (\text{若 Arctan } x+\text{Arctan } y<-\pi/2);\end{cases}$$

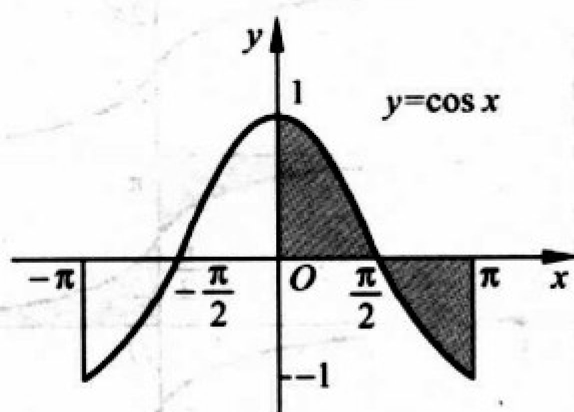
$$\text{Arctan } x-\text{Arctan } y=\text{Arctan } x+\text{Arctan}(-y).$$

③ 三角函数与反三角函数的图象(见图 1.3～图 1.8)

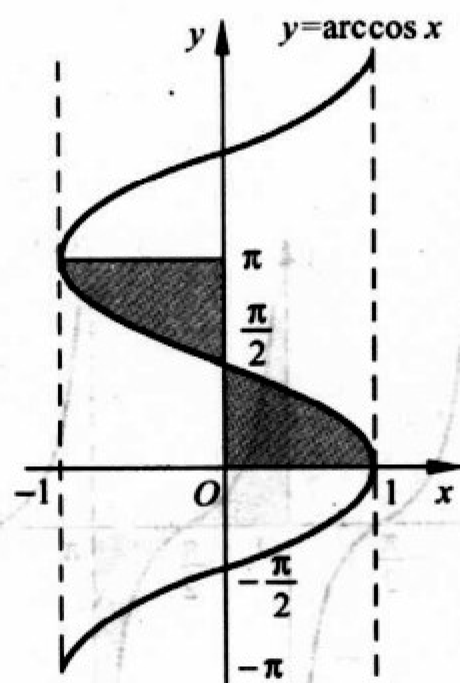


(a) 正弦曲线 (b) 反正弦曲线

图 1.3 正弦曲线及反正弦曲线

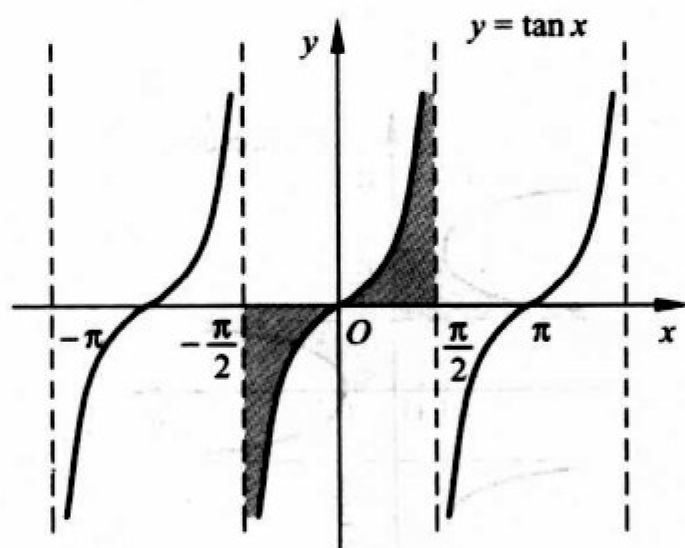


(a) 余弦曲线

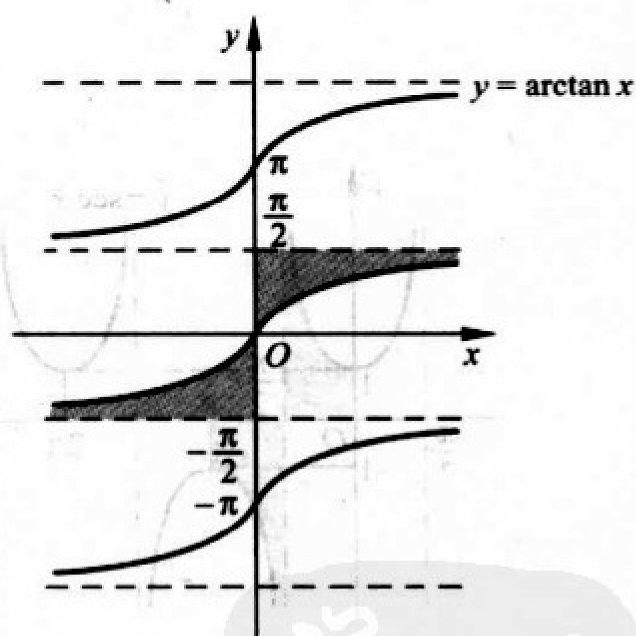


(b) 反余弦曲线

图 1.4 余弦曲线及反余弦曲线

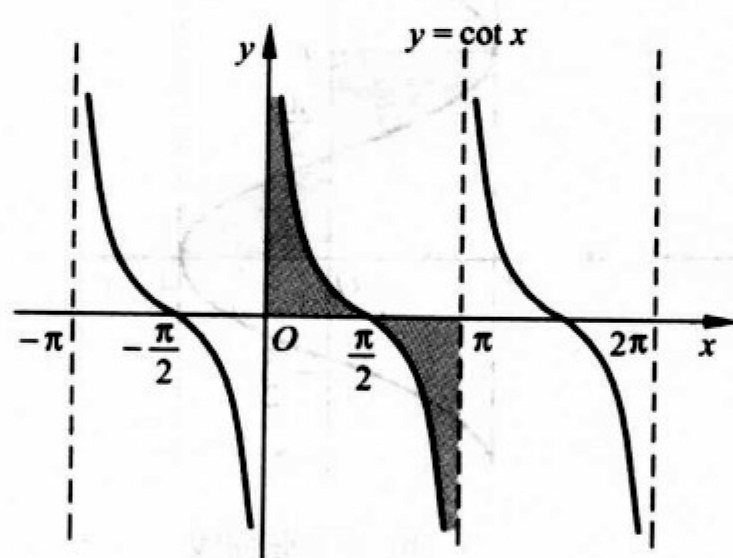


(a) 正切曲线

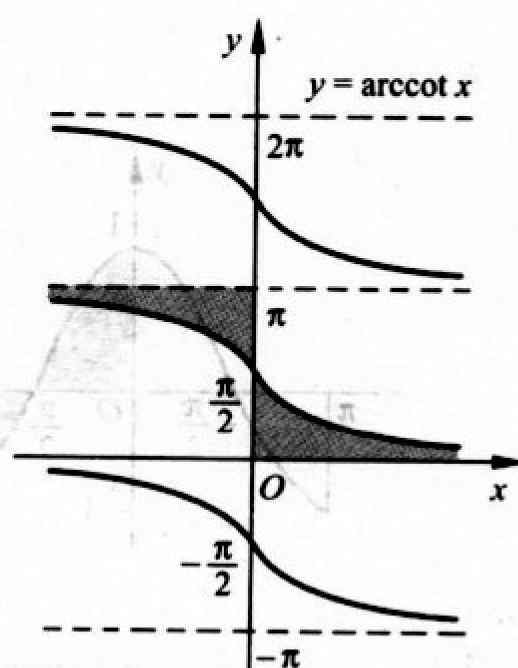


(b) 反正切曲线

图 1.5 正切曲线及反正切曲线

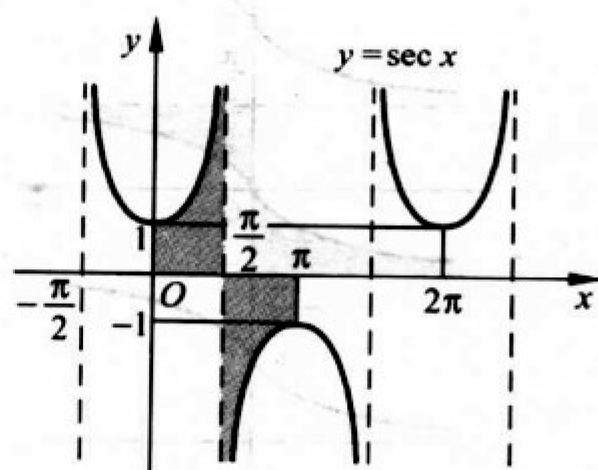


(a) 余切曲线

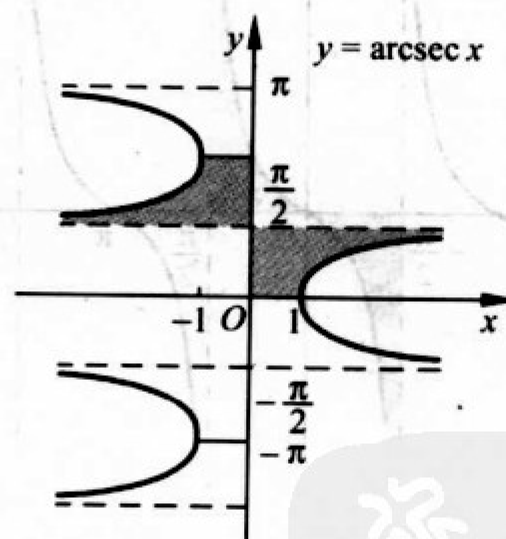


(b) 反余切曲线

图 1.6　余切曲线及反余切曲线

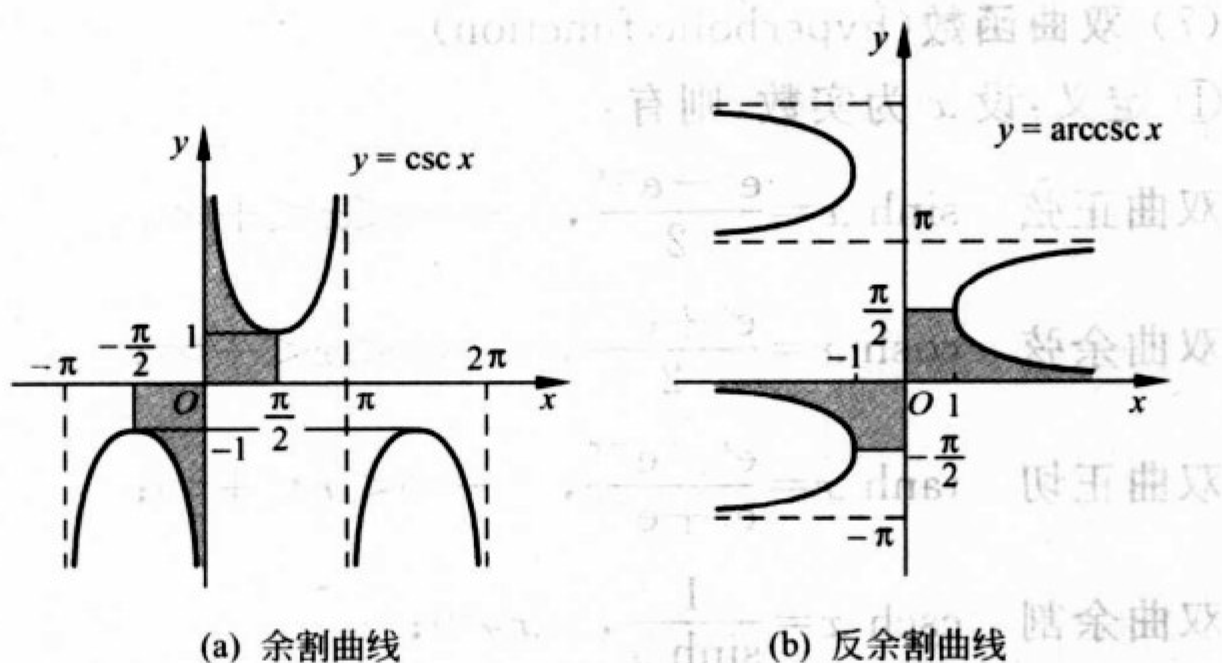


(a) 正割曲线



(b) 反正割曲线

图 1.7　正割曲线及反正割曲线



(a) 余割曲线 (b) 反余割曲线

图 1.8 余割曲线及反余割曲线

(5) **指数函数**(exponential function) 函数 a^x 称为指数函数,其中 a 为不等于 1 的任意正实数. 最常用的是 $a=\mathrm{e}$(e 为自然对数的底),记作 e^x 或 $\exp\{x\}$.

e^x 和 e^{-x}的图象关于 y 轴对称(如图 1.9)

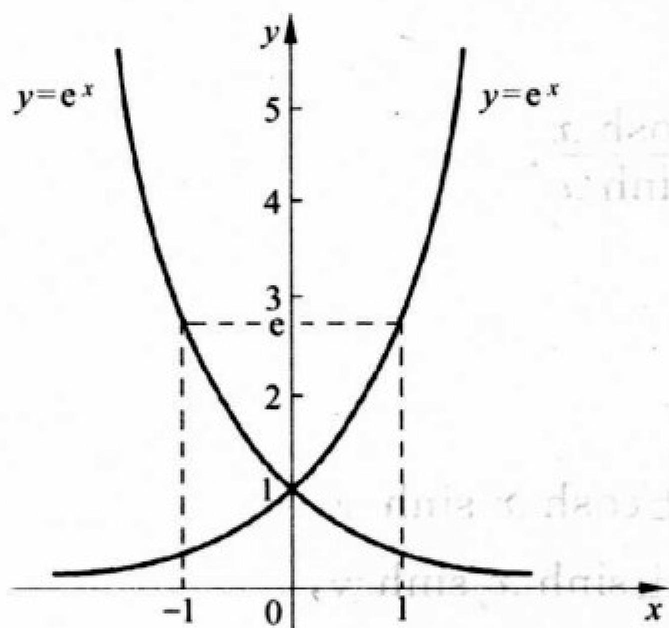


图 1.9 指数函数 e^x 及 e^{-x}

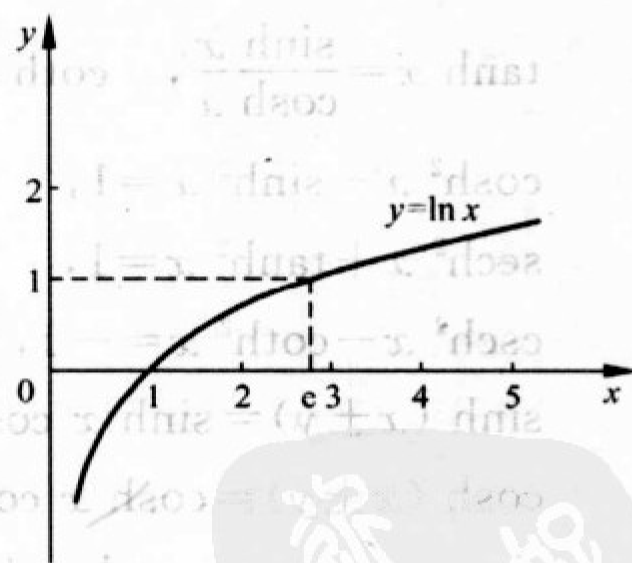


图 1.10 自然对数

(6) **对数函数**(logarithmic function) 指数函数 a^x 的反函数记作 $\log_a x$,称为以 a 为底的对数函数. 其中以 e 为底的对数函数最为常用,称为**自然对数**,记作 $\ln x$,其图象如图 1.10 所示.

(7) **双曲函数**(hyperbolic function)

① 定义:设 x 为实数,则有:

双曲正弦 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $-\infty<x<+\infty$;

双曲余弦 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $-\infty<x<+\infty$;

双曲正切 $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $-\infty<x<+\infty$;

双曲余割 $\operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}$, $x\neq 0$;

双曲正割 $\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}$, $-\infty<x<+\infty$;

双曲余切 $\coth x=\frac{1}{\tanh x}$, $x\neq 0$.

② 恒等式

$\sinh x+\cosh x=e^x$,

$\cosh x-\sinh x=e^{-x}$,

$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$,

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$,

$\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1$,

$\operatorname{csch}^2 x-\coth^2 x=-1$,

$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$,

$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$,

$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$,

$\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$,

$\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x=1+2\sinh^2 x=2\cosh^2 x-1$,

$\tanh 2x=\frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$,

$$\sinh\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{\cosh x-1}{2}},\quad \cosh\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cosh x}{2}},$$

$$\tanh\frac{x}{2}=\frac{\cosh x-1}{\sinh x}=\frac{\sinh x}{\cosh x+1},$$

$$\sinh x+\sinh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2},$$

$$\sinh x-\sinh y=2\sinh\frac{x-y}{2}\cosh\frac{x+y}{2},$$

$$\cosh x+\cosh y=2\cosh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2},$$

$$\cosh x-\cosh y=2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2},$$

$$\tanh x\pm\tanh y=\frac{\sinh(x\pm y)}{\cosh x\cosh y},$$

$(\cosh x\pm\sinh x)^n=\cosh nx\pm\sinh nx$，$n$ 为正整数，称为 De Moivre（棣莫弗）公式.

③ 图象　双曲函数及其它们之间关系的图象见图 1.11 及图 1.12.

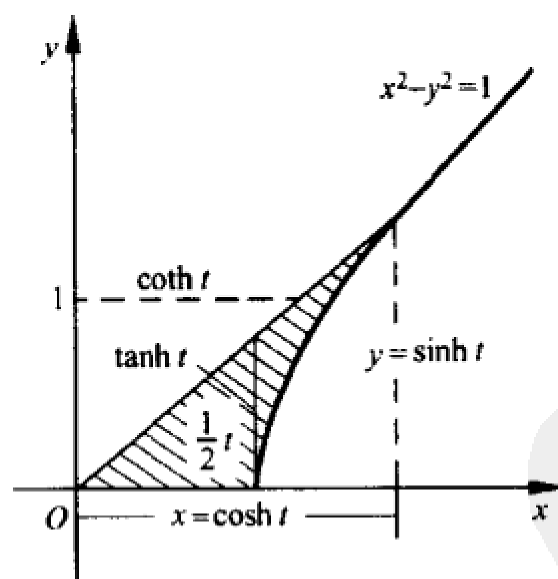


图 1.11　双曲函数通过双曲线来表示

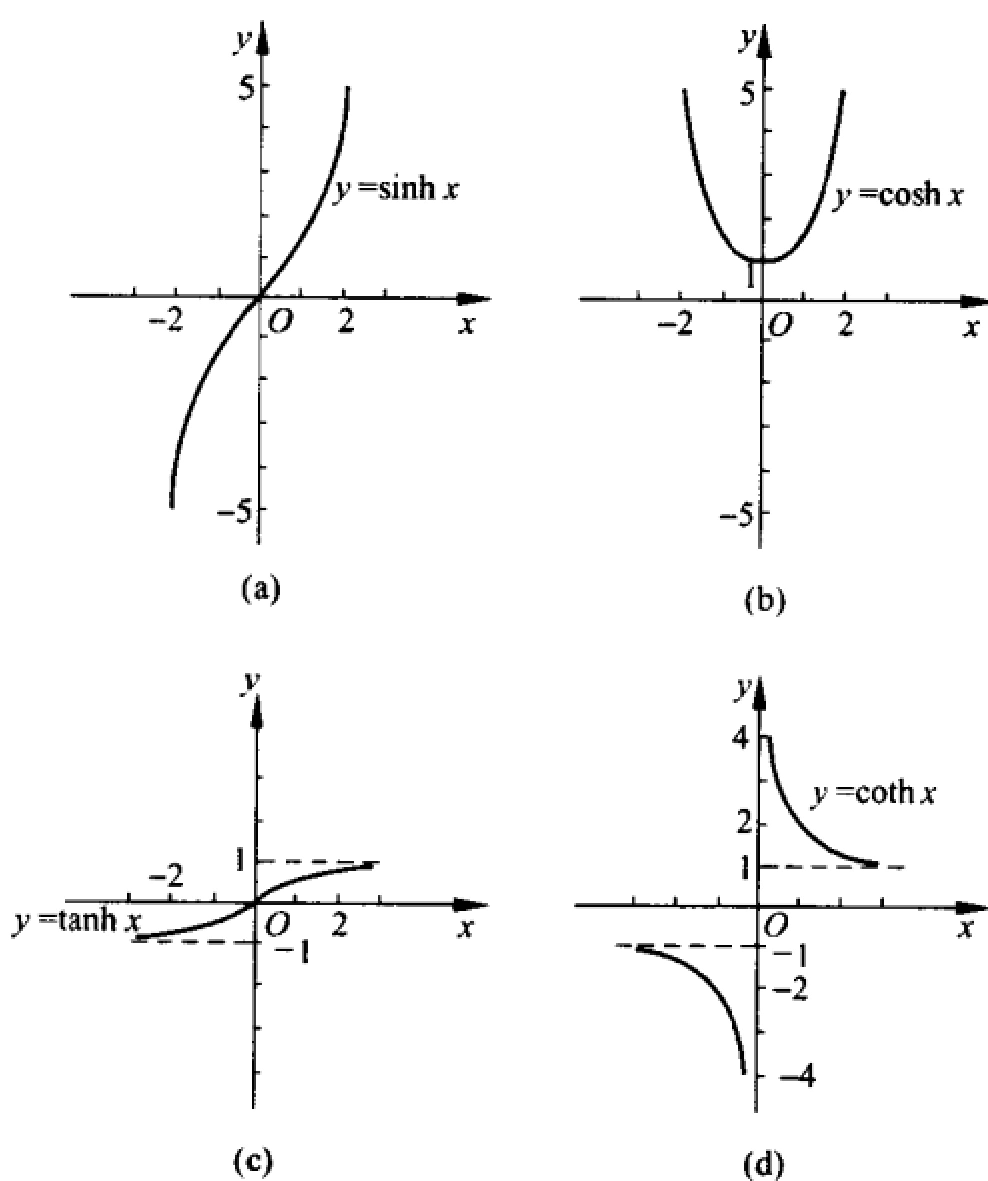


图 1.12　双曲函数

(8) **反双曲函数**　双曲函数的反函数记作 arsinh x、arcosh x、artan x、arcoth x，分别称为反双曲正弦，反双曲余弦，反双曲正切及反双曲余切. 在这 4 个反双曲函数中只有 arcosh x 是多值的，其主值范围确定为$[0,+\infty)$，并用 Arcosh x 表示，这些函数可以用相应的自然对数函数表示，即

① $\operatorname{arsinh} x=\ln[x+\sqrt{x^2+1}], \quad -\infty<x<+\infty.$

② $\operatorname{Arcosh} x=\ln[x+\sqrt{x^2-1}], \quad x\geqslant 1.$

③ $\operatorname{artanh} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, \quad |x|<1.$

④ $\operatorname{arcoth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}, \quad |x|>1.$

且满足恒等式

⑤ $\operatorname{arsinh} x \pm \operatorname{arsinh} y = \operatorname{arsinh}\left[x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right]$.

⑥ $|\operatorname{Arcosh} x \pm \operatorname{Arcosh} y| = \operatorname{Arcosh}\left[xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right]$,

$$x \geqslant 1, y \geqslant 1.$$

⑦ $\operatorname{artanh} x \pm \operatorname{artanh} y = \operatorname{artanh} \dfrac{x \pm y}{1 \pm xy}$, $|x|<1, |y|<1$.

反双曲函数的图象如图 1.13 所示.

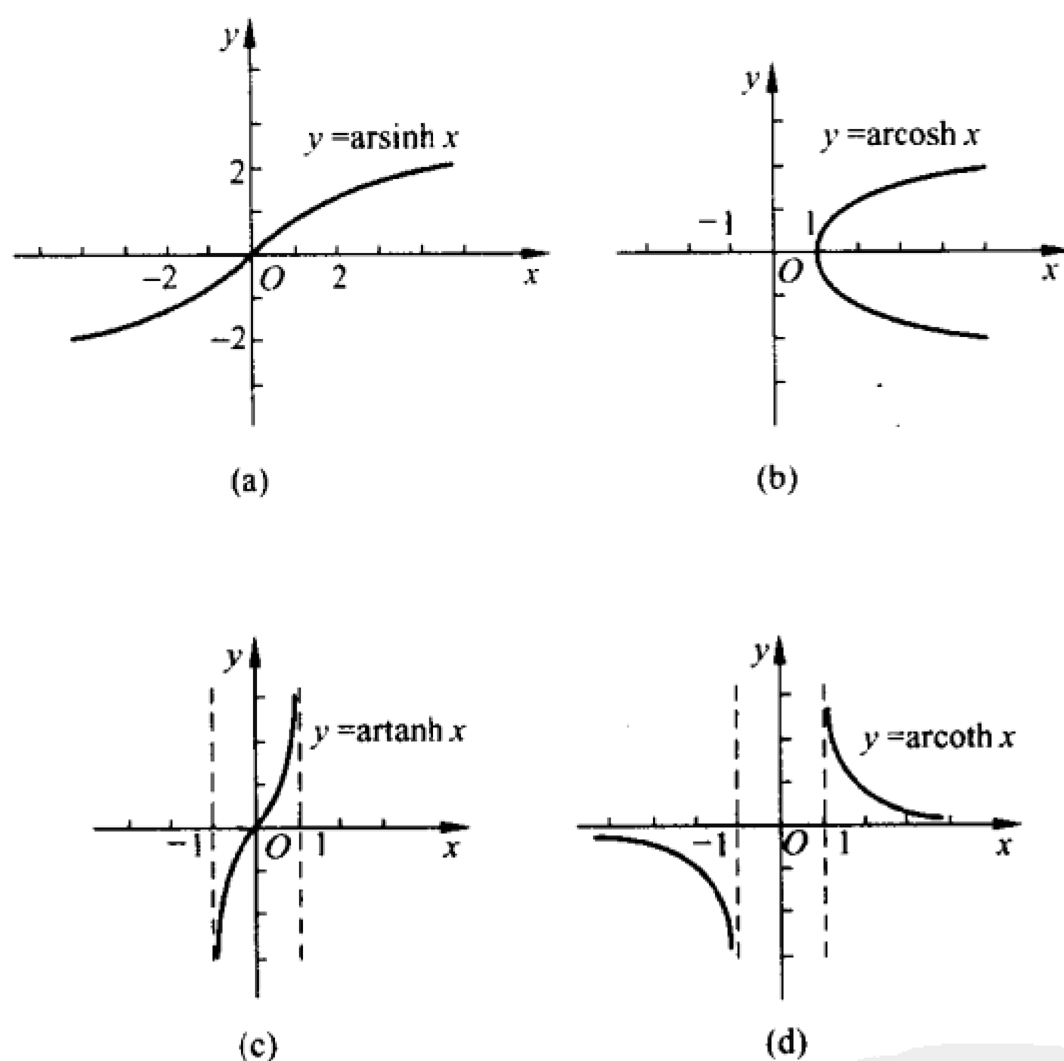
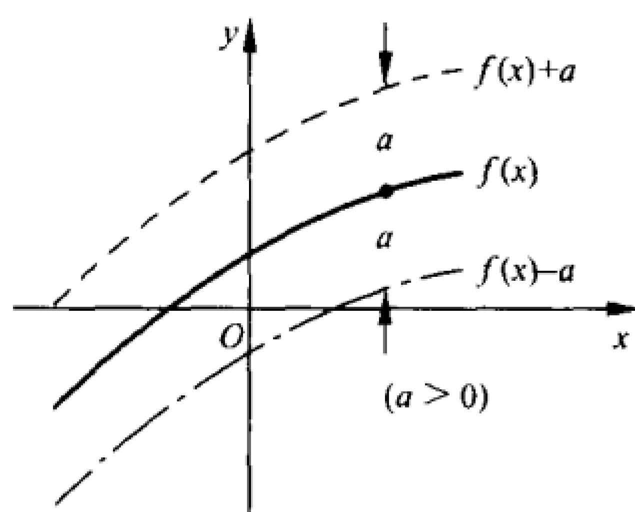


图 1.13 反双曲函数

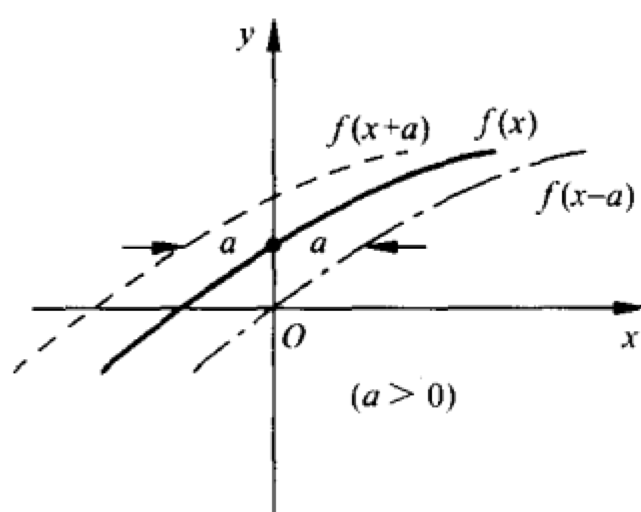
(9) 关于 $f(x)\pm a$、$f(x\pm a)$、$-f(x)$, $f(-x)$ 及反函数 $f^{-1}(x)$ 的图形

函数 $f(x)\pm a(a>0)$ 的图形可以由 $f(x)$ 曲线上下平移距离 a 得到,见图 1.14(a). 函数 $f(x\pm a)(a>0)$ 的图形可以由 $f(x)$ 曲线左右平移距离 a 得到,见图 1.14(b). $-f(x)$ 的图形与 $f(x)$ 的

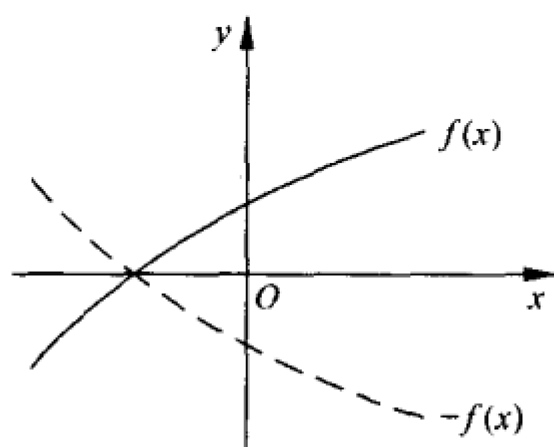
图形关于 x 轴对称，见图 1.14(c). $f(-x)$的图形与 $f(x)$的图形关于 y 轴对称，见图 1.14(d). 反函数 $f^{-1}(x)$的图形与函数 $f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称，见图 1.14(e).



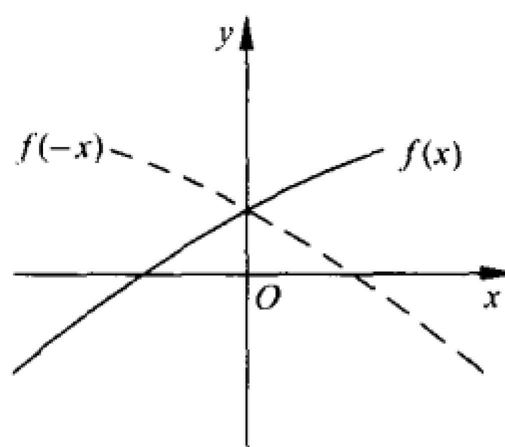
(a) $f(x)\pm a$ 的图形



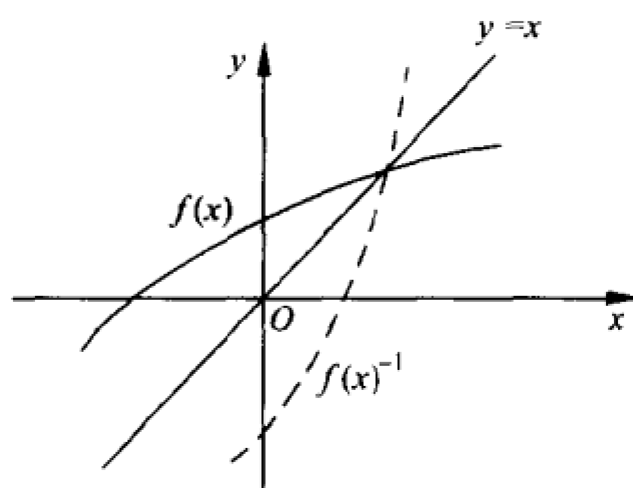
(b) $f(x\pm a)$的图形



(c) $-f(x)$的图形



(d) $f(-x)$的图形



(e) 反函数 $f^{-1}(x)$的图形

图 1.14　函数的平移、对称的图形及反函数的图形

1.2.4 序列

定义 1.2.10 无穷多个元素按某个确定规则作有序排列，称此排列为**序列**(sequence). 记作 $s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots$，或$\{s_n\}$.

定义 1.2.11 当序列中的元素为实数时，称为**数列**(sequence of number)或**点列**，记作

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \quad \text{或} \quad \{a_n\},$$

并称数列的第 n 项 a_n 为一般项.

从函数观点看，数列也就是定义在自然数集合$\mathbb{N}$上的函数，即 $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$.

例 1.2.12 **等差数列**(arithmetic sequence of numbers)

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, \cdots \quad (\text{公差为 } d),$$

一般项为 $a_n = a_1 + (n-1)d$；并称 a_n 为 a_{n-1} 和 a_{n+1} 的等差中项，显然有 $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$. 等差数列前 n 项的部分和为

$$S_n = n\frac{a_1+a_n}{2}.$$

例 1.2.13 **等比数列**(geometric sequence of numbers)

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots \quad (\text{公比为 } q),$$

一般项为 $a_n = a_1q^{n-1}$；并称 a_n 为 a_{n-1} 和 a_{n+1} 的等比中项，显然有 $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. 等比数列前 n 项的部分和为

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

例 1.2.14 Fibonacci(斐波那契)数列$\{F_n\}$是由递推关系

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \\ F_0 = 1, \quad F_1 = 1 \end{cases}$$

所确定的数列，即

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, \cdots$$

称为 Fibonacci 数列. 它在优选法中有重要应用,

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

例 1.2.15 一个大于 1 的整数,如果只能被其本身和 1 所整除,则称之为**素数**(prime number). 若以 $\pi(n)$ 表示小于自然数 n 的素数个数,则$\{\pi(n)\}$是数论中的一个非常重要的数列,当 n 很大时,数 $\pi(n)$可以用函数 $\frac{n}{\ln n}$ 渐近地给出.

定义 1.2.16 如果 $a_n\leqslant a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$,则称数列$\{a_n\}$为**递增数列**;如果 $a_n\geqslant a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$,则称$\{a_n\}$为**递减数列**. 递增数列和递减数列统称为**单调数列**(monotonic sequence of number). 又若存在常数 $M>0$ 使对于一切 n 有 $|a_n|\leqslant M$,则称数列$\{a_n\}$为**有界数列**(bounded sequence of number).

1.3 极限

1.3.1 数列极限

定义 1.3.1 数列极限(limit of a sequence)

(1) 有穷型 设有数列$\{a_n\}$及常数 A,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,恒有

$$|a_n-A|<\varepsilon,$$

则称**数列$\{a_n\}$收敛于 A**,或以 A 为**极限**,并记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \quad 或 \quad a_n\to A.$$

否则称数列$\{a_n\}$**发散**.

(2) 无穷型 设有数列$\{a_n\}$,若对于任意给定的 $G>0$,总存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,恒有 $|a_n|>G$,则称数列$\{a_n\}$为**无穷型发散**,或以**无穷为极限**,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad 或 \quad a_n\to\infty.$$

例 1.3.2

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0\ (a>1)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)=\ln a\ (a>0)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0\ (0<k<1)$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(r_1^n+r_2^n+\cdots+r_m^n)^{\frac{1}{n}}=R$,其中 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 为正数,$R=\max\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}}_{n个根式}=\frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}\ (c>0)$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\mathrm{e}^k$.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}$.

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$.

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$;

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right]=\gamma,$$

其中 $\gamma=0.5772156649015328\cdots$ 称为欧拉常数(Euler constant).

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.61803398\cdots$，其中$\{F_n\}$为 Fibonacci 数列.

定义 1.3.3 设有数列$\{a_n\}$，若 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$是一列无穷增大的正整数，则数列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots$$

称为数列$\{a_n\}$的一个**子列**(subsequence)(或**部分数列**). 又若 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\xi$，则称 ξ 为$\{a_n\}$的**子极限**(subsequence limit)(或**部分极限**). 显然，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A(\infty)$，则对于任何子列$\{a_{n_k}\}$必有

$$\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=A(\infty).$$

例 1.3.4 设$\{R_n\}$是由全体有理数作某种排列所得到的数列，则任何实数 α 都是$\{R_n\}$的子极限.

定理 1.3.5 有界数列$\{a_n\}$至少有一个子极限，且必存在最大子极限和最小子极限.

定义 1.3.6 有界数列$\{a_n\}$的最大子极限和最小子极限相应称为数列$\{a_n\}$的**上极限**(upper limit)和**下极限**(lower limit)，分别记作

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n,\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n.$$

例如：设$\{a_n\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{3}\right\}$，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,a_n=\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

定理 1.3.7 任何有界数列的上下极限都是存在的，且有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n.$$

1.3.2 聚点

定义 1.3.8 设 $E=\{x\}$是一数(点)集，x_0 是一个定数(点)，如果在 x_0 的任何邻域内，总含有无穷多个属于 E 的数(点)，则称

x_0 为**数(点)集的聚点**(point of accumulation).

由此定义可以看出,在聚点 x_0 的任何一个邻域内至少含有一个属于 E 而异于 x_0 的数(点),而 x_0 本身可以属于 E,也可以不属于 E.

例 1.3.9

(1) 设$\mathbb{N}$ 是全体自然数集合,则$\mathbb{N}$ 没有有穷聚点.

(2) 若 E 是所有自然数的倒数$\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$组成的数集,则 E 有惟一的聚点 $x_0=0$(不属于 E).

(3) 设$\mathbb{R}$ 为有理数集合,则它的全部聚点构成实数集.

定理 1.3.10 任何有穷数(点)集都没有聚点.

定理 1.3.11 Weierstrass(魏尔斯特拉斯)聚点原则 若 E 是一有界的无穷数(点)集,则 E 至少有一个聚点.

定理 1.3.12 若$\{a_n\}$是一有界的无穷数列,则一定存在收敛的子列.

定理 1.3.13 若有界数列$\{a_n\}$是由互不相同的数组成,则上极限$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 是$\{a_n\}$的最大聚点.下极限$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 是$\{a_n\}$的最小聚点.

定理 1.3.14 若有界数列$\{a_n\}$是由互不相同的数组成,则$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是点集$\{a_n\}$仅有惟一的聚点.

1.3.3 判断数列极限存在的若干定理

定理 1.3.15 夹逼定理 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=A$,若存在某自然数 N,当 $n>N$ 时不等式

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$$

成立,则$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=A$.

许多极限问题可利用夹逼定理加以证明,如:

(1) 设 $c_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,则$\{c_n\}$收敛,且

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=1$.

(2) 当 $0<k<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

定理 1.3.16 单调有界(bounded monotone)原理 具体内容见定理 1.1.4.

数列 $\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 是一个单调递增有上界的数列,因此由上述定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 必定存在.通常将此极限记为 e.数 e 是一个无理数,它的前 15 位小数为

$$e=2.718281828459045\cdots$$

以 e 为底的对数称为自然对数,记作 $\ln x$.

定理 1.3.17 Cauchy 准则 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是:对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $N=N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,$|a_n-a_{n+p}|<\varepsilon$ 成立.

例 1.3.18

(1) 任一无限十进小数 β $(0<\beta<1)$ 的不足近似值所组成的数列

$$\frac{b_1}{10},\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2},\cdots,\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{10^2}+\cdots+\frac{b_n}{10^n},\cdots$$

收敛,其中 $b_1,b_2,\cdots,b_n\cdots$ 属于数集 $\{0,1,2,\cdots,9\}$.

(2) 数列 $\{a_n\}=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 发散.

定理 1.3.19 若存在正数 M,使数列 $\{a_n\}$ 的**变差**(variation)满足不等式

$$|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|<M,\quad n=2,3,\cdots.$$

则称数列 $\{a_n\}$ 有**有界变差**(bounded variation).凡有有界变差的数列都是收敛的.

例 1.3.20 设 $a_n=\frac{\cos 1!}{1\times 2}+\frac{\cos 2!}{2\times 3}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$,数列$\{a_n\}$收敛.

定理 1.3.21 数列$\{a_n\}$极限存在的充分必要条件是:$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. 显然,若$\{a_n\}$是由互不相同的数组成的无穷数集,则此定理与定理 1.3.14 一致.

例 1.3.22

(1) 设数列$\{a_n\}$满足条件

$$0\leqslant a_{m+n}\leqslant a_m+a_n, \qquad m,n=1,2,\cdots,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$存在.

(2) 设 $a_n=\cos^n\frac{2n\pi}{3}$,则数列$\{a_n\}$发散.

定理 1.3.23 Stolz(斯托尔兹)定理 设有数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$,其中$\{b_n\}$为逐项递增且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$,若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=l\ (\text{或}\pm\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l\ (\text{或}\pm\infty).$$

例 1.3.24 若数列$\{z_n\}$有极限(或$\pm\infty$),则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\lim_{n\to\infty} z_n.$$

定理 1.3.25 设 $\omega_{nk}\geqslant 0\,(k=0,1,2,\cdots,n;\,n=1,2,\cdots)$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_{nk}=1$, 且对固定的 k 有$\lim\limits_{n\to\infty}\omega_{nk}=0$. 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$,则

$$\lim_{n\to\infty}(\omega_{n1}a_1+\omega_{n2}a_2+\cdots+\omega_{nn}a_n)=A.$$

例 1.3.26 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot\sqrt[k]{k}=\frac{1}{2}.$

1.3.4 收敛数列的性质及运算

定理 1.3.27 若数列收敛，则极限惟一.

定理 1.3.28 收敛数列必定有界.

定理 1.3.29 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$，且 $A<B$，则必存在正整数 N，当 $n>N$ 时有 $a_n<b_n$. 反之，若 $a_n<b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$，则必有 $A\leqslant B$.

定理 1.3.30 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，又 $A>p(<q)$，则存在 N，当 $n>N$时有 $a_n>p(<q)$；特别地，若 $A>0(<0)$，则数列从某项开始恒为正(负).

定理 1.3.31 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|A|$.

定理 1.3.32 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$，则：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=AB$；特别有$\lim\limits_{n\to\infty} ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (c 为常数).

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

1.3.5 函数极限的定义

定义 1.3.33 设函数 $f(x)$在 x_0 点的某个邻域内有定义(x_0 可以除外)，A 为常数. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$当 x 趋于 x_0 时以数 A 为**极限**(limit)，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

定义 1.3.34 设函数 $f(x)$在 x_0 点的某个左(右)邻域内有定义(x_0 可以除外)，A 为常数. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 $\delta>0$，使当 $0<x_0-x<\delta$ $(0<x-x_0<\delta)$时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 x 由左(右)侧趋于 x_0 时以数 A 为极限，简称为**左(右)极限**(limit from left (right))，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad (\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A)$$

或

$$f(x)\to A(x\to x_0^-) \quad ((x\to x_0^+)).$$

左、右极限统称为**单侧极限**(limit from one side).

定义 1.3.35 设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，A 为常数. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 $M>0$，使当 $|x|>M(x<-M;x>M)$ 时，都有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 $\infty(-\infty;+\infty)$ 时以数 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad (\lim_{x\to-\infty} f(x)=A;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=A)$$

或

$$f(x)\to A(x\to\infty) \quad ((x\to-\infty);(x\to+\infty)).$$

定义 1.3.36 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内(x_0 除外)有定义(或当 $|x|$ 足够大时有定义)，若对任意给定的 $G>0$，总存在某个正数 $\delta>0(M>0)$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ ($|x|>M$)时，都有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 $x_0(\infty)$ 时有**无穷极限**. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$$

或

$$f(x)\to\infty(x\to x_0) \quad (f(x)\to\infty(x\to\infty)).$$

1.3.6 判断函数极限存在的若干定理

定理 1.3.37 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$) 存在的充分必要条件

是：左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$) 和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$) 存在且相等.

例 1.3.38 函数 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的图象如图 1.15 所示. 不难看出 $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$；因此根据上述定理知 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 不存在. 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 存在，且为 1.

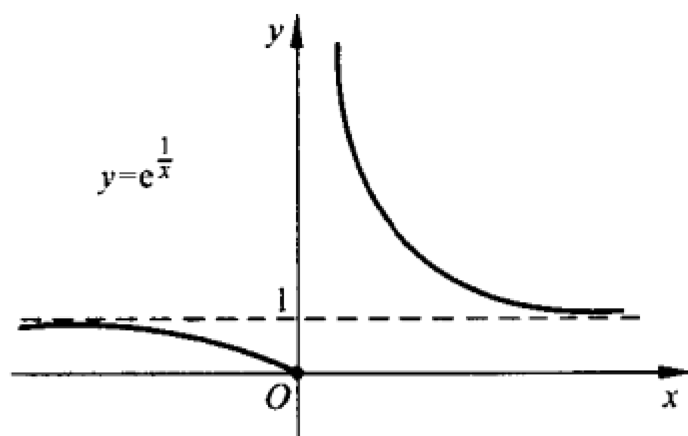


图 1.15 函数 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的图象

定理 1.3.39 夹逼定理 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)=A$，且在 x_0 附近有 $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$ $(x\neq x_0)$，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且为 A.

例 1.3.40 两个著名极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

函数 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的图象如图 1.16 所示.

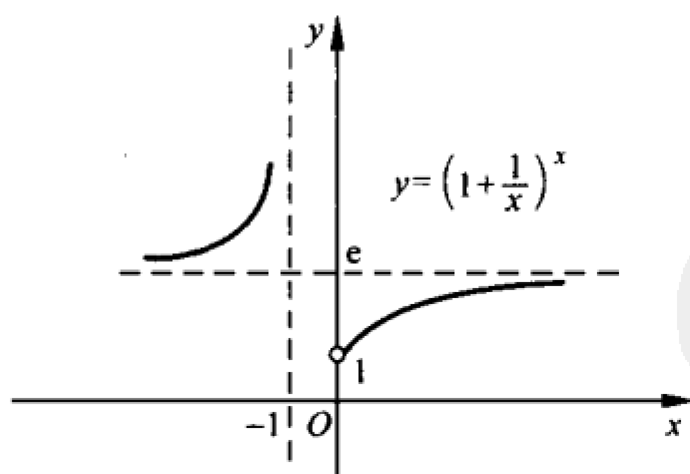


图 1.16 函数 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的图象

定理 1.3.41 单调有界函数必有有穷极限，单调无界函数必

有无穷极限.

定理 1.3.42 Heine(海涅)定理 函数极限$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$存在的充要条件是:对于任意的收敛于x_0的无穷点列$\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$,都有$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=A$.

定理 1.3.43 Cauchy 收敛准则

(1) 函数极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$存在的充要条件是:对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正数$\delta>0$,使对于满足不等式

$$0<|x'-x_0|<\delta \quad 及 \quad 0<|x''-x_0|<\delta$$

的任何x'和x''都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

(2) 函数极限$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在的充要条件是:对任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正数$M>0$,使对于满足不等式$x'>M$及$x''>M$的任何x'和x''都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

例 1.3.44 极限$\lim_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

1.3.7 函数极限的性质及运算

定理 1.3.45 **惟一性**(uniqueness) 若函数极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$($\lim_{x\to\infty} f(x)$)存在,则极限惟一.

定理 1.3.46 **局部有界性**(locally bounded)

(1) 若函数极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$存在,则必存在正数$\eta>0$,使函数$f(x)$在区间$(x_0-\eta,x_0+\eta)$上有界(x_0除外).

(2) 若函数极限$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在,则必存在正数$M>0$,使函数$f(x)$在区间$[M,+\infty)$上有界.

定理 1.3.47 **局部不等式性**(local inequality)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A<B$，则存在正数 $\eta>0$，使不等式

$$f(x)<g(x)$$

在区间 $(x_0-\eta_0, x_0+\eta)$ 上成立（x_0 除外）. 反之，若不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 在区间 $(x_0-\eta, x_0+\eta)$ 上成立（x_0 除外），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=B$，且 $A<B$，则必存在正数 $M>0$，使不等式

$$f(x)<g(x)$$

在区间 $[M,+\infty)$ 上成立. 反之，若不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 在区间 $[M,+\infty)$ 上成立，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

由此定理立即可以得到下面的推论.

推论 1.3.48 局部保号性(locally keeped sign)

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0(<0)$，则存在正数 $\eta>0$，使在区间 $(x_0-\eta, x_0+\eta)$ 上（x_0 除外）$f(x)$ 恒为正（负）.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A>0(<0)$，则存在正数 $M>0$，使在区间 $[M,+\infty)$ 上 $f(x)$ 恒为正（负）.

定理 1.3.49 极限运算公式

(1) 若极限 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都存在，则：

① $\lim\,[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

② $\lim\,[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\ (\lim g(x)\neq 0)$.

(2) 若 $\lim f(x)=A$，则 $\lim|f(x)|=|A|$.

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x=A$ 处连续，且 $\lim\varphi(x)=A$，则

$\lim f(\varphi(x)) = f(\lim\varphi(x))$.

1.3.8 无穷小量与无穷大量

定义 1.3.50 极限值为零的变量(函数或数列),称为**无穷小量**(infinitesimal).

例如,变量 e^x 当 $x\to-\infty$时为无穷小量.

定义 1.3.51 有无穷极限的变量(函数或数列),称为**无穷大量**(infinity).

例如,变量 e^x 当 $x\to+\infty$时为无穷大量.

定理 1.3.52 无穷大量与无穷小量之关系(relation between infinity and infinitesimal) 设变量 α 恒不为零,则 α 是无穷小量的充要条件是:$\frac{1}{\alpha}$是无穷大量.

定理 1.3.53 无穷小量与极限之关系(relation between infinitesimal and limit) 函数 $f(x)$(或数列$\{a_n\}$)以 A 为极限的充分必要条件是:$(f(x)-A)$(或(a_n-A))为无穷小量.

由此定理可知,若 $\lim f(x)=A$,则 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$为无穷小量,即有 $\lim \alpha(x)=0$.

定理 1.3.54 有限个无穷小量的和仍为无穷小量.

定理 1.3.55 无穷小量乘有界量仍为无穷小量.

例 1.3.56 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$,即 $x\sin\frac{1}{x}$当 $x\to 0$ 时为无穷小量.

定义 1.3.57 无穷小量的阶(order of infinitesimals) 设 α、β是同一过程的两个无穷小量,并且 β不为零,那么:

(1) 若$\frac{\alpha}{\beta}$仍然是同一过程的无穷小量$\left(\text{即} \lim\frac{\alpha}{\beta}=0\right)$,则称 α 是较 β **高阶的无穷小**(infinitesimal of higher order),或 β 是较 α **低阶的无穷小**(infinitesimal of lower order),记作 $\alpha=o(\beta)$. 例如,当 $x\to 0$ 时,$x-\sin x=o(x^2)$.

(2) 若有常数 $0<m<M$,使不等式 $m<\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<M$ 在过程的某个时刻之后成立(或有 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=A\neq0(\infty)$),则称 α 和 β 是**同阶无穷小**(infinitesimal of the same order),记作 $\alpha=O(\beta)$. 例如,当 $x\to0$ 时,$x-\sin x=O(x^3)$.

(3) 若特别有 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=1$,则称 α、β 互为**等价无穷小**(equivalent infinitesimals),记作 $\alpha\sim\beta$. 例如,当 $x\to0$ 时,$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$(例 1.3.60(1)).

(4) 当 $x\to0$ 时,$x^n(n=1,2,\cdots)$都是无穷小量,如果

$$\alpha(x)=O(x^n),\qquad x\to0,$$

则称 $\alpha(x)$是关于 x 的 **n 阶无穷小**. 例如,当 $x\to0$ 时,$x-\sin x$ 为 x 的三阶无穷小.

定义 1.3.58 无穷大量的阶(order of infinity) 设 $\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$ 是同一过程中的无穷大量,那么:

(1) 若 $\frac{\mathscr{X}}{\mathscr{Y}}$ 仍然是同过程的无穷大量,则称 $\mathscr{X}$ 是较 $\mathscr{Y}$ **高阶的无穷大**(infinity of higher order).

(2) 若 $\frac{\mathscr{X}}{\mathscr{Y}}$ 是同过程的无穷小量,则称 $\mathscr{X}$ 是较 $\mathscr{Y}$ **低阶的无穷大**(infinity of lower order).

(3) 若有常数 $0<m<M$ 使不等式 $m<\left|\frac{\mathscr{X}}{\mathscr{Y}}\right|<M$ 从过程的某时刻后成立$\left(\text{或有 }\lim\frac{\mathscr{X}}{\mathscr{Y}}=A\neq0(\infty)\right)$,则称 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$ 是**同阶无穷大**(infinity of the same order). 记作 $\mathscr{X}=O(\mathscr{Y})$.

(4) 当 $x\to\infty$ 时,$x^n(n=1,2,\cdots)$都是无穷大量. 若 $\mathscr{X}(x)=O(x^n)(x\to\infty)$,则称 $\mathscr{X}(x)$为 x 的 **n 阶无穷大**. 且常用符号 $O(1)$表

示相应过程的有界量. 如 $\sin x=O(1)(x\to\infty)$.

定理 1.3.59 L'Hospital(洛必达)法则

(1) 不定式$\frac{0}{0}$的定值法　若下列条件成立:

① 函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0(或∞)的某一邻域内除点 x_0 外处处可微,且 $g'(x)\neq 0$.

② 极限 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)=0$.

③ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$).

则极限 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}$存在,且

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) 不定式$\frac{\infty}{\infty}$的定值法　若下列条件成立:

① 函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0(∞)的某一邻域内除点 x_0 外处处可微,且 $g'(x)\neq 0$.

② $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} g(x)=\infty$.

③ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为$\infty$).

则极限 $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}$存在,且

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(3) 关于不定式 $0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$ 的定值,可以利用相应的代数变形和取对数的方法化为情形(1)或(2).

注意,若$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$也是不定式,则只要条件许可,可以继续运

用 L'Hospital 法则，通过研究 $\lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$ 来定值. 另外，若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则不能断言极限 $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在，而需通过其他途径来研究.

例 1.3.60

(1) $\frac{0}{0}$ 型：$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$.

由此例可见，当 $x\to 0$ 时有

$x-\sin x = O(x^3)$；$x-\sin x \sim \frac{x^3}{6}$；$x-\sin x = o(x^2)$.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 型：$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-1}}{e^x}$

$= \cdots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$（$n$ 为任意正整数）.

(3) $0\cdot\infty$ 型：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\varepsilon}\ln^n x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln^n x}{x^{-\varepsilon}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{n\ln^{n-1} x}{(-\varepsilon)x^{-\varepsilon}} =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{n(n-1)\ln^{n-2} x}{(-\varepsilon)^2 x^{-\varepsilon}} = \cdots = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{n!}{(-\varepsilon)^n x^{-\varepsilon}} = 0\ (\varepsilon > 0)$.

(4) $\infty - \infty$ 型：$\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\ln x - 1}{(x-1)\ln x} =$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)+x\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+1+\ln x} = \frac{1}{2}.$$

(5) 1^{∞} 型：$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \exp\left[x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)\right]$

$$= \exp\left[\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}\right] = \exp\left[\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2\arctan x}\cdot\frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}}\right]$$

$$=\exp\left[-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\arctan x}\right]=e^{-2/\pi}.$$

(6) 0^0 型：$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}\exp(x\ln x)=\exp\left(\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x\right)=e^0=1.$

(7) ∞^0 型：$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)$

$$=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\right)=e^0=1.$$

1.4 函数连续性

1.4.1 连续性的基本概念

定义 1.4.1 设函数 $y=f(x)$在 x_0 的一个邻域内有定义，称 $f(x)-f(x_0)$为自变量由 x_0 变到 x 时所对应的**函数的增量**(increment of a function). 若用 Δx 表示自变量的增量(即 $\Delta x=x-x_0$)，则相应用 Δy 表示函数的增量，即有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

定义 1.4.2 设函数 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\quad 或\quad \lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $f(x)$**在点 x_0 连续**(continuity)，或 x_0 是 $f(x)$的一个**连续点**.

定义 1.4.3 设函数 $f(x)$在 x_0 的左(右)邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)\right)或\lim_{\Delta x\to0^-}\Delta y=0\left(\lim_{\Delta x\to0^+}\Delta y=0\right),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 **左(右)连续**(left (right)- hand continuity).

定理 1.4.4 函数 $f(x)$在 x_0 点连续的充要条件是：函数 $f(x)$在点 x_0 既左连续又右连续.

定义 1.4.5 函数 $f(x)$的不连续点称为**间断点**(discontinuous

point). 又可细分为：

(1) 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$的**可去性间断点**(point of removable discontinuity). 如图 1.17 所示.

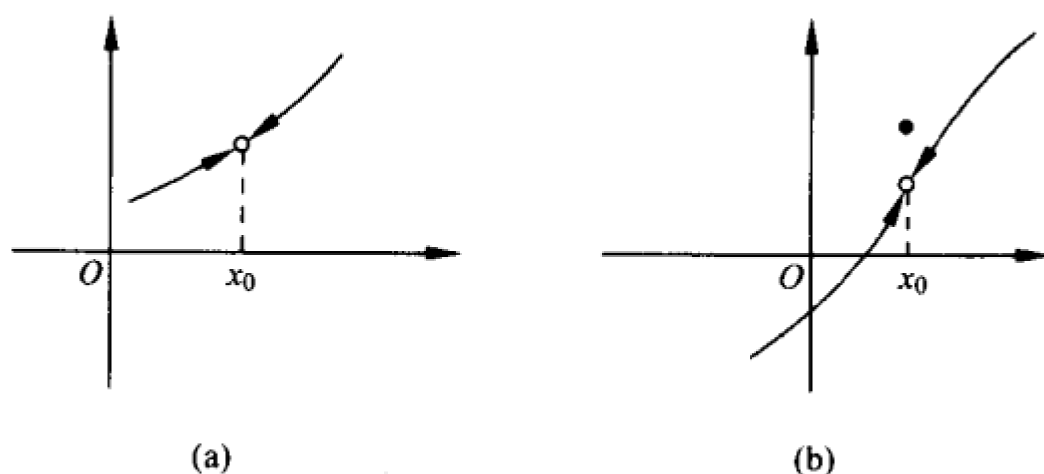


图 1.17　可去性间断点图例

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$的**跳跃间断点**(point of jump discontinuity). 如图 1.18 所示.

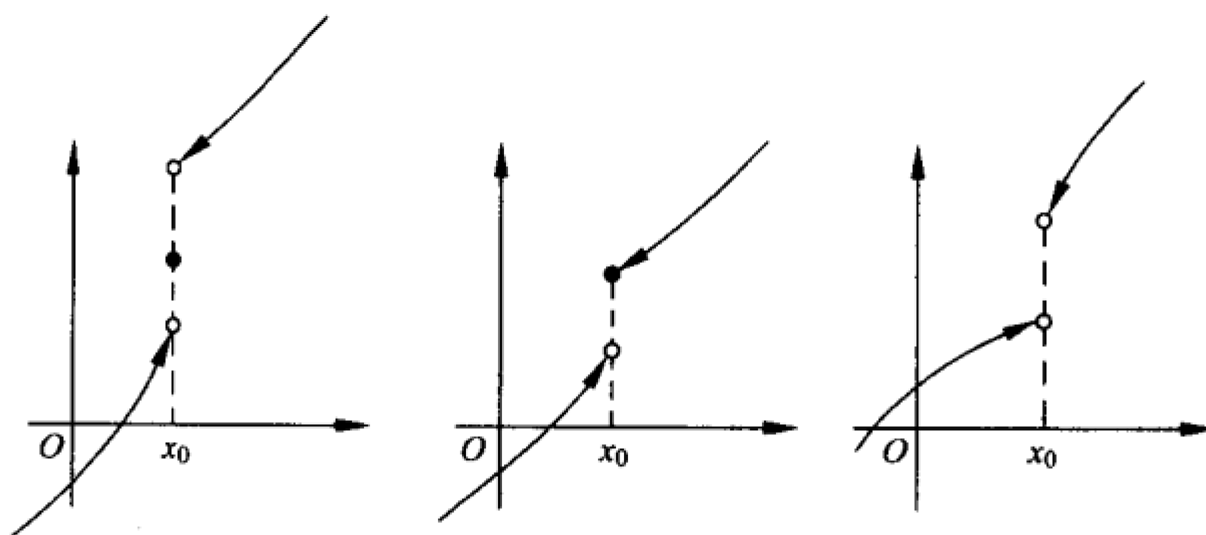


图 1.18　跳跃间断点图例

(3) 设函数在点 x_0 处至少有一侧极限不存在，如函数$y=\dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时，$y \to \infty$，这种在 $x=0$ 处函数趋向无穷的间断点，称做**无穷型间断点**，见图 1.19. 又如函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$在 $x=0$ 处左右极限都不存在，见图 1.20.

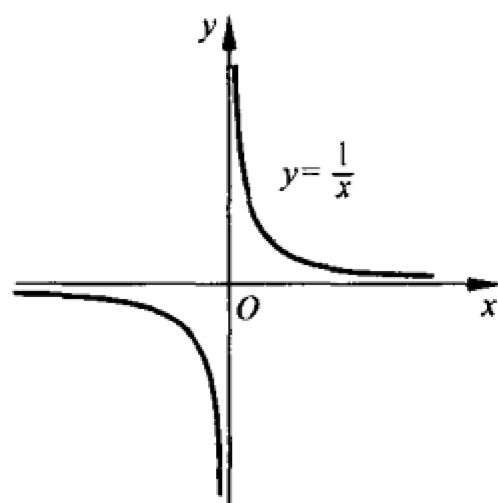


图 1.19　函数在 $x=0$ 处间断

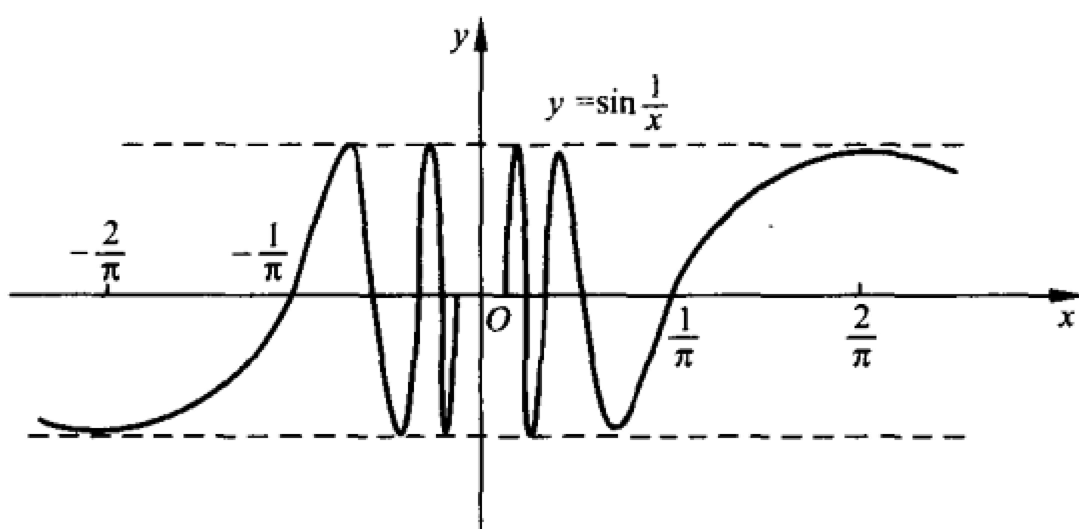


图 1.20　函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处间断

可去性间断点及跳跃间断点的共同特点是间断点处的左右极限均存在，统称为**第一类间断点**(discontinuity of the 1st kind). 若函数在间断点处至少有一侧极限不存在，如(3)所示，统称为**第二类间断点**(discontinuity of the 2nd kind).

定义 1.4.6　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的每一点都连续(若 I 有端点，则左端点上应是右连续，右端点上应是左连续)，则称函数在区间 I 上连续，或 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

定义 1.4.7　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上仅有有限个第一类间断点，则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上**分段连续**(sectionally continuous).

例 1.4.8

(1) Dirichlet 函数在任一点处间断，且为第二类间断.

(2) Riemann 函数在任一有理点处间断，且为第一类间断，而在任一无理点处连续.

定理 1.4.9 单调函数若有间断，只能是第一类间断.

1.4.2 连续函数的性质

函数在连续点附近的局部性质：

(1) 函数在连续点的某邻域内有界.

(2) 设 x_0 为函数 $f(x)$的连续点，且 $f(x_0)>0(<0)$，则函数 $f(x)$在 x_0 点的某个邻域内恒为正(负).

(3) 设 $f(x),g(x)$在 x_0 连续，且 $f(x_0)>g(x_0)(f(x_0)<g(x_0))$，则在 x_0 的某邻域内恒有 $f(x)>g(x)(f(x)<g(x))$.

(4) 若 $f(x),g(x)$在 x_0 点连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$及$\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$在点 x_0 也连续.

(5) 若函数 $f(u)$在 u_0 点连续，函数 $g(x)$在 x_0 点连续，且 $u_0=g(x_0)$，则复合函数$f(g(x))$在点 x_0 连续.

定理 1.4.10 **闭区间上连续函数的性质** 设函数 $f(x)$在闭区间上连续，那么：

(1) $f(x)$在$[a,b]$上有界.

(2) $f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值.

(3) 设 c 为介于 $f(x)$在$[a,b]$上之最大值和最小值之间的任何一个实数，则至少有一点$x_0\in[a,b]$，使 $f(x_0)=c$.

(4) 若 $f(a)\cdot f(b)<0$(即 $f(a),f(b)$异号)，则至少有一点 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$.

定理 1.4.11 **反函数存在**(existence of the inverse function)

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续且严格单调，则反函数 $f^{-1}(x)$在$[f(a),f(b)]$(或$[f(b),f(a)]$)上存在且连续.

定理 1.4.12 **初等函数的连续性**(continuity of the elementary

function) 初等函数在其定义域内是连续的.

1.4.3 一致连续(均匀连续)

定义 1.4.13 设 $f(x)$是定义在区间 I(开、闭、有穷或无穷均可)上的函数,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在一个只与 ε 有关,而与 x 无关的$\delta(\varepsilon)>0$,使当$|\Delta x|<\delta(\varepsilon)$时,对于一切的 $x\in I$ 都有

$$|\Delta y|=|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon, \qquad x\in I,$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上**一致连续**(uniform continuity).

上述定义也可述为:设 $f(x)$是定义在区间 I(开、闭、有穷或无穷均可)上的函数.若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在一个只与 ε 有关的 $\delta(\varepsilon)>0$,使对区间 I 上的任意两点 x' 和 x'',只要$|x'-x''|<\delta(\varepsilon)$,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上**一致连续**.例如,函数 $\ln x$ 在区间$(0,+\infty)$上连续,但不是一致连续,不过对于任意的 $\eta>0$,函数 $\ln x$ 在区间$[\eta,+\infty)$上却是一致连续的.

对于闭区间上连续的函数,有下面著名的 Cantor 定理.

定理 1.4.14 Cantor(康托尔)定理　若函数在闭区间上连续,则必定一致连续.

利用 Cantor 定理很容易证明如下一些推论.

推论 1.4.15 设 $f(x)$在开区间(a,b)上连续,若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在,则 $f(x)$在(a,b)上一致连续.

推论 1.4.16 若函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且当 x 趋于$+\infty$时 $f(x)$有有穷极限,则 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

推论 1.4.17 若单调有界函数 $f(x)$在开区间(a,b)(有穷或无穷)上连续,则 $f(x)$在(a,b)上一致连续.

2 一元函数微分学

2.1 导数与微分

2.1.1 基本概念

定义 2.1.1 设函数 $y=f(x)$在 x_0 点的某邻域内有定义，Δx 和 Δy 分别为自变量和函数的增量. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\text{或}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$

存在，则称函数 $f(x)$在 x_0 点**可导**(differentiable)，并称此极限为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的**导数**(derivative). 记作 $f'(x_0)$ 或 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\quad \text{或}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}.$$

例 2.1.2 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

定义 2.1.3 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的左(右)邻域上有定义，若当 x 由左(右)侧趋于 x_0 时，极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$存在，则称此极限为 $f(x)$

在 x_0 点的左(右)导数,统称为**单侧导数**(one-sided derivatives).记作$f'_-(x_0)(f'_+(x_0))$,即

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)\left(\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)\right).$$

例如,设 $f(x)=|x|$,则有 $f'_-(0)=-1$;$f'_+(0)=1$.

定理 2.1.4 函数 $f(x)$在 x_0 点可导的充要条件是:$f'_-(x_0)$和 $f'_+(x_0)$存在且相等.

定义 2.1.5 若函数 $y=f(x)$在区间 I 上每一点都可导(在端点为单侧可导),则相应得到 $f(x)$在区间 I 上各点导数值的变化函数,称它为 $f(x)$的**导函数**(derived function).记作 $f'(x)$或$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

导数的物理意义 由于$\frac{\Delta y}{\Delta x}$从物理上讲是表示了物理量 y 关于物理量 x 在某点附近小范围上的平均变化率,因此导数就应理解为物理量 y 关于物理量 x 在一点处的变化率.特别地,当 x 为时间变量时,导数就是函数的瞬时变化率(instantaneous rate of change).例如运动质点位移函数 $s(t)$的导函数$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,应该是速度函数 $v(t)$;而 $v(t)$的导函数$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,则是加速度函数 $a(t)$.又如,若以 $m=m(x)$表示细杆质量沿轴线方向的分布函数,则细杆各点处的线密度函数应为 $\rho(x)=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$.

导数的几何意义 参见图 2.1,设曲线 L 为函数 $y=f(x)$的图象,则导数 $f'(x_0)$为曲线 L 在点 $P_0(x_0,y_0)$处切线 T 的斜率,即

$$f'(x_0)=\tan\alpha.$$

式中 α 为切线 T 与 x 轴的夹角(按 x 轴正方向反时针旋转至 T).当 $f'(x_0)=\pm\infty$时,切线与 y 轴平行.

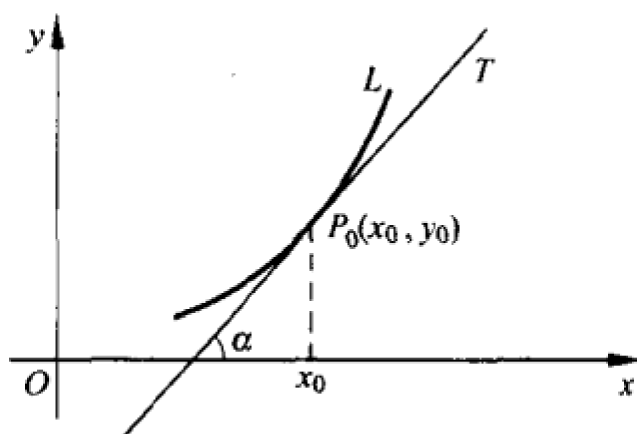


图 2.1　导数的几何意义

定义 2.1.6　若函数 $y=f(x)$在点 x 处的增量 Δy 可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数,$o(\Delta x)$是 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小量.则称函数 $y=f(x)$在点 x **可微**(differentiable).并将 $A\Delta x$ 称为函数 f 在点 x 处的**微分**(differential),记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$,即 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\Delta x$.

由于自变量的增量与其微分一致,所以通常将 Δx 写成 $\mathrm{d}x$,因此有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}f(x)=A\mathrm{d}x.$$

微分的几何意义　常说微分是增量的线性主部,这里有两层含意.其一是因为微分与 Δx 成线性关系,几何上对应着切线的增量(见图 2.2);其二是因为微分是增量的一种很好的近似值,误差为 Δx 的高阶无穷小(见图 2.2).

2.1.2　连续、可导、可微间的相互关系

定理 2.1.7　若函数 $y=f(x)$在点 x 处可微,则函数在该点也一定可导;反之,若函数在 x 点可导,那么在该点函数也一定可

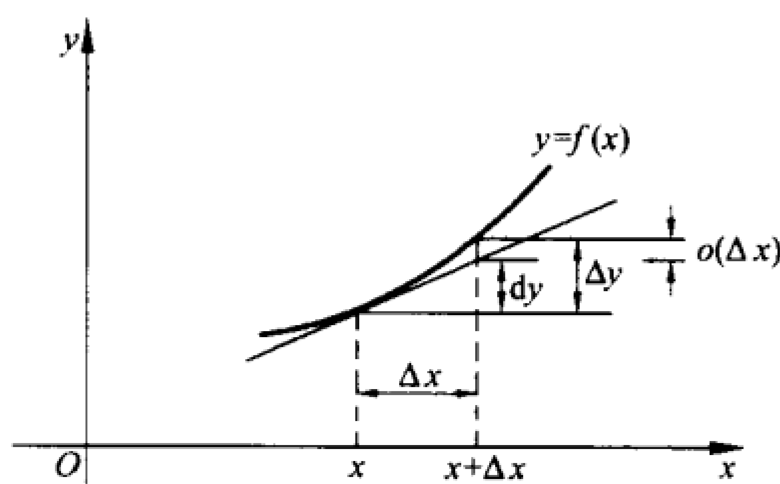


图 2.2 微分的几何意义

微.即可导与可微互为充要条件,且有

$$dy = f'(x)dx.$$

定理 2.1.8 若函数 $f(x)$在点 x 处可导(微),则函数在该点必定连续.

注意,本定理的逆命题不一定成立.即连续不一定可导(微).

定理 2.1.9 导函数不可能有第一类间断.

2.1.3 微分法则及基本公式

法则 2.1.10 微分法则(differentiation rules)

(1) **线性性质、乘法和除法规则**(linearity properties, product and quotient rules) 设 $u(x), v(x), \cdots, w(x)$可微,c, c_1, c_2 均为常数,则

$$(c)'=0, \qquad d(c)=0,$$

$$(c_1 u \pm c_2 v)' = c_1 u' \pm c_2 v', \qquad d(c_1 u \pm c_2 v) = c_1 du \pm c_2 dv,$$

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad d(uv) = vdu + udv,$$

$$(uv\cdots w)' = (u'v\cdots w) + (uv'\cdots w) + \cdots + (uv\cdots w'), \qquad d(uv\cdots w) = (du)v\cdots w + u(dv)\cdots w + \cdots + uv\cdots(dw),$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0), \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

(2) **复合函数微分法的链式法则**(chain rule for differetiating composite function)及一阶微分形式不变性(invariance of the form of first order differential)　设函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 可微,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 可微,且

$$[f(\varphi(x))]'=f'(u)\varphi'(x) \quad \text{或记作} \quad y'_x=y'_u u'_x,$$

从而有一阶微分形式不变性

$$\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u,$$

其中 u 可为自变量,亦可为函数.

(3) **反函数微分法**(differentiation of inverse function)　若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内严格单调、可微,且 $f'(x)\neq 0$,则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$(或 $y=f^{-1}(x)$)可微,且

$$x'_y=\frac{1}{y'_x} \quad \text{或} \quad (f^{-1}(x))'_x=\frac{1}{(f^{-1}(y))'_y}.$$

(4) **隐函数微分法**(implicit differentiation)　设函数 $y(x)$ 由方程

$$F(x,y)=0$$

确定.其中二元连续函数 $F(x,y)$ 有连续偏导数,且 $F'_y(x,y)\neq 0$.则

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

(5) **对数微分法**(logarithmic differentiation)

对于某些类型函数可以利用对数的性质来简化导数计算.例如,求 $y=x^{x^x}(x>0)$ 的导函数 y'_x.两边取对数得

$$\ln y=x^x\ln x.$$

再两边对 x 求导得

$$\frac{y'_x}{y}=(x^x)'\ln x+x^{x-1}.$$

设 $z=x^x$,则 $\ln z=x\ln x$,两边对 x 求导得

$$\frac{z_x'}{z}=\ln x+1,\quad 即\quad (x^x)'=x^x(\ln x+1).$$

代入前式得

$$y_x'=x^x\cdot x^{x^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right).$$

(6) **参变量微分法**(parametric differentiation)

设函数 $y(x)$是由参变量方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha<t<\beta$$

确定,其中 $\varphi(t)$,$\psi(t)$为可微函数,且 $\varphi'(t)\neq 0$. 则函数 $y(x)$的导函数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$仍可由参量方程给出:

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\end{cases}\quad \alpha<t<\beta.$$

例如对于由极坐标形式给出的曲线 $\rho=\rho(\varphi)$,可以通过参量方程

$$\begin{cases}x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi\end{cases}$$

来计算曲线之切线的斜率 y_x'.

公式 2.1.11 基本微分公式(standard differentiation formulas)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)]^\alpha=\alpha u^{\alpha-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ (α 为任意实数),

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin u(x)=\cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos u(x)=-\sin u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan u(x)=\sec^2 u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot u(x)=-\csc^2 u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec u(x)=\tan u\sec u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc u(x)=-\cot u\csc u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Arcsin}\,u(x)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Arccos}\,u(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

$$\frac{d}{dx}\text{Arctan } u(x)=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\text{Arccot } u(x)=\frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\text{Arcsec } u(x)=\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\text{Arccsc } u(x)=\frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}e^{u(x)}=e^u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}a^{u(x)}=a^u\ln a\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\ln u(x)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}u(x)^{v(x)}=u^v\left(\ln u\frac{dv}{dx}+\frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right),$$

$$\frac{d}{dx}\sinh u(x)=\cosh u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\cosh u(x)=\sinh u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\tanh u(x)=\text{sech}^2 u\frac{du}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\coth u(x)=-\text{csch}^2 u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\text{sech } u(x)=-\tanh u\,\text{sech } u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\text{csch } u(x)=-\coth u\,\text{csch } u\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\text{Arsinh } u(x)=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d}{dx}\text{Arcosh } u(x)=\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}\ (u>1),$$

$$\frac{d}{dx}\text{Artanh } u(x)=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}\ (|u|<1),$$

$$\frac{d}{dx}\text{Arcoth } u(x)=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}\ (|u|>1).$$

2.1.4 高阶导数与高阶微分

定义 2.1.12 若函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 可导，则其导函数称为函数 $y=f(x)$ 的**二阶导函数**，记作

$$f''(x) \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

若 $f''(x)$ 可导，其导函数称为三阶导函数. 依此类推，有四阶、五阶

导函数等. 记作 $f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \cdots$ 或 $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \frac{d^5y}{dx^5}, \cdots$. 一般地,函数 $f(x)$ 的 **n 阶导函数** $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 是由 $(n-1)$ 阶导函数求导所得,即

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' \quad \text{或} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

对应高阶导数的存在,相应有高阶微分(higher differentiation) $d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n \ (n = 2, 3, \cdots)$. 值得注意的是,高阶微分不具有形式不变性,即式中的 x 一般为自变量,不能是函数.

公式 2.1.13　莱布尼茨(Leibniz)公式

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = f \cdot \frac{d^ng}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{df}{dx}\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\frac{dg}{dx} + \frac{d^nf}{dx^n}g.$$

$$d^n(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)) = \left[\sum_{\sum_{i=1}^{m} k_i = n, k_i} \frac{n!}{k_1!\cdots k_m!} f_1^{(k_1)} f_2^{(k_2)} \cdots f_m^{(k_m)}\right] dx^n.$$

公式 2.1.14　参数方程所表示函数的二阶导数

设函数 $y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha < t < \beta$$

确定,则 y 对 x 的二阶导函数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 仍由参数方程给出:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \end{cases}$$

公式 2.1.15 若干初等函数的高阶导数

(1) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(a+bx)^\alpha=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)b^n(a+bx)^{\alpha-n}, & \alpha\text{ 为任意实数},\\ n!\ b^n, & \alpha=n.\end{cases}$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{a+bx}\right)=\frac{(-1)^n n!\ b^n}{(a+bx)^{n+1}}.$$

(3) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)=\frac{(-1)^n(2n-1)!!\ b^n}{2^n(a+bx)^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+bx}},$$

式中 $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$.

(4) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)=a_0n!$$

(5) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{(-1)^{n-1}n!\ c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}.$$

(6) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{ax})=a^n\mathrm{e}^{ax}.$$

(7) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\ln x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

(8) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sin bx)=b^n\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(9) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cos bx)=b^n\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right).$$

(10) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{ax}\sin bx)=r^n\mathrm{e}^{ax}\sin(bx+n\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{ax}\cos bx)=r^n\mathrm{e}^{ax}\cos(bx+n\theta),$$

式中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\theta=\frac{b}{r}$, $\cos\theta=\frac{a}{r}$.

(11) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

(12) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\sinh x)=\begin{cases}\cosh x, & n\text{ 为奇},\\ \sinh x, & n\text{ 为偶}.\end{cases}$$

(13) $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cosh x)=\begin{cases}\sinh x, & n\text{ 为奇},\\ \cosh x, & n\text{ 为偶}.\end{cases}$

例 2.1.16 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则 $f^{(n)}_{(0)}=0\ (n=1,2,3,\cdots)$.

公式 2.1.17 导数的近似计算(approximation of derivatives) 设 $f^{(n)}(x)$连续,则

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

其中 $\Delta^n f(x)$为 n 阶差分(difference)

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(x+(n-i)\Delta x).$$

因此导数可以用差商(difference quotient)来近似,即

$$f^{(k)}(x)\approx\frac{\Delta^k f(x)}{\Delta x^k},\qquad k=1,2,\cdots,n.$$

2.2 微分学基本定理

2.2.1 Fermat 定理

定理 2.2.1 Fermat(费马)定理 如图 2.3 所示,若:

(1) 函数 $f(x)$在点 x_0 可微;

(2) $f(x_0)$为 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域内的最大值(或最小值). 则

$$f'(x_0)=0.$$

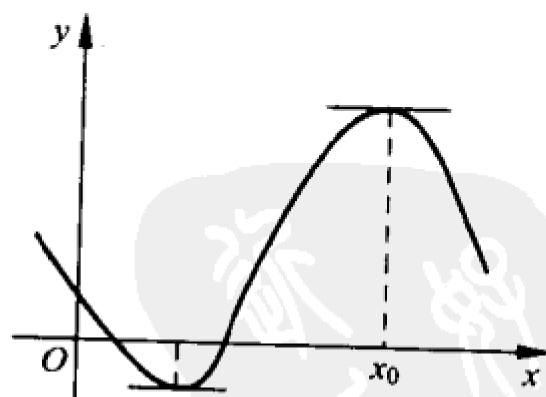


图 2.3 Fermat 定理示意图

2.2.2 微分中值定理

定理 2.2.2 Darboux(达布)定理

设函数 $f(x)$在$[a,b]$内可导,μ 为介于 $f'_+(a)$与 $f'_-(b)$之间的某一值. 则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\mu.$$

定理 2.2.3 Rolle(罗尔)定理 若函数 $f(x)$满足：

(1) 在$[a,b]$上连续；

(2) 在(a,b)内可导；

(3) $f(a)=f(b)$.

则有 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$,即曲线必有水平切线(见图 2.4).

例 2.2.4 n 次勒让德多项式(Legendre polynomial)

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

的 n 个根为互不相同的实根,且都在$(-1,1)$内.

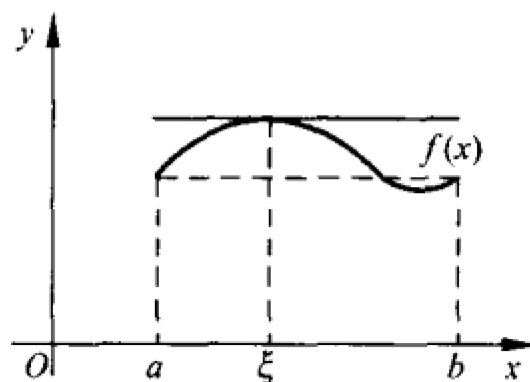


图 2.4 Rolle 定理示意图

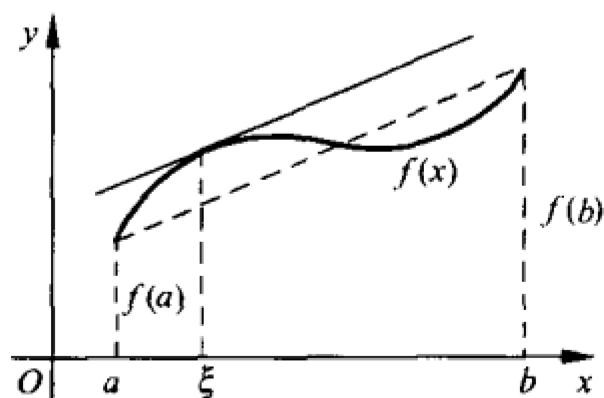


图 2.5 Lagrange 定理示意图

定理 2.2.5 Lagrange(拉格朗日)定理 若函数 $f(x)$满足：

(1) 在$[a,b]$上连续；

(2) 在(a,b)内可导.

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即(a,b)内至少有一点处曲线的切线是与曲线两个端点的连线互相平行(见图 2.5). 通常称本定理为**微分中值定理**(mean value theorem for derivatives).

显然,该定理是 Rolle 定理的推广.

公式 2.2.6 有限增量公式(finite increment formula) 将

微分中值定理用于函数增量，可得下列有限增量公式：设 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，则

$$\begin{aligned}\Delta y&=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\\&=f'(\xi)\Delta x\ (\xi \text{ 在 } x \text{ 与 } x+\Delta x \text{ 之间})\\&=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x\ (0<\theta<1).\end{aligned}$$

推论 2.2.7 若在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv 0$，则在 (a,b) 内 $f(x)\equiv c$（常数）.

推论 2.2.8 若在 (a,b) 内 $f'(x)\equiv g'(x)$，则在 (a,b) 内 $f(x)-g(x)\equiv C$（常数）.

定义 2.2.9 如果存在常数 L，使对于区间 I 上的一切 x_1,x_2 有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant L|x_2-x_1|.$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 **Lipschitz（利普希茨）条件**（Lipschitz condition），或者说 $f(x)$ 在 I 上 **Lipschitz 连续**（Lipschitz continuity）.

推论 2.2.10 若 $f'(x)$ 在区间 I 上有界，则 $f(x)$ 在 I 上 Lipschitz 连续和一致连续（定义 1.4.13）.

定理 2.2.11 Cauchy（柯西）定理 若：

(1) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(2) f 和 g 在 (a,b) 内可导；

(3) 在 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$.

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

显然，当 $g(x)=x$ 时，即为 Lagrange 定理. 因此，Cauchy 定理又称**广义微分中值定理**（generalized mean-value theorem for derivatives）.

2.2.3 Taylor 公式

定义 2.2.12 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 有 n 阶导数，则称

$$P_n(x-x_0)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为函数 $f(x)$在点 x_0 的 n 阶 **Taylor(泰勒)多项式**(Taylor polynomial).

定理 2.2.13 Taylor 展开 设:

(1) $f(x),f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x)$在闭区间$[x_0-h,x_0+h]$上连续;

(2) 在开区间(x_0-h,x_0+h)内,$f(x)$有$(n+1)$阶导数.

则在 x_0 的邻域内有 **Taylor 公式**

$$f(x)=P_n(x-x_0)+R_n(x-x_0)$$

成立. 其中 $P_n(x-x_0)$为 Taylor 多项式,$R_n(x-x_0)$为 **Taylor 余项**(Taylor remainder). 余项按不同类型可分别表示为:

$$R_n(x-x_0)=o((x-x_0)^n)\quad(x\to x_0)\qquad\text{(Peano(佩亚诺)型)}$$

$$R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\qquad(\xi\text{在}x\text{与}x_0\text{之间})$$

$$\text{或}\quad=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)\quad\text{(Lagrange 型)}$$

$$R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)\quad\text{(Cauchy 型)}$$

$$R_n(x-x_0)=\frac{f^{(n-1)}[x_0+\theta(x-x_0)]}{n!\ p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}$$

$$(0<\theta<1)\quad\text{(普遍型)}$$

(当式中 $p=n+1$ 时,即为 Lagrange 型;$p=1$ 时,即为 Cauchy 型.)

$$R_n(x-x_0)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t\quad\text{(积分型)}.$$

公式 2.2.14 Maclaurin(麦克劳林)公式　函数 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点的 Taylor 公式通常称为 Maclaurin 公式(Maclaurin formula),即

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad 0<\theta<1.$$

2.3 导数与微分的应用

定理 2.3.1 函数增减性的判别　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导,则 $f(x)$ 在 (a,b) 上递增(递减)的充要条件是:

$$f'(x)\geqslant 0\quad (f'(x)\leqslant 0),\qquad x\in(a,b).$$

特别地,若有

$$f'(x)>0\quad (f'(x)<0),\qquad x\in(a,b),$$

则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上严格递增(递减).

定义 2.3.2 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数,x_0 是区间 I 上的一个点,若对于一切 $x\in I$ 有

$$f(x_0)\geqslant f(x)\quad 或\quad f(x_0)\leqslant f(x),$$

则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大(小)值**(absolution maximum (minimum)).

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域上满足上述不等式,则称 $f(x_0)$ 在 x_0 取得**极大(小)值 $f(x_0)$**,并称 x_0 为**极大(小)值点**(maximum (minimum)).

定义 2.3.3 使导数为 0 的点称为函数的驻点(stationary point (or critical point)).

定理 2.3.4 **极值的必要条件**(necessary condition for extrema)　若 $f(x)$ 在点 x_0 可微,则 $f(x)$ 在点 x_0 取得极值的必要条件

是：$f'(x_0)=0$，即 x_0 为函数 $f(x)$的驻点.

定理 2.3.5　极值的第一充分条件(first test for extrema)　设函数 $f(x)$在 x_0 点连续，且在 x_0 点的某邻域内(x_0 可以除外)可微. 若 $f'(x)$在 x_0 点左右邻域上符号相反，则 $f(x)$在 x_0 点取得极值，且当左邻域上导数大于 0 时取极大值，小于 0 时取极小值.

定理 2.3.6　极值的第二充分条件(second test for extrema)　设 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内可微，且 $f'(x_0)=0$. 若 $f''(x_0)$存在并不为 0，则 $f(x)$在 x_0 点取得极值. 当 $f''(x_0)<0$ 时为极大值，$f''(x_0)>0$ 时为极小值.

定理 2.3.7　极值的第三充分条件(third test for extrema)　设函数 $f(x)$在 x_0 点的某邻域内任意次可微. 若在 x_0 的各阶导数值中第一个不为 0 的是偶数阶，则函数在点 x_0 处取得极值. 且该导数大于 0 时为极小，小于 0 时为极大. 若这不为零的导数值是奇数阶导数，则 x_0 不是极值点.

例 2.3.8　最大(小)值的求法(absolute maximum (minimum) finding)　函数 $f(x)$在区间 I 上的最大(小)值，可以从极值、区间 I 之端点处的函数值及函数和导函数间断点处的函数值中比较大小而得到.

例 2.3.9　反射定律(reflective law)　如图 2.6 所示，A、B 是镜面 Ox 一侧的两点. 光线由 A 入射，反射至 B. 求反射点 P.

解　根据一个重要的光学原理——Fermat 最短时间原理，光线通过的路线决定于下述性质：在给定条件下，光线从点 A 到 B 所需时间必须是最短的. 因而路径也是最短的. 设点 P 位于坐标 x 处(见图 2.6). 则距离由下式给出

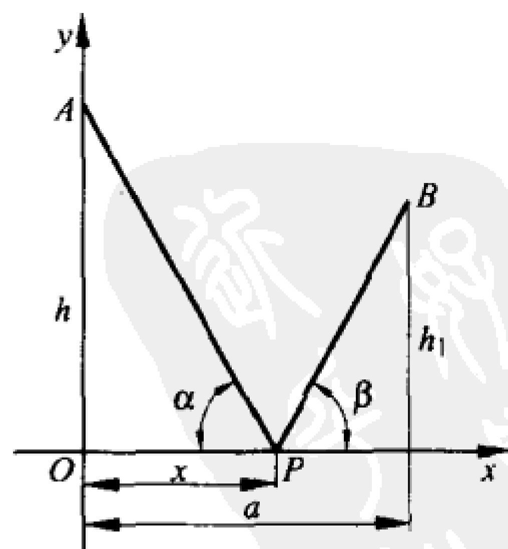


图 2.6　反射定律

$$f(x)=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(x-a)^2+h_1},$$

且可以算出

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}+\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+h_1^2}},$$

$$f''(x)=\frac{h^2}{\sqrt{(x^2+h^2)^3}}+\frac{h_1^2}{\sqrt{[(x-a)^2+h_1^2]^3}}.$$

由于 $x\to\infty$ 时，距离 $f(x)$ 也无限增大，因而反射点 P 必定满足条件

$$f'(x)=0 \quad 即 \quad \cos\alpha=\cos\beta.$$

另外，考虑到 $f''>0$，故可进一步断定，当入射角 α 与反射角 β 相等时确为最短路径（定理 2.3.6）.

例 2.3.10 折射定律（refractive law） 如图 2.7 所示，设 x 轴为两种介质的分界面，在其两侧分别给定点 A 和点 B. 如果光速在界面一侧的介质内为 C_1，另一侧为 C_2. 问光线由 A 至 B 应通过怎样的路径?

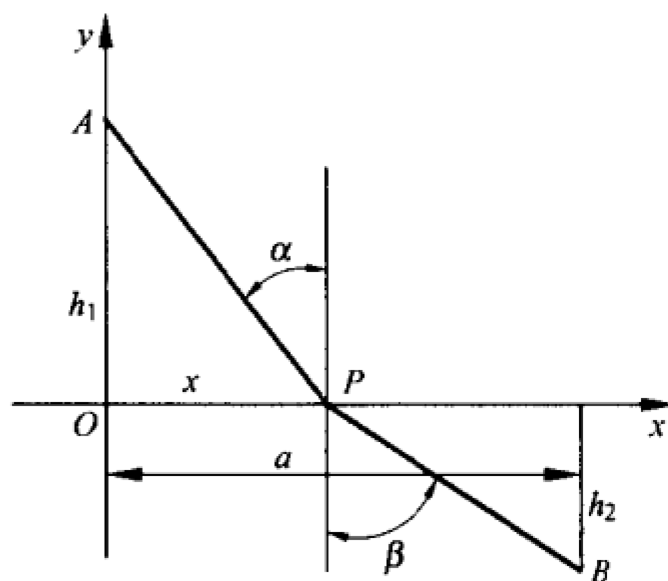


图 2.7 折射定律

解 同样根据 Fermat 定理，光线应走使时间最短的路径. 设折射点 p 位于横轴上坐标 x 处（见图 2.7），则光线通过这段路径所需时间为

$$f(x)=\frac{1}{C_1}\sqrt{h_1^2+x^2}+\frac{1}{C_2}\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}.$$

同时可算出

$$f'(x)=\frac{1}{C_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}}+\frac{1}{C_2}\frac{x-a}{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}},$$

$$f''(x)=\frac{1}{C_1}\frac{h_1^2}{\sqrt{(h_1^2+x^2)^3}}+\frac{1}{C_2}\frac{h_2^2}{\sqrt{[h_2^2+(a-x)^2]^3}}.$$

不难看出 $f''>0$，而且方程 $f'(x)=0$ 等价于条件

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{C_1}{C_2}.$$

这就是著名的光线折射定律.

定义 2.3.11 曲线的凹凸性(concavity (convexity) of a curve) 设函数$y=f(x)$在某区段内可微. 如图 2.8 所示，若曲线 $y=f(x)$位于曲线上任一点的切线上(下)方，则称曲线在该区段上为**凹弧**(**凸弧**)，或**上凹弧**(concave up ward)(**下凹弧**(concave down ward)).

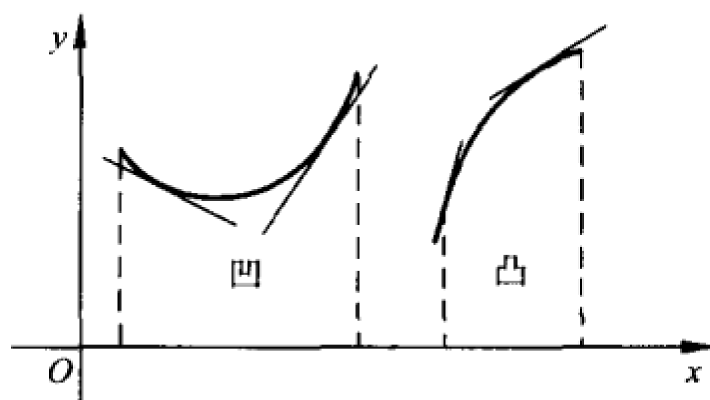


图 2.8 曲线的凹凸性

定理 2.3.12 设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可微，则曲线 $y=f(x)$在区间(a,b)上为凹(凸)弧的充要条件是：在(a,b)内 $f'(x)$是增(减)函数.

定理 2.3.13 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可微，则曲线 $y=f(x)$在(a,b)上为凹(凸)弧的充要条件是：在(a,b)内$f''(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$.

定义 2.3.14 如图 2.9 所示，曲线上的凹弧与凸弧之分界点 P 称为曲线的**拐点**(inflection point)，拐点处的切线与曲线相交.

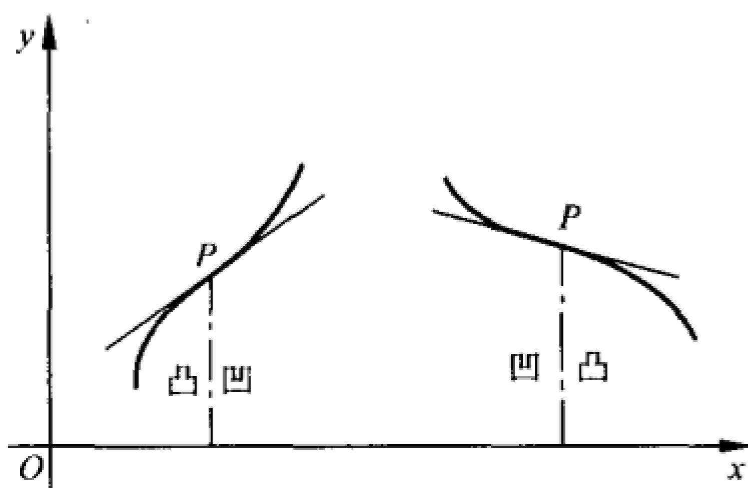


图 2.9 拐点

定义 2.3.15 若动点沿曲线 C 无限远离原点时，动点与某直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的一条**渐近线**(asymptotic line). 按渐近线的倾斜方向又可分为斜渐近线、水平渐近线及垂直渐近线.

渐近线的求法(finding asymptotic line)

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \infty$，则 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条垂直渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ 或 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (b 为常数)，则 $y = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线.

(3) 若 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \left(或 \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \right)$，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$ (或 $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = b$)，则直线 $y = kx + b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

函数作图(graphing of functions) 描绘函数图形的过程也就是研究函数特性的过程. 其一般步骤为：

(1) 弄清函数的定义域、值域、零点、间断点、奇偶性、对称性和周期性.

(2) 研究函数的增减、极值、驻点.

(3) 研究曲线的凹凸性及拐点.

(4) 研究曲线是否存在各类渐近线，并掌握 $x \to \pm\infty$ 时函数变化趋势.

(5) 根据以上研究结果，首先找到关键点的坐标，然后逐段描出曲线.

例 2.3.16 作函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的图形.

解 按上面所述步骤分别讨论如下：

(1) 定义域：$x\neq 1$；值域：$(-\infty,+\infty)$；零点：$f(0)=0$；间断点：$x=1$.

(2) $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$；驻点：$f'(0)=0$，$f'(3)=0$；在 $(-\infty,1)$ 及 $(3,+\infty)$ 上函数递增(因为 $f'>0$)，而在 $(1,3)$ 上函数递减(因为 $f'<0$)；函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处取得极小值 $f(3)=\dfrac{27}{4}$.

(3) $f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$；拐点：$(0,0)$；曲线在 $(-\infty,0)$ 上为凸的，在 $(0,+\infty)$ 上为凹的.

(4) $x=1$ 为垂直渐近线 $\left(\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty\right)$，当 $x\to\pm\infty$ 时曲线有共同的斜渐近线 $y=x+2$.

(5) 描图如图 2.10 所示.

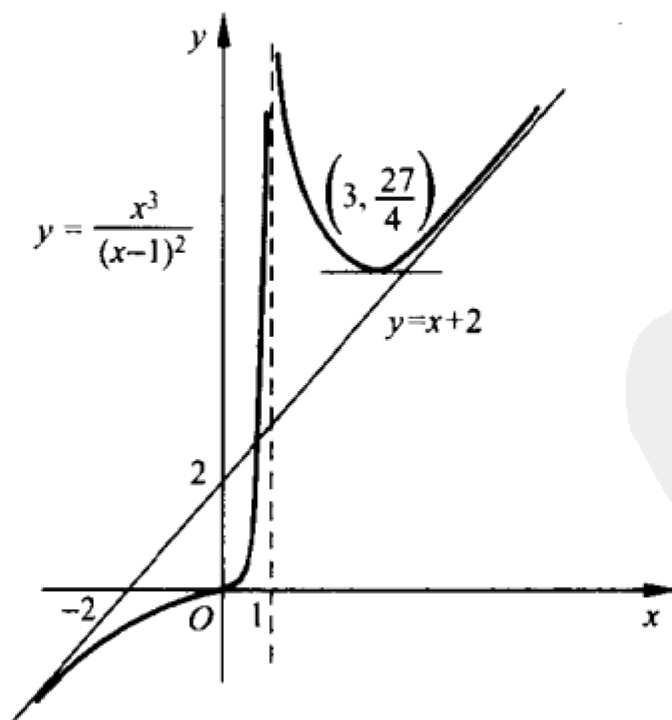


图 2.10 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的图形

例 2.3.17 函数 $y(x)$由参数方程给出

$$\begin{cases} y = t(t^2 - 2), \\ x = t^2 - 2. \end{cases}$$

作其图形.

解 仍按函数作图的几个步骤讨论如下:

(1) 当参数 t 取任何实数时,函数定义域为 $-2 \leqslant x$;值域为 $(-\infty, +\infty)$;图形关于 x 轴对称,只需讨论 $t \geqslant 0$;有两个零点:对应 $t=0$ 为$(-2,0)$,对应 $t=\sqrt{2}$为$(0,0)$.

(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3t^2-2}{2t}, \\ x = t^2 - 2. \end{cases}$

可以看出,当 $0 < t < \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\text{即} -2 < x < -\dfrac{4}{3}\right)$时,函数递减;当 $t > \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\text{即 } x > -\dfrac{4}{3}\right)$时,函数递增. 函数在 $t = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\left(\text{即 } x = -\dfrac{4}{3}\right)$处取得极小值$\left(-\dfrac{4\sqrt{6}}{9}\right)$.

(3) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{3t^2+2}{4t^3}, \\ x = t^2 - 2. \end{cases}$

显然,当 $t > 0$ 时有$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} > 0$,所以曲线是凹的.

(4) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (t \to +\infty)}} y = +\infty$但无渐近线.

(5) 描图如图 2.11 所示.

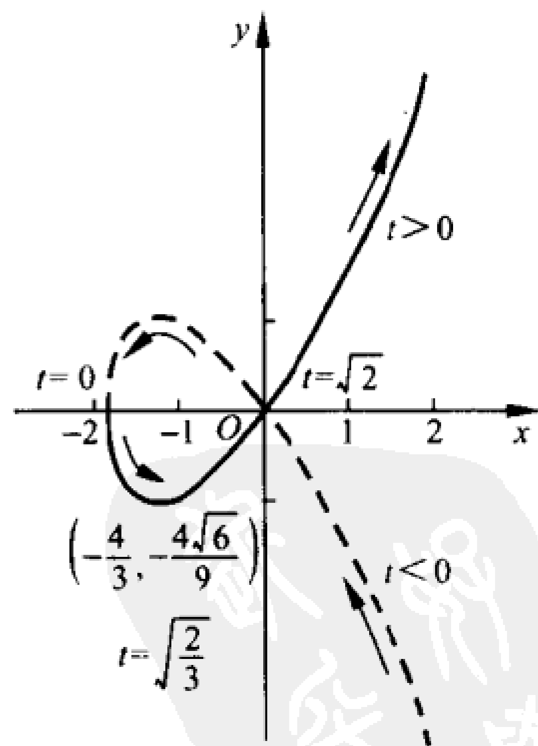


图 2.11 参数方程 $x=t^2-2$, $y=t(t^2-2)$的图形

公式 2.3.18 **弧微分公式**(formula for differential of an arc length)

弧微分计算公式一般可表示为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.$$

对于不同的函数表示法，又分别有：

(1) 当 $y=f(x)$时，$ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$；

(2) 当 $x=g(y)$时，$ds=\sqrt{1+[g'(y)]^2}\ dy$；

(3) 当 $x=x(t)$，$y=y(t)$时，$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\ dt$；

(4) 当 $\rho=\rho(\varphi)$(极坐标)时，$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\ d\varphi$.

定义 2.3.19 如图 2.12，设 Δs 为曲线 L 上包含端点 P 的某个小弧段的弧长，$\Delta\alpha$ 为弧段两个端点处切线之夹角. 称 $\bar{\kappa}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 为该弧段的**平均曲率**(mean curvature). 若极限 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\bar{\kappa}=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ 存在，则称此极限值为曲线 L 在 P 点的**曲率**(curvature). 记作

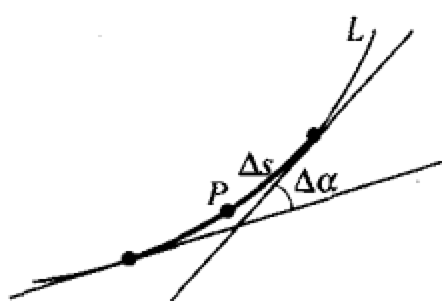


图 2.12 曲率定义

$$\kappa=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

公式 2.3.20 曲率公式(curvature formula) 下面为曲线在不同表达形式下的曲率计算公式：

(1) 当曲线 L 由 $y=f(x)$表示时，有

$$\kappa=\frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}}.$$

(2) 当曲线 L 由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$表示时，有

$$\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.$$

(3) 当曲线 L 由极坐标方程 $\rho=\rho(\varphi)$表示时，有

$$\kappa=\frac{|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}.$$

定义 2.3.21 曲线 $L(y=y(x))$ 在点 $P(x,y)$ 处的曲率的倒数称为曲线在该点处的**曲率半径**(radius of curvature). 即

$$R=\frac{1}{\kappa}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|},\qquad \kappa\neq 0.$$

如图 2.13 所示,若以点 P 处的曲率半径作圆与曲线 L 在 P 点相切,且使切圆和曲线位于切线同侧. 则称此切圆为曲线 L 在点 P 处的**密切圆**(osculating circle). 相应的圆心 (ξ,η) 称为曲线 L 在点 P 的**曲率中心**(center of curvature). 且有

$$\xi=x-y'\frac{1+y'^2}{y''},\qquad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

定义 2.3.22 如图 2.14 所示,设曲线 L 的曲率中心轨迹为曲线 L^*,则 L^* 叫做 L 的**渐屈线**(evolute). 反之,L 叫做 L^* 的**渐伸线**(involute).

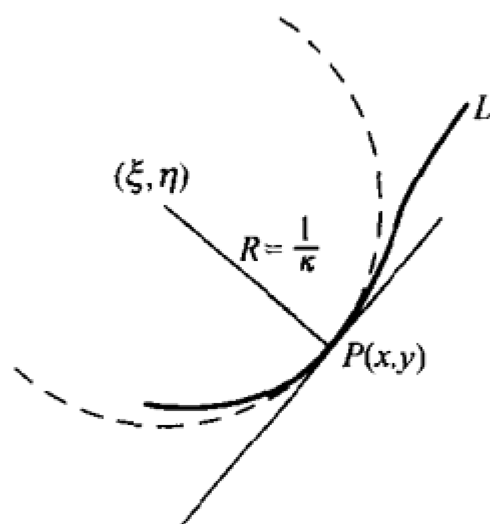


图 2.13 曲率中心与密切圆

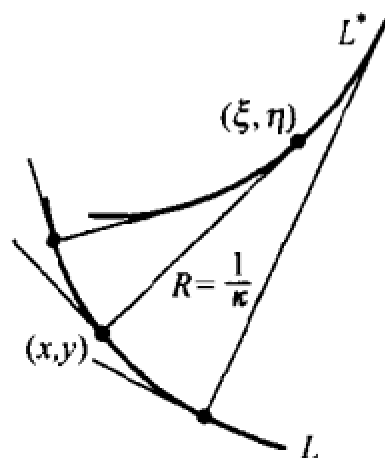


图 2.14 渐屈线与渐伸线

3 一元函数积分学

3.1 不定积分

3.1.1 不定积分概念

定义 3.1.1 若在区间 I 上

$$F'(x)=f(x),$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数**(primitive antiderivative). $f(x)$ 在区间 I 上的原函数全体称为 $f(x)$ 在 I 上的**不定积分**(indefinite integral),记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3.1.2 若在区间 I 上,$F(x)$是 $f(x)$的一个原函数. 则 $F(x)+c$ 也是 $f(x)$的原函数,其中 c 是任意常数. 反之,在区间 I 上 $f(x)$的任何原函数均可表成这种形式,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+\mathrm{c}.$$

定理 3.1.3 区间 I 上的连续函数必有原函数(或不定积分).

不定积分性质(properties of the indefinite integral)

(1) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+c$ 或 $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+c$.

3.1.2 积分法

(1) $\int[af(x)\pm bg(x)]\mathrm{d}x=a\int f(x)\mathrm{d}x\pm b\int g(x)\mathrm{d}x$，其中 a,b 为常数.

(2) 配元法(replacement of variable)

若 $\int f(t)\mathrm{d}t=F(t)+c$，则 $\int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)=F(\varphi(x))+c$.

例如 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\int\left[1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right]\mathrm{d}x=x-\int\frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x}=[x-\ln(1+\mathrm{e}^x)]+c$.

(3) 积分的**变量置换法**(integration by substitution)

选取适当的置换函数 $x=\varphi(t)$，则有

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x&=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t=\int g(t)\mathrm{d}t\\&=G(t)+c=G(\varphi^{-1}(x))+c.\end{aligned}$$

对于含二项式 a^2-x^2,x^2+a^2 和 x^2-a^2 的被积函数，通常可以利用关系式

$$\sin^2t+\cos^2t=1,\qquad 1+\tan^2t=\sec^2t=\frac{1}{\cos^2t},$$

$$\cosh^2t-\sinh^2t=1,\qquad 1-\tanh^2t=\frac{1}{\cosh^2t}$$

等作适当的三角代换或双曲代换.

若被积函数中包含单个的无理式 $(ax+b)^{p/q}$，则可用置换 $t^q=ax+b$.

例如：

① 求 $\int\frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$. 可设 $x=2\sin t$(于是 $\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$)，则

$$\int\frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\sec^2t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\tan t+c=\frac{x}{4(4-x^2)^{1/2}}+c.$$

② 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$. 可设 $x=a\cosh t$（从而 $\mathrm{d}x=a\sinh t\,\mathrm{d}t$，$\sqrt{x^2-a^2}=a\sinh t$），则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int \mathrm{d}t=t+c=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+c,$$

③ 求 $\int \frac{x-2}{(3x-1)^{2/3}}\mathrm{d}x$. 可设 $3x-1=t^3$（从而 $3\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$），则

$$\int \frac{x-2}{(3x-1)^{2/3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int (t^3-5)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\frac{t^4}{4}-5t\right)+c$$

$$=\frac{1}{12}(3x-1)^{4/3}-\frac{5}{3}(3x-1)^{1/3}+c.$$

（4）**分部积分法**(integration by parts)

设 $u(x)$，$v(x)$ 有连续导函数 $u'(x)$，$v'(x)$，则有分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

或

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

重复使用这一公式，可以进一步得到推广公式

$$\begin{aligned}\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x &= \int u\mathrm{d}v^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}\mathrm{d}u \\ &= uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\mathrm{d}x \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \int u''v^{(n-1)}\mathrm{d}x = \cdots \\ &= uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n u^{(n)}v \\ &\quad + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例如：

① $\int x^3\ln^2 x\mathrm{d}x=\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}\right)=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{2}\int x^3\ln x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^2 x-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{x^4}{4}\left(\ln^2 x-\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{8}\right)+c.$$

② $J_n=\int \sin^n x\mathrm{d}x=-\int \sin^{n-1} x\mathrm{d}\cos x$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x-(n-1)J_n,$$

因而得递归表达式

$$J_n=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}J_{n-2},\qquad n\text{ 为正整数.}$$

(5) **有理函数的部分分式积分法**(integration of rational functions by partial fractions)

理论上，任何有理分式通过长除(long division)可以写成一个多项式和一个有理真分式(proper rational fraction)的和. 而后者又可展成部分分式，即，如果$\frac{P(x)}{Q(x)}$是一个有理真分式(设 $Q(x)$ 为 n 次多项式，$P(x)$ 为低于 n 次的多项式)，则 $Q(x)$ 可被因式分解为 n 个线性因子(实的或复的)，其中某些可能重复. 在部分分式展开式中，对应单因子$(x-r_j)$有相应的单项$\frac{A_j}{x-r_j}$，且

$$A_j=\lim_{x\to r_j}\frac{(x-r_j)P(x)}{Q(x)}\quad\text{或}\quad A_j=\frac{P(r_j)}{Q'(r_j)},$$

而对应 s 重因子$(x-r_k)^s$，则为 s 项之和

$$\frac{B_s}{(x-r_k)^s}+\frac{B_{s-1}}{(x-r_k)^{s-1}}+\cdots+\frac{B_2}{(x-r_k)^2}+\frac{B_1}{(x-r_k)}$$

且

$$B_s=\lim_{x\to r_k}\frac{(x-r_k)^s P(x)}{Q(x)},$$

$$B_i=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{x\to r_k}\left\{\frac{\mathrm{d}^{s-1}}{\mathrm{d}x^{s-1}}\left[\frac{(x-r_k)^s P(x)}{Q(x)}\right]\right\},\quad i=1,2,\cdots,s-1.$$

多项式与部分分式的积分是很容易的,因而任何有理函数的积分也不成问题.

例如:

$$\int\frac{3x^4+x^3+20x^2+3x+31}{(x+1)(x^2+4)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\left[\frac{2}{x+1}+\frac{16-\mathrm{i}}{32(x+2\mathrm{i})}+\frac{1}{16(x+2\mathrm{i})^2}+\frac{16+\mathrm{i}}{32(x-2\mathrm{i})}+\frac{1}{16(x-2\mathrm{i})^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int\left[\frac{2}{x+1}+\frac{x-\frac{1}{8}}{x^2+4}+\frac{1}{16(x+2\mathrm{i})^2}+\frac{1}{16(x-2\mathrm{i})^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|-\frac{1}{16}\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{2}-\frac{1}{16(x+2\mathrm{i})}$$

$$-\frac{1}{16(x-2\mathrm{i})}+c$$

$$=\ln[(x+1)^2(x^2+4)^{1/2}]-\frac{1}{16}\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{2}-\frac{x}{8(x^2+4)}+c.$$

在部分分式展开中也可以避免出现复数.这时展开式中将有下列四种类型的分式:

$$\frac{A}{x-a},\quad\frac{A}{(x-a)^k},\quad\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m},$$

其中 A,M,N,a,p,q 都是实数,且 x^2+px+q 在实数范围内不能再分解因式.

对于这四类分式,前两种的积分是显而易见的,后两种的积分则可以通过变量置换 $x+\frac{p}{2}=t$ 来计算.

(6) Ostrogradsky(奥斯特罗格拉茨基)方法　为了简化有理真

分式的积分,可以用纯代数方法首先将积分中的有理部分求出.设

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

为既约的有理真分式. Ostrogradsky 公式指出:

$$\int R(x)\mathrm{d}x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\mathrm{d}x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + H(x), \qquad (3.1)$$

其中$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$为一真分式,称为 $R(x)$的积分的有理部分. $H(x)$是超越函数,它是有理真分式$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$的积分. 其中 $Q_1(x)$是 $Q(x)$和 $Q'(x)$的最高公因式,它可以用辗转相除法来确定. 而 $Q_2(x)$则由关系式 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$得出. 最后通过关系式

$$R(x) = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

由待定系数法可确定 $P_1(x)$, $P_2(x)$.

与有理函数的部分分式积分法比较,此法一个显著的优点是不必先求出 $Q(x)$的诸因式.

例如:计算积分

$$I = \int \frac{x^2+1}{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1}\mathrm{d}x$$

时,可用上述方法先分离出积分的有理部分. 为此令

$$Q(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1,$$

同时算出

$$Q'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2.$$

用辗转相除法求得 $Q(x)$与 $Q'(x)$的最高公因式为

$$Q_1(x) = x^2 - 2x + 1.$$

再由 $Q(x)=Q_1(x)Q_2(x)$求出

$$Q_2(x) = x^3 - 1.$$

设 $P_1(x)=ax+b$, $P_2(x)=cx^2+dx+e$. 并由关系式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]'+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

得

$$(x^2+1)(x-1)=-[ax^2+2bx-(a+2b)](x^2+x+1)+(cx^2+dx+e)(x-1)^3.$$

比较系数得

$$a=d=-\frac{2}{7},\quad b=-\frac{1}{14},\quad c=0,\quad e=\frac{1}{3}.$$

于是分离出了积分的有理部分：

$$I=\int\frac{x^2+1}{x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{4x+1}{14(x^2-2x+1)}-\frac{1}{21}\int\frac{6x-7}{x^3-1}\mathrm{d}x.$$

最后一项积分可用有理函数的部分分式积分法求出，得

$$I=-\frac{4x+1}{14(x^2-2x+1)}+\frac{1}{63}\ln(x^2+x+1)-\frac{13}{21\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

设 R 表示有关自变量的有理函数，则以下一些类型积分，经适当的变量置换后，可成为新变量的有理分式积分.

(7) $\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$ 型积分　设 $t=\tan\frac{x}{2}$，则有

$$\int R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int\overline{R}(t)\mathrm{d}t.\tag{3.2}$$

例如：

$$\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x=(1-r^2)\int\frac{2\mathrm{d}t}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}$$
$$=2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+c$$
$$=2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)+c.\tag{3.3}$$

(8) $\int R(\cosh x, \sinh x)\mathrm{d}x$ 型积分　设 $t=\tanh\frac{x}{2}$，则有

$$\int R(\cosh x, \sinh x)\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int \overline{R}(t)\mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

(9) $\int R\left[x, \sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right]\mathrm{d}x$ 型积分（其中 N 为自然数，α、β、γ、δ 均为常数）　设 $\sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=t$，则有

$$\int R\left[x, \sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right]\mathrm{d}x = \int R\left[\frac{\delta t^N-\beta}{\alpha-\gamma t^N}, t\right]\left[\frac{\delta t^N-\beta}{\alpha-\gamma t^N}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int \overline{R}(t)\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

比这类积分更为一般的情形是：

$$\int R\left[x, \sqrt[p]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \sqrt[q]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}, \cdots, \sqrt[s]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right]\mathrm{d}x,$$

其中 $p, q, \cdots, s$ 为自然数. 设 N 为它们的公倍数，则通过变换 $\sqrt[N]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}=t$ 可将积分变为有理分式积分.

例如：$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$，设 $\sqrt[6]{x}=t$，则有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5}{t^3(1+t^2)}\mathrm{d}t = 6\int\left[1-\frac{1}{1+t^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=6(t-\mathrm{Arctan}\, t)+c$$

$$=6(\sqrt[6]{x}-\mathrm{Arctan}\sqrt[6]{x})+c.$$

(10) Euler（欧拉）代换：对于积分

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$　（a、b、c 为常数，且 $b^2-4ac\neq 0$），

可根据不同情况，分别用以下 3 种代换：

① $a>0$ 时（第一代换） 设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t+\sqrt{a}x$（或 $t-\sqrt{a}x$），则有

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\quad\left(\text{或}\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}\right)$$

及

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{-\sqrt{a}\,t^2+bt-c\sqrt{a}}{b-2\sqrt{a}\,t}\quad\left[\text{或}\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{b+2\sqrt{a}t}\right],$$

因此积分可以有理化

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$$

$$=\int R\left[\frac{t^2-c}{b\mp2\sqrt{a}t},\frac{\mp\sqrt{a}t^2+bt\mp c\sqrt{a}}{b\mp2\sqrt{a}t}\right]\left(\frac{t^2-c}{b\mp2\sqrt{a}t}\right)'\mathrm{d}t=\int\bar{R}(t)\mathrm{d}t.$$

② $c>0$ 时（第二代换） 设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$（或 $xt-\sqrt{c}$），则有

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}\quad\left(\text{或}\frac{-2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}\right)$$

及

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\quad\left(\text{或}\frac{-\sqrt{c}-bt-a\sqrt{c}}{a-t^2}\right),$$

代入被积分式，即成为 t 的有理式积分. 其实，Euler 第一、第二代换可以互相转化. 因为若取 $x=\frac{1}{z}$，便有

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{1}{z}\sqrt{cz^2+bz+a},$$

其中系数 a,c 的地位恰好交换.

③ 当方程 $ax^2+bx+c=0$ 有不同实根 λ 和 μ 时（第三代换） 设 $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$（或 $t(x-\mu)$）. 同时有

$$x=\frac{-a\mu+\lambda t^2}{t^2-a} \quad 及 \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)}{t^2-a}$$

代入被积式，即为 t 的有理式积分.

实质上这种情形与（9）相同. 因为此时 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)}=(x-\lambda)\sqrt{\frac{a(x-\mu)}{x-\lambda}}$（假定$(x-\lambda)>0$），因此所作代换就是

$$t=\sqrt{\frac{a(x-\mu)}{x-\lambda}}.$$

例如，对于积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+3x+2}},$$

上述 3 类 Euler 代换都适用. 以第一代换为例，设 $\sqrt{x^2+3x+2}=t-x$，则有

$$x=\frac{t^2-2}{2t+3} \quad 及 \quad \mathrm{d}x=\frac{2(t^2+3t-2)}{(2t+3)^2}\,\mathrm{d}t,$$

代入被积分式，就得到关于 t 的有理式积分.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}=2\int\frac{t^2+3t-2}{t(2t+3)^2}\,\mathrm{d}t.$$

（11）二项式微分型积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x \ (m、n、p \text{ 为有理数，且至少有一个不为整数}).$$

先作代换 $z=x^n$，可得

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p\,\mathrm{d}z, \qquad q=\frac{m+1}{n}-1.$$

只要在 p，q 和 $p+q$ 中有一个是整数时，就可将积分转变为有理式积分，所作代换如下：

$$t=\sqrt[s]{z}=\sqrt[s]{x^n}\left(\text{当 } p \text{ 为整数，并设 } q=\frac{r}{s}\right),$$

$$t=\sqrt[\lambda]{a+bz}=\sqrt[\lambda]{a+bx^n}\left(当\ q\ 为整数,并设\ p=\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

$$t=\sqrt[\lambda]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[\lambda]{\frac{a+bx^n}{x^n}}\left(当\ p+q\ 为整数,并设\ p=\frac{\mu}{\lambda}\right).$$

例如,积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

就是二项式微分型积分.相当于 $m=0,n=4,p=\frac{-1}{4},q=\frac{m+1}{n}-1=-\frac{3}{4}$, p,q 虽不为整数,但 $p+q=-1$ 是整数,因此可取变换:

$$t=\sqrt[4]{\frac{1+x^4}{x^4}}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\quad(即\ x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}}),$$

代入积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^4-1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,t+c$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+c.$$

如果 p、q 和 $p+q$ 都不为整数,则二项式微分型积分

$$J_{p,q}=\int z^q(a+bz)^p\mathrm{d}z$$

不可能用初等函数的有限形式表示出来.但可用递推公式

$$J_{p,q}=-\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(p+1)}+\frac{p+q+2}{a(p+1)}J_{p+1,q},\quad p\neq-1,$$

$$J_{p,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(q+1)}-b\frac{p+q+2}{a(q+1)}J_{p,q+1},\quad q\neq-1,$$

以及

$$J_{p,q}=\frac{(a+bz)^pz^{q+1}}{p+q+1}+\frac{ap}{p+q+1}J_{p-1,q},\quad p+q\neq-1,$$

$$J_{p,q}=\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q}}{b(p+q+1)}-\frac{aq}{b(p+q+1)}J_{p,q-1},\quad p+q\neq -1,$$

将 p 或 q 变成真分式.

(12) $\int \sin^{p}x\cos^{q}x\,\mathrm{d}x$ 型积分(其中 p,q 为有理数) 通过变换 $t=\sin^{2}x$ 可将积分化为二项式微分型积分

$$J_{p,q}=\int \sin^{p}x\cos^{q}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1-t)^{\frac{q-1}{2}}t^{\frac{p-1}{2}}\mathrm{d}t,$$

因而当 p(或 q)为奇数,或者 $p+q$ 为偶数时,积分都能用初等函数的有限形式表示.

特别地,当 p,q 都是整数时,可用下列递推公式来演算积分

$$J_{p,q}=-\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q+1}x}{q+1}+\frac{p+q+2}{q+1}J_{p,q+2},\quad q\neq -1,$$

$$J_{p,q}=\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q+1}}{p+1}+\frac{p+q+2}{p+1}J_{p+2,q},\quad p\neq -1,$$

$$J_{p,q}=\frac{\sin^{p+1}x\cos^{q-1}x}{p+q}+\frac{q-1}{p+q}J_{p,q-2},\quad p+q\neq 0,$$

$$J_{p,q}=-\frac{\sin^{p-1}x\cos^{q+1}x}{p+q}+\frac{p-1}{p+q}J_{p-2,q},\quad p+q\neq 0.$$

某些不能用初等函数有限形式表示的重要积分:

(1) **椭圆积分**(elliptic integral)

在型如

$$\int R(x,\sqrt{P(x)})\,\mathrm{d}x \tag{3.6}$$

的积分中,不能用初等函数有限形式表示的,称为**椭圆积分**. 其中 $P(x)$ 为三次或四次多项式,R 是关于自变量的有理函数.

经适当变换,椭圆积分可以变为下面三种标准形式:

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}},\quad \int\frac{z^{2}\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}},$$

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{(1+hz^{2})\sqrt{(1-z^{2})(1-k^{2}z^{2})}},$$

其中 $0<k<1$. 分别称为**第一、第二及第三椭圆积分**. 若再经代换 $z=\sin\varphi$, 这三种椭圆积分又可写成如下形状:

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\qquad\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad 0<k<1.$$

(2) **对数积分**(logarithmic integral)

$$\mathrm{Ei}(x)=\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}y}{\ln y}=\mathrm{Li}(y),\qquad x=\ln y.$$

(3) **正弦积分**(sine integral)

$$\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{si}(x).$$

(4) **余弦积分**(cosine integral)

$$\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{Ci}(x).$$

3.2 定积分

3.2.1 概念与性质

定义 3.2.1 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数. $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$ 为一组分点, $x_{i-1}<x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$. 这组分点将 $[a,b]$ 分为 n 个子区间(subinterval), 称它是区间 $[a,b]$ 的一个**划分**(partition). 记 λ 为最大子区间长度, 即

$$\lambda=\max\{\Delta x_i=x_i-x_{i-1}\},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

从每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i, 作和式

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称此和式为 **Riemann 和**(Riemann sum).

若对于$[a,b]$的任意划分及 ξ_i 的任意选择，当 $\lambda\to 0$ 时有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I,$$

则称 f 在$[a,b]$上 **Riemann 可积**. 并称此极限 I 为 f 在$[a,b]$上的**定积分**(definite integral)(或 **Riemann 积分**). 记作

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

定义 3.2.2 和数

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

称为 **Darboux(达布)下和**(lower Darboux sum)，其中 m_i 为 f 在第 i 个子区间上的下确界. 和数

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

称为 **Darboux 上和**(upper Darboux sum)，其中 M_i 为 f 在第 i 个子区间上的上确界.

Darboux 和的性质

(1) 对于同一划分的 Darboux 下和与 Darboux 上和，分别是 Riemann 和的下确界和上确界.

(2) 如果划分 T'是在划分 T 中加入若干新分点所得，则有

$$s\leqslant s' \quad 及 \quad S'\leqslant S.$$

(3) 对任意的两个分割 T,T'总有

$$m(b-a)\leqslant s\leqslant S'\leqslant M(b-a).$$

其中 m,M 分别为 f 在$[a,b]$上的下确界与上确界.

定义 3.2.3 由 Darboux 和的性质知，对所有分割而言，Darboux下和集$\{s\}$有上界，Darboux 上和集$\{S\}$有下界，从而分别有上确界 $\sup\{s\}$及下确界 $\inf\{S\}$. 我们称它们为 f 在$[a,b]$上的**下积分**(lower integral)与**上积分**(upper integral)，并记作 $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$. 即

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \sup\{s\}, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \inf\{S\}.$$

定理 3.2.4 Darboux 下和 s 及 Darboux 上和 S 分别以下积分与上积分为极限，即

$$\lim_{\lambda\to 0} s = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x, \qquad \lim_{\lambda\to 0} S = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3.2.5 设 f 是$[a,b]$上的有界函数，则 f 在$[a,b]$上 Riemann可积的充要条件是

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

即，对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在某一划分，使得

$$S - s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

其中 S，s 分别为划分的 Darboux 上和及下和．ω_i 为 f 在子区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅，即

$$\omega_i = M_i - m_i.$$

定理 3.2.6 **可积函数类**(integrable functions) 下面 3 类函数在区间$[a,b]$上可积：

(1) $[a,b]$上的连续函数.

(2) 在$[a,b]$上只有有限个间断点的有界函数.

(3) $[a,b]$上的单调有界函数.

定理 3.2.7 有限个可积函数的和函数与积函数仍然可积.

定理 3.2.8 设函数 f 在$[a,b]$上可积，φ 为一连续函数，则复合函数$(\varphi\circ f)$在$[a,b]$上可积.

定理 3.2.9 若在有限个点上改变可积函数的值，则其可积性不变.

定义 3.2.10

(1) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$; (2) $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

定积分性质(properties of the definite integral)

(1) 定积分值与积分变量记号无关,即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

(2) 线性性质

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

其中 α、β 为常数.

(3) 积分区间的可加性

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(4) 比较性质　若 f, g 在$[a,b]$可积,且 $f \leqslant g$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x, \qquad a < b.$$

特别地,当 $f(x) \geqslant 0$ 时,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0, \qquad a < b.$$

(5) 绝对可积性　若 f 在$[a,b]$上可积,则$|f|$在$[a,b]$上也可积,且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

定理 3.2.11　设 M, m 分别为$[a,b]$上连续函数 f 的最大值与最小值,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a), \qquad a < b.$$

定理 3.2.12　积分中值定理(mean value theorems for integral)

(1) 若 f 在$[a,b]$上连续,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

(2) 若 f 和 g 在$[a,b]$上连续,且 g 在$[a,b]$上不变号,则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(3) 若 g 在$[a,b]$上可积，f 在$[a,b]$上单调，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，当 f 为单调减的非负函数时，有 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x$$

及当 f 为单调增的非负函数时，有 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.2.13 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 0\ (p>0)$.

证明 方法一 应用积分中值定理(定理 3.2.12(1))可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p = 0,\qquad \xi_n\in[n,n+p].$$

方法二 应用积分中值定理(定理 3.2.12(3))，可得

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{n}\left|\int_n^{\xi'_n}\sin x\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{n}|\cos n - \cos\xi'_n|$$

$$\leqslant\frac{2}{n},\quad \xi'_n\in[n,n+p].$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

3.2.2 定积分计算

定理 3.2.14 微积分第一基本定理(first fundamental theorem of calculus) 设 f 在$[a,b]$上可积，F 是$[a,b]$上由变上限积分

$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

所定义的函数．若 f 在$[a,b]$上的点 c 处连续，则 F 在 c 点可微，且

$$F'(c)=f(c)$$

（若 $c=a$ 或 b，则 $F'(c)$为单侧导数）．

定理 3.2.15　微积分第二基本定理 Newton-Leibniz 公式（second fundamental theorem of calculus（Newton－Leibniz formula））　若 f 在$[a,b]$可积，且 $F'=f$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\quad（或记作\ F(x)|_a^b）.$$

例 3.2.16　(1) 已知 $f(x)=\int_a^{x^3}\frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$．求 $f'(x)$．

解　设 $g(x)=x^3$ 及 $F(t)=\int_a^t\frac{1}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$，则 $f(x)=F(g(x))$．根据复合函数求导规则及微积分第一基本定理，有

$$f'(x)=F'(g(x))g'(x)=F'(x^3)\cdot 3x^2=\frac{1}{1+\sin^2(x^3)}\cdot 3x^2.$$

(2) 已知 $f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$．求 $f'(x)$．

解　$f'(x)=\left[\int_a^{\frac{1}{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}-\int_a^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}\right]'$

$$=\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\ln x}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right].$$

(3) 计算 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$．

解　因为$[x-\ln(1+\mathrm{e}^x)]'=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$（见积分法中的配方法）．根据 Newton-Leibniz 公式　有

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=[x-\ln(1+\mathrm{e}^x)]_{-1}^{1}$$

$$=[1-\ln(1+\mathrm{e})]-\left[(-1)-\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right]=1.$$

(4) 计算$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x$ $(0<r<1)$.

解 由(3.3)式知道,函数

$$F(x)=2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)$$

是$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$的一个原函数. 虽然 $F(x)$在 $x=\pm\pi$ 处为第一类间断,并知

$$\lim_{x\to-\pi^+}F(x)=-\pi;\qquad \lim_{x\to\pi^-}F(x)=\pi.$$

但 Newton-Leibniz 公式依然成立,且

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x=F(\pi-0)-F(-\pi+0)=2\pi.$$

(5) 计算$\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$.

解 根据部分分式积分法(3.1.2 节积分法(5)),从形式上可以求出原函数

$$F(x)=-\frac{1}{3}\mathrm{Arctan}\,\frac{3x(x^2-1)}{x^4-4x^2+1}.$$

但如果用$[F(1)-F(0)]=0$来计算定积分,显然是错误的. 这是因为 $x_0=\sqrt{2-\sqrt{3}}\in[0,1]$,而 $F(x)$在 x_0 产生第一类间断,所以不满足 Newton-Leibniz 公式的条件. 正确的计算方法应为

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x&=\int_0^{x_0}\frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1\frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x\\&=[F(x_0-0)-F(0)]+[F(1)-F(x_0+0)]\\&=\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

定积分换元公式(change of variables in the definite integral) 设函数 $f(x)$连续,函数 $\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续微商. 则

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

例 3.2.17 (1) 求 $\int_2^3 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$.

解 设 $1+x^2=t$，即 $x=\varphi(t)=\sqrt{t-1}$，可以算得 $\varphi'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}$，及 $\varphi(5)=2,\varphi(10)=3$. 因此

$$\int_2^3 \frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int_5^{10}(t^{-2}-t^{-3})dt = \frac{17}{400}.$$

(2) 求 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 作代换 $x=\varphi(t)=\sec t\ \left(\frac{2\pi}{3}<t<\frac{3\pi}{4}\right)$. 于是 $dx=\sec t\cdot\tan t\,dt$，及 $\varphi\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-2$，$\varphi\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$，$\sqrt{x^2-1}=-\tan t$. 因此

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sec t\cdot\tan t}{-\tan t}dt = -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\sec t\,dt = \ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.$$

定积分分部积分公式(integration by parts for definite integral)

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (3.7)$$

Wallis(沃利斯)积分公式 由(3.7)式可得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\,dx = -\frac{\sin^{p-1}x\cos x}{p}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{p-1}{p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}x\,dx, \qquad p>1.$$

当 p 为正整数时，反复运用这一公式可得 Wallis 积分公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\,dx = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & m=2k, \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & m=2k+1. \end{cases} \qquad (3.9)$$

定义 3.2.18 设 f 和 g 是定义在$[a,b]$上的函数．$a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$ 为区间的一个划分，在$[x_{i-1},x_i]$上任选一点 $x_i'(i=1,2,\cdots,n)$，构成和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i')[g(x_i)-g(x_{i-1})].$$

若当最大子区间长度 $\lambda=\max_i(x_i-x_{i-1})$趋于零时，该和式的极限存在，则称此极限为 f 对 g 的**黎曼-斯蒂尔切斯积分**(Riemann-Stieltjes integral)，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i')[g(x_i)-g(x_{i-1})].$$

显然，当函数 $g(x)$连续可微及 $f(x)$在$[a,b]$上 Riemann 可积时，上述 R－S 积分就是通常的 Riemann 积分，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

关于 Stieltjes 积分的存在性有下列准则：

(1) 若 f 连续，且 g 有有界变差(3.3.3)，则积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在.

(2) 若 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，且函数 g 满足 Lipschitz 条件

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant L|(x_1-x_2)|,\quad L\text{ 为常数},x_1,x_2\in[a,b],$$

则积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在.

(3) 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在，则$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$ 也存在，且

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)=[f(b)g(b)-f(a)g(a)]-\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

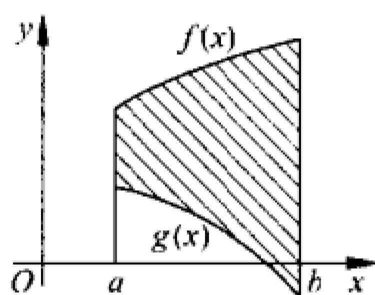
3.3 定积分应用

3.3.1 平面域的面积(area of a plane region)

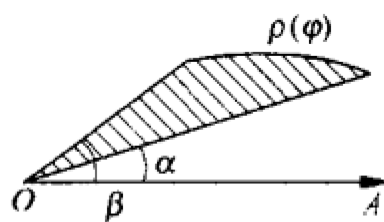
(1) 直角坐标系(图 3.1(a)) $A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$

(2) 极坐标系(图 3.1(b)) $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$

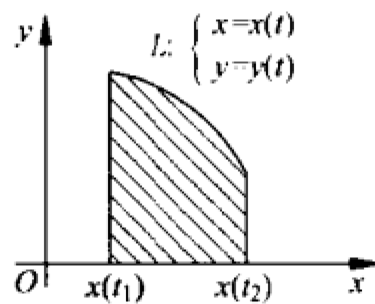
(3) 参数形式(图 3.1(c)) $A=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)\mathrm{d}t.$



(a) 直角坐标情形



(b) 极坐标情形



(c) 参数方程情形

图 3.1 平面域的面积

例 3.3.1 (1) 计算由抛物线

$$x=5y^2,\quad x=1+y^2$$

所围平面域(图 3.2(a))的面积.

解 $A=2(A_1+A_2)$

$$=2\left[\int_0^1\sqrt{\frac{x}{5}}\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{5}{4}}\left(\sqrt{\frac{x}{5}}-\sqrt{x-1}\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{2}{3}$$

或

$$A=2\int_0^{\frac{1}{2}}[(1+y^2)-5y^2]\mathrm{d}y=\frac{2}{3}.$$

(2) 求双纽线 $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$ 所围域(图 3.2(b))的面积.

解 $A=4\cdot\frac{1}{2}2a^2\int_0^{\pi/4}\cos2\varphi\mathrm{d}\varphi=2a^2.$

(3) 求长、短半轴为 a,b 的椭圆面积.

解 椭圆的参数方程为 $x=a\sin t, y=b\cos t$（见图 3.2(c)），所以

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b\cos t)(a\cos t)\mathrm{d}t=\pi ab.$$

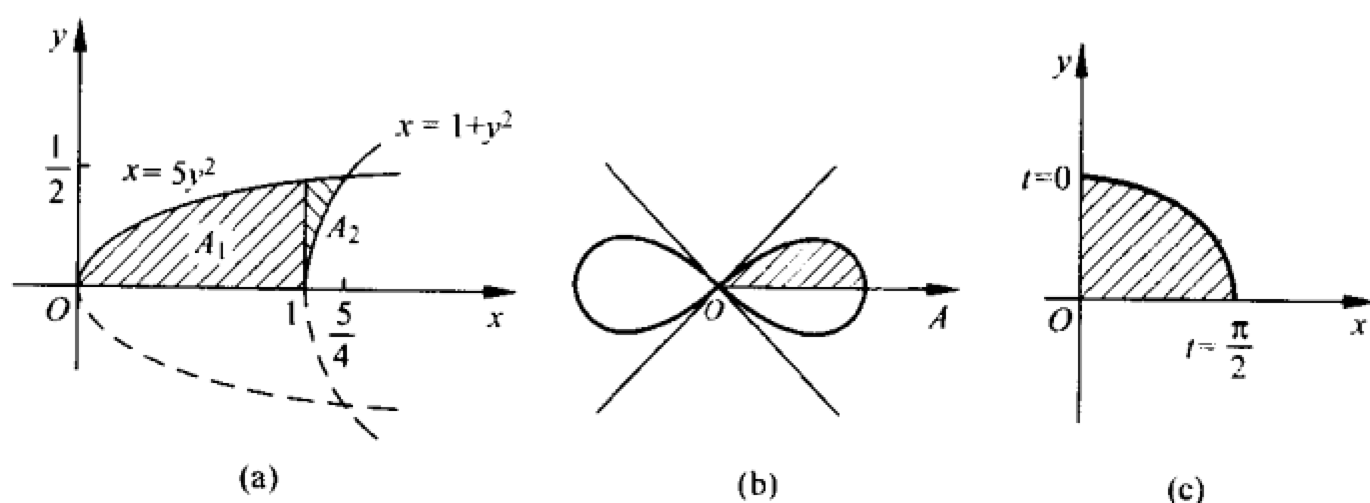


图 3.2 平面域

3.3.2 空间体的体积(volume of a solid)

如图 3.3(a)，设空间体 Ω 垂直于 x 轴的横截面面积函数 $A(x)$ 为已知，则 Ω 的体积为

$$v=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

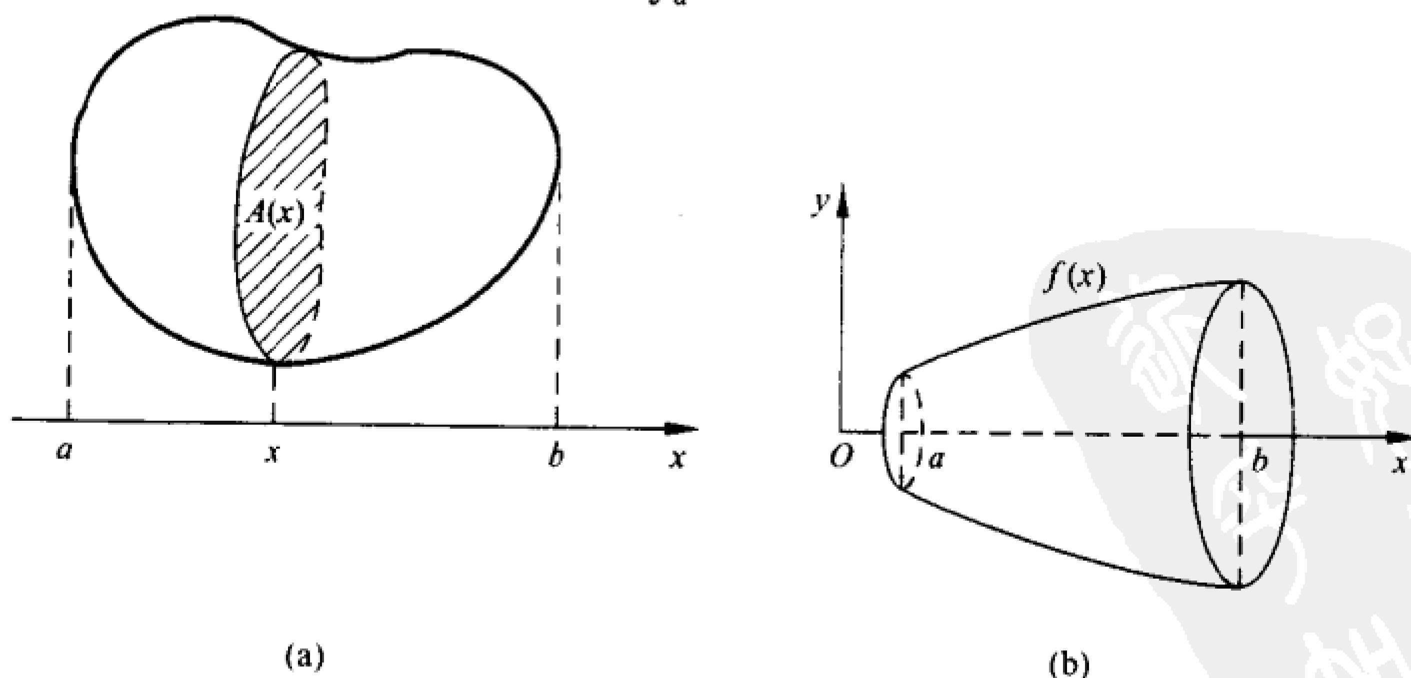


图 3.3 空间体体积

特别地，对于旋转体（图 3.3(b)）的体积有

$$v=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x.$$

例 3.3.2 (1) 如图 3.4，底半径为 r 的圆柱体，被过底面直径且与底面相交 α 角的平面所截，求截下的楔形体体积.

解 垂直于直径的楔形体截面为一直角三角形．其面积随 x 变化的函数为 $A(x)=\frac{1}{2}(r^2-x^2)\tan\alpha$.

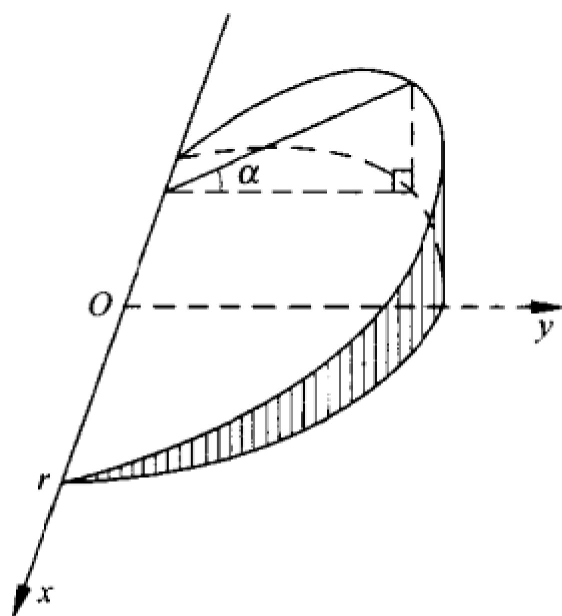


图 3.4 楔形体

因此，楔形体体积为

$$\begin{aligned}V&=2\int_0^r A(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^r(r^2-x^2)\tan\alpha\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}r^3\tan\alpha.\end{aligned}$$

若垂直 y 轴取截面，则截面形状为矩形，面积函数为

$$A(y)=2\sqrt{r^2-y^2}\ y\tan\alpha.$$

同样可算出楔形体体积

$$V=\int_0^r 2\sqrt{r^2-y^2}\ y\tan\alpha\mathrm{d}y=\frac{2}{3}r^3\tan\alpha.$$

(2) 计算由星形线

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

绕 x 轴旋转所得旋转体体积.

解 星形线的参数方程为

$$x=a\sin^3 t,\quad y=a\cos^3 t,\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

因此其旋转体体积为

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^6 t)(3a\sin^2 t\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi a^3\left(\int_0^{\pi/2}\cos^7 t\ \mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2}\cos^9 t\ \mathrm{d}t\right)$$

$$= 6\pi a^3\left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!}\right) \qquad (由(3.7)式)$$

$$= \frac{32}{105}\pi a^3.$$

定义 3.3.3 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个函数，对于 $[a,b]$ 的一个划分 $\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，称

$$V(\Delta) = \sum_{i=1}^{n}|f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

为 $f(x)$ 关于划分 Δ 的**变差**. 如果存在常数 M，使对一切划分 Δ，均有 $V(\Delta)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有**有界变差**.

注意，连续函数不一定是有界变差函数. 例如函数

$$y = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上连续，但不是有界变差函数.

定理 3.3.4 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $f(x)$ 也一定是 $[a,b]$ 上任何一个子区间的有界变差函数.

定理 3.3.5 有限个有界变差函数的和、差、积仍为有界变差函数.

定理 3.3.6 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为有界变差的充要条件是：$f(x)$ 可以表为两个非负单调增函数的差.

定理 3.3.7 设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 为 $[t_1,t_2]$ 上的连续函数，则由此参数方程给出的曲线 L，可求长（见定义 12.1.4）的充要条件是 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 都是 $[t_1,t_2]$ 上的有界变差函数.

定理 3.3.8 设 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上有连续的一阶导数，则由 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ 所确定的弧段可以求长；且弧长为

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ \mathrm{d}t.$$

定理 3.3.9 设 $y=f(x)$在$[a,b]$上有连续的一阶导数，则由 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$所确定的弧段可以求长(见定义 12.1.4)，且弧长为

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

在极坐标系下，若 $\rho=\rho(\varphi)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的一阶导函数，则该弧段的弧长为

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\ \mathrm{d}\varphi.$$

例 3.3.10 椭圆的周长　由椭圆的参数方程 $x=a\sin t$, $y=b\cos t$，于是得

$$L=\int_0^t\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\ \mathrm{d}t=\int_0^t\sqrt{a^2\cos^2t+b^2\sin^2t}\ \mathrm{d}t$$

$$=a\int_0^t\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2t}\ \mathrm{d}t=aE(\varepsilon,t).$$

这是(3.6)式所提到的第二类椭圆积分，其中 $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$为椭圆的离心率(centrifugal rate)．显然，椭圆的周长为 $4aE\left(\varepsilon,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

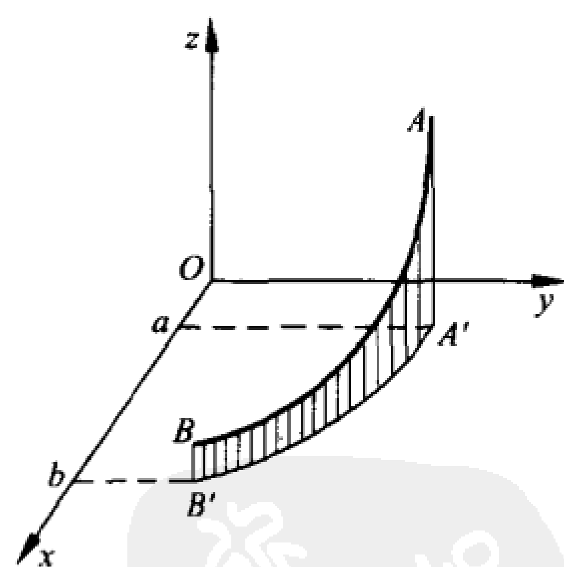


图 3.5　柱面

柱面面积(area of a cylindrical surface)

如图 3.5，设空间曲线 AB 的参数方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(z\geqslant0)$．它在 xy 平面上的投影为 $A'B'$，则柱面 $AA'B'B$ 的面积为

$$A=\int_{t_A}^{t_B}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\ \mathrm{d}t\quad(t_A<t_B).$$

特别地，当参变量 t 就取为 x 时，有

$$A=\int_a^b z(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

旋转面面积(area of a surface of revolution)

如图 3.3(b)所示，由曲线段 $y=f(x)(y>0,a<x<b)$绕 x 轴旋转而成的旋转面面积为

$$A=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

例 3.3.11 计算由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕长轴旋转所得旋转面的面积(设 $a>b$).

解 根据上述公式有

$$\begin{aligned}A&=2\pi\int_{-a}^{a}y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\pi\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\,\mathrm{d}x\\&=4\pi\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\mathrm{Arcsin}\,\varepsilon\right),\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率.

若对换 a,b 的位置，即可得绕短轴旋转所形成的旋转面的面积

$$\begin{aligned}A&=2\pi\int_{-b}^{b}y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{-b}^{b}\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\,\mathrm{d}x\\&=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2a}\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

3.3.3 质心与形心

定义 3.3.12

(1) 平面物体的**质心**(centre of mass)$C(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M},\qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M},$$

其中 M 为物体的质量,M_x,M_y 分别是物体对 x 轴和 y 轴的静力矩(static moment).

(2) 空间物体的**质心** $C(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{M},\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M},$$

其中 M 为物体的质量,M_{xy},M_{xz},M_{yz} 分别为物体对 xy,xz,yz 坐标面的静力矩.

当物体质量密度均匀(不妨设为 1)时,物体的质心就是物体所具几何形体的**形心**(centroid).

形心公式(formula for centroid)

(1) 平面曲线的形心(图 3.6)

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x},\quad \bar{y}=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x}.$$

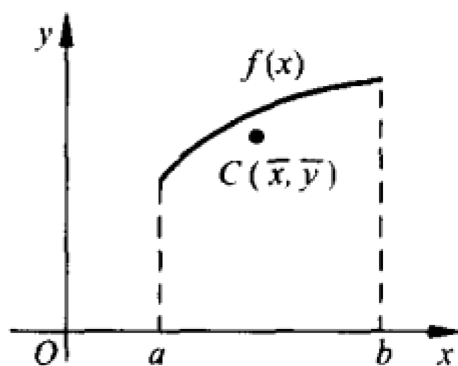


图 3.6 平面曲线的形心

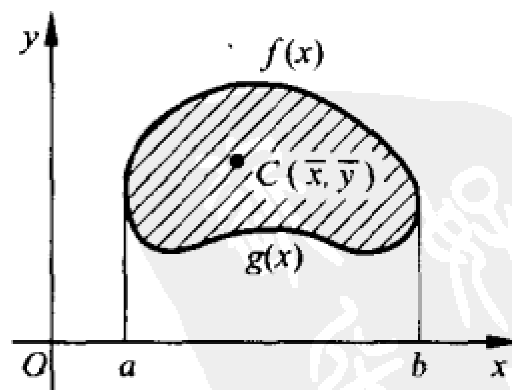


图 3.7 平面图形的形心

(2) 平面图形的形心(图 3.7)

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x},\quad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x}{\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x}.$$

例 3.3.13 (1) 半径为 R 的半圆弧的形心.

解 设半圆弧方程为 $x^2+y^2=R^2(y\geqslant 0)$. 由对称性知 $\bar{x}=0$,而

$$\bar{y}=\frac{1}{\pi R}\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}R.$$

因为 $c(\bar{x},\bar{y})=c\left(0,\frac{2}{\pi}R\right)$.

(2) 半径为 R 的半圆形心.

解 设半圆面为 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}$; $-R\leqslant x\leqslant R$. 由对称性知 $\bar{x}=0$,而

$$\bar{y}=\frac{1}{\frac{1}{2}\pi R^2}\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3\pi}R,$$

所以 $C(\bar{x},\bar{y})=C\left(0,\frac{4}{3\pi}R\right)$.

(3) 半径为 R 的半球面的形心.

解 设半球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$,由对称性知 $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$. 而

$$\bar{z}=\frac{\int_0^R z\cdot 2\pi x(z)\sqrt{1+[x'(z)]^2}\,\mathrm{d}z}{\int_0^R 2\pi x(z)\sqrt{1+[x'(z)]^2}\,\mathrm{d}z}=\frac{2\pi R\int_0^R z\mathrm{d}z}{2\pi R\int_0^R \mathrm{d}z}=\frac{R}{2},$$

所以 $C(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=C\left(0,0,\frac{R}{2}\right)$.

(4) 半径为 R 的半球形心.

解 设半球体为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2(z\geqslant 0)$. 由对称性知 $\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$. 而

$$\bar{z}=\frac{\int_0^R z\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z}{\frac{2}{3}\pi R^3}=\frac{3}{8}R,$$

所以 $C(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=c\left(0,0,\frac{3}{8}R\right)$.

定理 3.3.14 Pappus(帕普斯)定理

(1) 设 D 与 L 是位于同一平面中的一个平面区域和轴线. 二者不相交. 则由平面域 D 绕轴线 L 旋转所形成之旋转体体积, 等于 D 的面积与 D 的形心轨线长之乘积.

(2) 设 C 与 L 是位于同一平面中的弧段与轴线, 二者不相交. 则由 C 绕 L 旋转所形成之旋转曲面的面积, 等于 C 的弧长与它的形心轨线长之乘积.

例 3.3.15 如图 3.8, 设圆纹环形曲面 S 是由半径为 r 的圆绕共面轴 z 旋转而得. 圆心到 z 轴的距离为 $R(R>r)$. 由上述 Pappus 定理知, 曲面 S 的面积为

$$2\pi r\cdot 2\pi R=4\pi^2 rR.$$

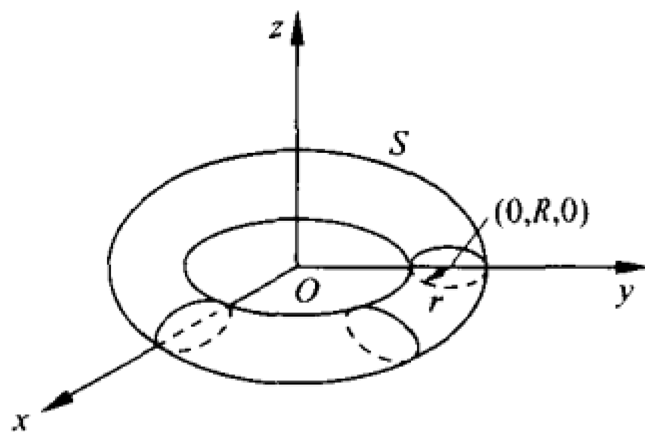


图 3.8 圆纹环形

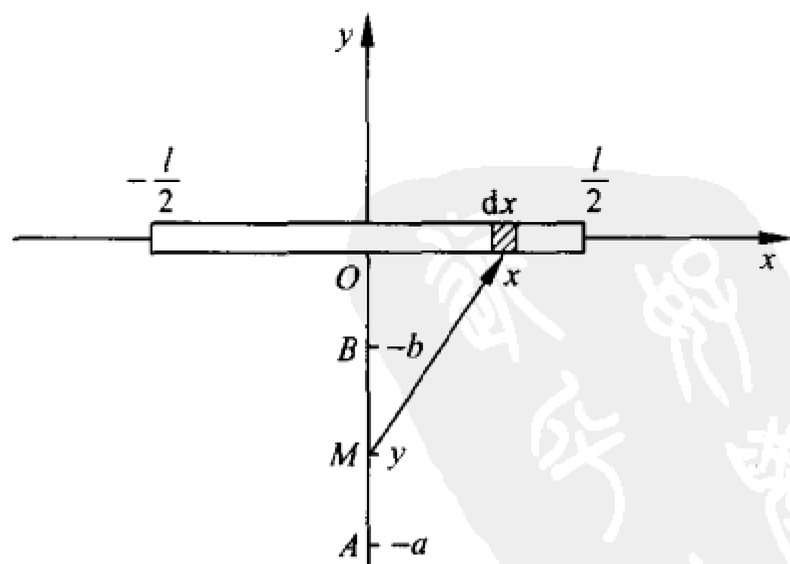


图 3.9 引力做功

而环形体体积为

$$\pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$$

例 3.3.16 引力计算与变力做功.

如图 3.9 所示,有线密度为 ρ 的均匀质杆,长为 l. 在质杆的中垂线上有一单位质点 M. 求 M 由 A 点移至 B 点时引力做功.

解 取坐标系如图 3.9,由对称性可知,质杆对质点的引力为 y 轴方向. 为计算这个引力,设 M 点的坐标为 $(0,y)$. 由 $\mathrm{d}x$ 微段质杆对 M 点所产生的引力,沿 y 轴方向的分量为

$$\mathrm{d}F = \frac{-k\rho y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

式中 k 为万有引力常数. 因此,质杆对质点 M 的总引力为

$$F(y) = -k\rho y\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{-2k\rho l}{y\sqrt{4y^2+l^2}}.$$

所以,当质点 M 由 A 移至 B 时引力做功为

$$W = \int_{-a}^{-b}F(y)\mathrm{d}y = -\int_{-a}^{-b}\frac{2k\rho l}{y\sqrt{4y^2+l^2}}\mathrm{d}y$$

$$= -2k\rho l\int_{2a}^{2b}\frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+l^2}} = 2k\rho\ln\frac{a}{b}\cdot\frac{\sqrt{4b^2+l^2}+l}{\sqrt{4a^2+l^2}+l}.$$

3.4 积分表

基本公式(basic formulas)(表中积分常数 c 省略)

(1) $\int(af(x)+bg(x))\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x + b\int g(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$

(3) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$

代数函数的积分(integrals of algebraic functions)

(4) $\int x^n \mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}, & n\neq -1,\\ \ln|x|, & n=-1.\end{cases}$

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{a}.$

(6) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x}\ (a^2>x^2).$

(7) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}\ (x^2>a^2).$

设 $X=a+bx+cx^2, 4ac-b^2=q>0.$

(8) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a+bx+cx^2}=\dfrac{2}{\sqrt{q}}\ \mathrm{Arctan}\,\dfrac{2cx+b}{\sqrt{q}}.$

(9) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(a+bx+cx^2)^2}=\dfrac{2cx+b}{qX}+\dfrac{2c}{q}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{X}.$

(10) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(a+bx+cx^2)^n}=\dfrac{2cx+b}{q(n-1)X^{n-1}}+\dfrac{2(2n-3)c}{q(n-1)}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{X^{n-1}}.$

含$(a+bx)^n$项 $(m,n\geqslant 1)$.

(11) $\int (a+bx)^n\mathrm{d}x=\dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}.$

(12) $\int x(a+bx)^n\mathrm{d}x=\dfrac{x(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}-\dfrac{(a+bx)^{n+2}}{b^2(n+1)(n+2)}.$

(13) $\int x^m(a+bx)^n\mathrm{d}x=\dfrac{x^m(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$

$$-\frac{m}{b(n+1)}\int x^{m-1}(a+bx)^{n+1}\mathrm{d}x.$$

(14) $\int \dfrac{(a+bx)^n}{x}\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n}\dbinom{n}{k}a^{n-k}b^k\dfrac{x^k}{k}+a^n\ln|x|.$

(15) $\int \dfrac{(a+bx)^n}{x^m}\mathrm{d}x=-\dfrac{(a+bx)^{n+1}}{a(m-1)x^{m-1}}$

$$+\frac{b(n-m+2)}{a(m-1)}\int\frac{(a+bx)^n}{x^{m-1}}\mathrm{d}x.$$

(16) $\int \frac{dx}{(a+bx)^n}=\begin{cases}\frac{-1}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}}, & n>1,\\ \frac{1}{b}\ln|a+bx|, & n=1.\end{cases}$

(17) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^n}=\begin{cases}\frac{-x}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}}+\frac{1}{b(n-1)}\cdot\\ \quad\int\frac{dx}{(a+bx)^{n-1}}, & n>1,\\ \frac{x}{b}-\frac{a}{b^2}\ln|a+bx|, & n=1.\end{cases}$

(18) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^n}=\begin{cases}\frac{-x^m}{b(n-1)(a+bx)^{n-1}}+\frac{m}{b(n-1)}\cdot\\ \quad\int\frac{x^{m-1}dx}{(a+bx)^{n-1}}, & n>1,\\ \frac{x^m}{bm}-\frac{a}{b}\int\frac{x^{m-1}}{a+bx}dx, & n=1.\end{cases}$

(19) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^n}=\begin{cases}\frac{1}{a(n-1)(a+bx)^{n-1}}+\frac{1}{a}\cdot\\ \quad\int\frac{dx}{x(a+bx)^{n-1}}, & n>1,\\ \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right|, & n=1.\end{cases}$

(20) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)^n}=\frac{-1}{(m-1)x^{m-1}(a+bx)^n}-\frac{nb}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-1}(a+bx)^{n+1}},\quad m\neq1.$

含 $\sqrt{a+bx}$ 项（$n>0$）

(21) $\int\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}}.$

(22) $\int x\sqrt{a+bx}\,dx=\frac{2x}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15b^2}(a+bx)^{\frac{5}{2}}.$

(23) $\int x^n \sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x = \frac{2x^n(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{(2n+3)b}$

$$-\frac{2a^n}{(2n+3)b}\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x.$$

(24) $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\mathrm{d}x = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}$.

(25) $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^n}\mathrm{d}x = -\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{a(n-1)x^{n-1}}$

$$+\frac{b(5-2n)}{2a(n-1)}\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}}\mathrm{d}x.$$

(26) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$.

(27) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{-2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}$.

(28) $\int \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2x^n}{b}\sqrt{a+bx} - \frac{2n}{b}\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x$.

(29) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|, & a>0, \\ \frac{2}{\sqrt{-a}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}}\right), & a<0. \end{cases}$

(30) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{a(n-1)x^{n-1}}$

$$-\frac{(2n-3)b}{2(n-1)a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}\sqrt{a+bx}}.$$

含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 项 $(a^2\geqslant x^2)$

(31) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$.

(32) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

$$(33)\int x^n\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{-x^{n-1}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{n+2}+\frac{n-1}{n+2}a^2\int x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

$$(34)\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|.$$

$$(35)\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^n}dx=\frac{-(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(n-1)x^{n-1}}+\frac{n-4}{a^2(n-1)}\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^{n-2}}dx.$$

$$(36)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mathrm{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right).$$

$$(37)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$(38)\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}}{n}+\frac{a^2(n-1)}{n}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$(39)\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right|.$$

$$(40)\int \frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2(n-1)x^{n-1}}+\frac{n-2}{a^2(n-1)}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}.$$

含 $\sqrt{a^2+x^2}$ 项

$$(41)\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right].$$

$$(42)\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

$$(43)\int x^n\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x^{n-1}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{n+2}-\frac{(n-1)a^2}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$$

(44) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|.$

(45) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^n}\mathrm{d}x=-\frac{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(n-1)x^{n-1}}-\frac{n-4}{a^2(n-1)}\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^{n-2}}\mathrm{d}x.$

(46) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|.$

(47) $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sqrt{a^2+x^2}.$

(48) $\int \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^{n-1}\sqrt{a^2+x^2}}{n}-\left(\frac{n-1}{n}\right)a^2\int \frac{x^{n-2}\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

(49) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|.$

(50) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{-\sqrt{a^2+x^2}}{a^2(n-1)x^{n-1}}$

$$-\frac{(n-2)}{a^2(n-1)}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-2}\sqrt{a^2+x^2}}.$$

含 $\sqrt{x^2-a^2}$ 项 $(x^2\geqslant a^2)$

(51) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right].$

(52) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3}.$

(53) $\int x^n\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n-1}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{n+2}$

$$+\frac{a^2(n-1)}{n+2}\int x^{n-2}\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x.$$

(54) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}-a\,\mathrm{Arcsec}\left(\frac{x}{a}\right).$

(55) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^n}\mathrm{d}x=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(n-1)x^{n-1}}+\frac{n-4}{a^2(n-1)}\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^{n-2}}\mathrm{d}x.$

(56) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|.$

(57) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}.$

(58) $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x^{n-1}\sqrt{x^2-a^2}}{n}+\frac{a^2(n-1)}{n}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

(59) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\text{Arc sec}\left(\frac{x}{a}\right).$

(60) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2(n-1)x^{n-1}}$

$$+\frac{n-2}{a^2(n-1)}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2-a^2}}.$$

含 $\sqrt{2ax-x^2}$ 项 ($a>0$)

(61) $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{2ax-x^2}+a^2\text{Arcsin}\left(\frac{x-a}{a}\right)\right].$

(62) $\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx=-\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+a\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx.$

(63) $\int x^n\sqrt{2ax-x^2}\,dx=-\frac{x^{n-1}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{n+2}$

$$+\frac{a(2n+1)}{n+2}\int x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}\,dx.$$

(64) $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}dx=\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{ax}+\frac{2}{a}\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx.$

(65) $\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^n}dx=\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(3-2n)ax^n}$

$$+\frac{n-3}{a(2n-3)}\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^{n-1}}dx.$$

(66) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=2\text{Arcsin}\sqrt{\frac{x}{2a}}=\text{Arccos}\left(1-\frac{x}{a}\right).$

(67) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\sqrt{2ax-x^2}+a\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

(68) $\int \frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}{n}$

$$+\frac{(2n-1)a}{n}\int \frac{x^{n-1}\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

(69) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2ax-x^2}}=-\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax}$.

(70) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{-\sqrt{2ax-x^2}}{a(2n-1)x^n}$

$$+\frac{(n-1)}{a(2n-1)}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}.$$

含 ln*x* 项

(71) $\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x$.

(72) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$.

(73) $\int x^n\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.

(74) $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{(\ln x)^2}{2}$.

(75) $\int \frac{\ln x}{x^n}\mathrm{d}x=\frac{-\ln x}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{1}{(n-1)^2x^{n-1}}$.

(76) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}=\ln|\ln x|+\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(\ln x)^3}{3\cdot 3!}+\cdots$.

(77) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\ln x}=\int \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y\quad (y=-2\ln x)$.

(78) $\int \frac{x^n\mathrm{d}x}{\ln x}=\int \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\mathrm{d}y\quad (y=-(n+1)\ln x)$.

(79) $\int \frac{dx}{x\ln x}=\ln|\ln x|$.

(80) $\int \frac{dx}{x^n\ln x}=\int \frac{e^{-y}}{y}dy \quad (y=(n-1)\ln x)$.

含 e^x 项

(81) $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}$.

(82) $\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$.

(83) $\int x^n e^{ax}dx = e^{ax}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{(n-k)!}\frac{x^{n-k}}{a^{k+1}}$.

(84) $\int \frac{e^{ax}}{x}dx=\ln x+\frac{ax}{1!}+\frac{(ax)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(ax)^3}{3\cdot 3!}+\cdots$.

(85) $\int \frac{e^{ax}}{x^n}dx=\frac{-e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}dx$.

(86) $\int \frac{dx}{1+e^x}=\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$.

(87) $\int \frac{dx}{a+be^{mx}}=\frac{1}{am}[mx-\ln(a+be^{mx})]$.

(88) $\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}}=\frac{1}{m\sqrt{ab}}\text{Arctan}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \quad (ab>0)$.

(89) $\int \frac{dx}{ae^{mx}-be^{-mx}}=\frac{1}{2m\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}e^{mx}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}e^{mx}+\sqrt{b}}\right|$.

(90) $\int e^{-a^2x^2}dx=x-\frac{a^2x^3}{3}+\frac{a^4x^5}{5\cdot 2!}-\frac{a^6x^7}{7\cdot 3!}+\cdots$.

(91) $\int xe^{-a^2x^2}dx=-\frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2}$.

(92) $\int x^{2n}e^{-a^2x^2}dx=\frac{-x^{2n-1}e^{-a^2x^2}}{2a^2}+\frac{2n-1}{2a^2}\int x^{2(n-1)}e^{-a^2x^2}dx$.

(93) $\int x^{2n+1}e^{-a^2x^2}dx = \frac{-x^{2n}e^{-a^2x^2}}{2a^2}+\frac{n}{a^2}\int x^{2n-1}e^{-a^2x^2}dx$.

含三角函数的积分(integrals involving trigonometric functions)

(94) $\int \sin ax\ dx = -\frac{\cos ax}{a}.$

(95) $\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a}.$

(96) $\int \tan ax\ dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax|.$

(97) $\int \cot ax\ dx = \frac{1}{a}\ln|\sin ax|.$

(98) $\int \sec ax\ dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| = \frac{1}{a}\ln \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$

(99) $\int \csc ax\ dx = \frac{-1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| = \frac{1}{a}\ln \tan\frac{ax}{2}.$

(100) $\int \sec^2 ax\ dx = \frac{1}{a}\tan ax.$

(101) $\int \csc^2 ax\ dx = \frac{-1}{a}\cot ax.$

(102) $\int \sin^2 ax\ dx = \frac{1}{2a}[ax - \sin ax\ \cos ax].$

(103) $\int \cos^2 ax\ dx = \frac{1}{2a}[ax + \sin ax\ \cos ax].$

(104) $\int \sin^3 x dx = -\frac{\cos x}{3}[2 + \sin^2 x].$

(105) $\int \cos^3 x\ dx = \frac{\sin x}{3}[2 + \cos^2 x].$

(106) $\int \sin^n x dx = \frac{-\sin^{n-1} x\ \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx.$

(107) $\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x\ \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\ dx.$

(108) $\int \tan^n x\ dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\ dx.$

$$(109)\ \int \cos^m x\ \sin^n x\ \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\cos^{m-1} x\ \sin^{n+1} x}{m+n} \\ \qquad + \dfrac{m-1}{m+n} \displaystyle\int \cos^{m-2} x\ \sin^n x\ \mathrm{d}x, \\ -\dfrac{\sin^{n-1} x\ \cos^{m+1} x}{m+n} \\ \qquad + \dfrac{n-1}{m+n} \displaystyle\int \cos^m x\ \sin^{n-2} x\ \mathrm{d}x. \end{cases}$$

$$(110)\ \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{-\sin^{n-1} x}{(n-m)\cos^{m-1} x} \\ \qquad + \dfrac{n-1}{n-m} \displaystyle\int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^m x}\mathrm{d}x, \\ \dfrac{\sin^{n+1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} \\ \qquad + \dfrac{m-n-2}{m-1} \displaystyle\int \frac{\sin^n x}{\cos^{m-2} x}\mathrm{d}x. \end{cases}$$

$$(111)\ \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{-\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} \\ \qquad - \dfrac{m-n+2}{n-1} \displaystyle\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x}\mathrm{d}x, \\ \dfrac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} \\ \qquad + \dfrac{m-1}{m-n} \displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x}\mathrm{d}x. \end{cases}$$

$$(112)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^m x \sin^n x} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)\sin^{n-1} x \cos^{m-1} x} \\ \qquad + \dfrac{m+n-2}{n-1} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^m x \sin^{n-2} x}, \\ \dfrac{1}{(m-1)\sin^{n-1} x \cos^{m-1} x} \\ \qquad + \dfrac{m+n-2}{m-1} \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^{m-2} x \sin^n x}. \end{cases}$$

$$(113)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arctan}\left[\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\ \tan\dfrac{x}{2}}{a+b}\right] \\ \qquad (a^2>b^2), \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}\ \tan\dfrac{x}{2}+a+b}{\sqrt{b^2-a^2}\ \tan\dfrac{x}{2}-a-b}\right| \\ \qquad (b^2>a^2).\end{cases}$$

$$(114)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{Arctan}\dfrac{a\ \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+b}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ \qquad (a^2>b^2), \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ \ln\left|\dfrac{a\ \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\ \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right| \\ \qquad (b^2>a^2).\end{cases}$$

$$(115)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{1}{ab}\operatorname{Arctan}\frac{b\ \tan x}{a}.$$

$$(116)\ \int \sqrt{1-\cos x}\ \mathrm{d}x=-2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}.$$

$$(117)\ \int \sqrt{1+\cos x}\ \mathrm{d}x=-2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

$$(118)\ \int \sqrt{1-\sin x}\ \mathrm{d}x=-2\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right).$$

$$(119)\ \int \sqrt{1+\sin x}\ \mathrm{d}x=-2\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right).$$

$$(120)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\cos x}}=-\sqrt{2}\ \ln\tan\frac{x}{4}.$$

(121) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos x}} = -\sqrt{2}\ \ln\tan\left(\frac{x+\pi}{4}\right).$

(122) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}} = -\sqrt{2}\ \ln\tan\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}\right).$

(123) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}} = -\sqrt{2}\ \ln\tan\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right).$

(124) $\int \sin mx \sin nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}.$

(125) $\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}.$

(126) $\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}.$

(127) $\int x \sin x\, dx = \sin x - x\cos x.$

(128) $\int x \cos x\, dx = \cos x + x\sin x.$

(129) $\int x^n \sin x\, dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx.$

(130) $\int x^n \cos x\, dx = x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x\, dx.$

(131) $\int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots.$

(132) $\int \frac{\cos x}{x} dx = \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \cdots.$

(133) $\int \frac{\sin x}{x^n} dx = -\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx.$

(134) $\int \frac{\cos x}{x^n} dx = -\frac{\cos x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}} dx.$

(135) $\int \frac{x}{\sin x} dx = x + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{7x^5}{3\cdot 5\cdot 5!} + \frac{31x^7}{3\cdot 7\cdot 7!}$

$$+ \frac{127x^9}{3\cdot 9\cdot 9!} + \cdots.$$

(136) $\int \frac{x}{\cos x}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5x^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61x^8}{8 \cdot 6!} + \frac{1385x^{10}}{10 \cdot 8!} + \cdots.$

(137) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\right).$

(138) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\left(\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\right).$

含反三角函数的积分(integrals involving inverse trigonometric functions)

(139) $\int \text{Arcsin}\,x\,dx = x\,\text{Arcsin}x + \sqrt{1-x^2}.$

(140) $\int \text{Arccos}\,x\,dx = x\,\text{Arccos}\,x - \sqrt{1-x^2}.$

(141) $\int \text{Arctan}\,x\,dx = x\,\text{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$

(142) $\int x\text{Arcsin}\,x\,dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2-1)\text{Arcsin}\,x + x\sqrt{1-x^2}\right].$

(143) $\int x^n\text{Arcsin}\,x\,dx = \frac{x^{n+1}\text{Arcsin}\,x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

(144) $\int x\text{Arctan}\,x\,dx = \frac{1}{2}(1+x^2)\text{Arctan}\,x - \frac{x}{2}.$

(145) $\int x^n\text{Arctan}\,x\,dx = \frac{x^{n+1}\text{Arctan}\,x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int\frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx.$

含双曲函数的积分(integrals involving hyperbolic functions)

(146) $\int \sinh ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax.$

(147) $\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\sinh ax.$

(148) $\int \sinh^2 ax\,dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2}.$

(149) $\int \cosh^2 ax \, dx = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2}$.

(150) $\int \sinh^n ax \, dx = \frac{\sinh^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n} \int \sinh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 0$.

(151) $\int \cosh^n ax \, dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cosh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 0$.

(152) $\int x \sinh ax \, dx = \frac{x}{a} \cosh ax - \frac{1}{a^2} \sinh ax$.

(153) $\int x \cosh ax \, dx = \frac{x}{a} \sinh ax - \frac{1}{a^2} \cosh ax$.

(154) $\int x^n \sinh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \cosh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cosh ax \, dx$.

(155) $\int x^n \cosh ax \, dx = \frac{x^n}{a} \sinh ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sinh ax \, dx$.

(156) $\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln(\cosh ax)$.

(157) $\int \coth ax \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sinh ax|$.

(158) $\int \tanh^2 ax \, dx = x - \frac{1}{a} \tanh ax$.

(159) $\int \coth^2 ax \, dx = x - \frac{1}{a} \coth ax$.

(160) $\int \tanh^n ax \, dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$.

(161) $\int \coth^n ax \, dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$.

(162) $\int \operatorname{sech} ax \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arcsin}(\tanh ax)$.

(163) $\int \operatorname{csch} ax \, dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right|.$

(164) $\int \operatorname{sech}^2 ax \, dx = \frac{1}{a}\tanh ax.$

(165) $\int \operatorname{csch}^2 ax \, dx = -\frac{1}{a}\coth ax.$

(166) $$\int \operatorname{sech}^n ax \, dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1.$$

(167) $$\int \operatorname{csch}^n ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1.$$

(168) $\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax \, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na}, \quad n \neq 0.$

(169) $\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na}, \quad n \neq 0.$

(170) $\int e^{ax}\sinh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{2}\left(\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right), \quad a^2 \neq b^2.$

(171) $\int e^{ax}\cosh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{2}\left(\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right), \quad a^2 \neq b^2.$

定积分的值(values of some definite integrals)

(172) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad (n > -1)$$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\cdots(1)}{n(n-2)\cdots(2)}\,\frac{\pi}{2}, & n = 2,4,6,\cdots, \\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots(2)}{n(n-2)\cdots 3}, & n = 1,3,5,\cdots. \end{cases}$$

此处 $\Gamma(n)$为 Γ 函数,见 5.2 节广义积分表的注 1.

4 级数

4.1 数项级数

4.1.1 基本概念

定义 4.1.1 由无穷数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

的各项依次逐项求和的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

称为**数项级数**(series of numbers)或**无穷级数**(infinite series). 简记作 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 u_n 称为级数的**通项**(general term)，前 n 项之和，又称为级数的**部分和**(partial sum)，记作

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

定义 4.1.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$有极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数**收敛**(convergent)，并称 S 为级数的**和**. 反之，若部分和数列$\{S_n\}$没有极限，则称级数**发散**(divergent).

例 4.1.3 (1) **等比级数**(geometri series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots,$$

当公比 q 的绝对值小于 1 时，级数是收敛的，这是因为

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

因此,收敛等比级数的和为$\frac{a}{1-q}$.

(2) **调和级数**(harmonic series)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的,这是因为部分和数列$\left\{S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}$为无界(例 1.3.18).

且可证明

$$S_n = \ln n + \gamma + \gamma_n,$$

γ_n 为无穷小量,γ 为 Euler 常数(例 1.3.2).

(3) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

收敛,且和为 1. 这是因为部分和数列

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right] = 1-\frac{1}{n+1},$$

所以$\lim_{n\to\infty} S_n = 1$.

4.1.2 级数收敛性的基本定理

定理 4.1.4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

应该注意,这不是级数收敛的充分条件. 例如调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,虽有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$,但级数是发散的(例 4.1.3(2)).

定理 4.1.5 级数

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+k} + \cdots$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 第 m 项后的**余式**.

级数与它的任何余式有相同的收敛性,即由任何一个余式的收敛(或发散),可以推断原级数也收敛(或发散). 反之亦然.

定理 4.1.6 从一个级数中任意变更有限项(如增加或删去,修改或交换项序等)所得到的新级数,与原级数有相同的收敛性.

定理 4.1.7 对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项任意加括号而得到的新级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{u}_k = \underbrace{(u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1})}_{\bar{u}_1} + \underbrace{(u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2})}_{\bar{u}_2} + \cdots + \underbrace{(u_{n_{k-1}} + \cdots + u_{n_k})}_{\bar{u}_k} + \cdots$$

也是收敛的,且和不变.

但应注意,本定理的逆定理不成立,即,若加括号后的新级数收敛,原级数未必收敛. 例如,由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 每两项加括号得到的新级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 显然收敛为 0,但原级数却是发散的.

定理 4.1.8 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,c 为常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 亦收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

定理 4.1.9 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

准则 4.1.10 Cauchy 收敛准则 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 N,当 $n \geqslant N$ 时,使对任何自然数 p,成立不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{p} u_{n+i}\right| < \varepsilon.$$

例 4.1.11 对于调和级数 $\sum_{n} \frac{1}{n}$,不论 N 取多大,当 $p = N$ 时,总有

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{N+i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N+i} = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+N}$$
$$> N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

可见不存在这样的 N,使对任何自然数 p 都有

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{N+i} < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

因而由上述 Cauchy 准则知,调和级数发散.

4.1.3 正项级数的判敛

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项都是非负的,即 $u_n \geqslant 0 (n=1,2,\cdots)$,这样的级数称为正项级数(series with nonnegative terms). 事实上,只要级数从某项开始,以后各项同号,即可作为正项级数来研究. 对于正项级数有如下一些判敛方法.

定理 4.1.12 正项级数收敛的充要条件是:级数的部分和数列$\{S_n\}$有上界.

例 4.1.13 (1) 研究正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 的收敛性.

解 该级数的部分和数列$\{S_n\}$为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

显然有

$$S_n\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

由上述定理知级数收敛.

(2) 研究正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解 该级数的部分和数列为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=\ln(n+1).$$

显然 S_n 上方无界,由上述定理知级数发散.

定理 4.1.14 比较准则(comparison test) 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$,若存在常数 $c>0$ 及正整数 N,使当 $n>N$ 时有不等式

$$u_n\leqslant c\,v_n$$

成立,则:

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 亦收敛.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 亦发散.

例 4.1.15 关于 p-级数(p-series) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>0)$ 的收敛性.

解 当$0<p\leqslant 1$时，$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$. 由于调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的(例 4.1.11)，因此从比较准则知道，p -级数亦发散.

当 $p>1$ 时，令 $p=1+\lambda(\lambda>0)$，于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}},\qquad \lambda>0.$$

我们选择收敛的正确级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{\lambda}}-\frac{1}{n^{\lambda}}\right]$$

为比较级数，由中值公式(定理 2.2.5)知

$$\frac{1}{(n-1)^{\lambda}}-\frac{1}{n^{\lambda}}=\frac{\lambda}{\xi^{1+\lambda}},\qquad \xi\in(n-1,n).$$

因此有

$$\frac{1}{n^{1+\lambda}}<\frac{1}{\xi^{1+\lambda}}=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{(n-1)^{\lambda}}-\frac{1}{n^{\lambda}}\right].$$

所以由上述比较准则知，当 $p>1$ 时，p -级数收敛.

定理 4.1.16 比较准则的极限形式(limiting form of the comparison test) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$为两个正项级数，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k,$$

则：

(1) 若 $k<+\infty$，由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛可断定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

(2) 若 $k>0$，从级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散可以断定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

例 4.1.17 研究$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\frac{1}{n}}}$的收敛性.

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/n^{1+\frac{1}{n}}}{1/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，所以

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ 也发散.

定理 4.1.18 d'Alembert(达朗贝尔) **比率法**(d'Alembert ratio test) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,并记 $D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$,若

$$\lim_{n \to +\infty} D_n = D,$$

则:

(1) 当 $D<1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $D>1$(或为 ∞) 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注意,若 $D=1$,本判敛法不能对收敛性作出判断. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛,也可能发散. 比如 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}(p>0)$ 就是一例. 例 4.1.15 指出,$p \leqslant 1$ 时级数发散. $p>1$ 时级数收敛,但对任何 p 均有

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = D = 1.$$

例 4.1.19 研究 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n (x>0)$ 的收敛性.

解 因为

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \lim \frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{\mathrm{e}},$$

因此由 d'Alembert 判敛法知道:当 $x>\mathrm{e}$ 时,级数发散. 当 $x<\mathrm{e}$

时，级数收敛. 对于 $x=e$ 的情形，需作进一步分析，考虑到 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调递增趋于 e，因此必定有 $D_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，也就是说 $u_n \not\to 0$，所以可判定级数发散.

在用 d'Alembert 判敛法时，若出现极限 $\lim\limits_{n\to\infty} D_n$ 不存在的情况，可换用 D_n 的上、下极限来判敛.

定理 4.1.20 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则：

(1) 当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, D_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\overline{D}<1$ 时，级数收敛.

(2) 当 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, D_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\underline{D}>1$ 时，级数发散.

定理 4.1.21 Cauchy 根式判敛法(Cauchy root test) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=\rho$，则：

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数收敛.

(2) 当 $\rho>1$ 时，级数发散.

注意，当 $\rho=1$ 时，对级数的收敛性不能作出断言. 即级数可能收敛，也可能发散. 如 p -级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>0)$，对任何 p 值有 $\rho=1$，但 $p\leqslant 1$ 时级数发散，$p>1$ 时级数却收敛.

在出现极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}$ 不存在的情况时，可换用上极限来判敛.

定理 4.1.22 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}=\bar{\rho}$，则：

(1) $\bar{\rho}<1$ 时级数收敛.

(2) $\bar{\rho}>1$ 时级数发散.

Cauchy 根式判敛法要比 d'Alembert 比率法为精确. 凡用比率法能判定收敛性的，用根式法也一定能判定. 这是因为，从极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ 的存在，可以证明必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，但反过来却不一定. 如下例.

例 4.1.23 研究 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n-(-1)^n}$ 的收敛性.

解 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}}=\frac{1}{2}<1$，所以由 Cauchy 根式法知级数收敛. 但如果用 d'Alembert 方法来判敛，由于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}D_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在，无法作出判断.

定理 4.1.24 Cauchy 积分判敛法(Cauchy integral test). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\{u_n\}$ 为单调递减数列. 若有一个连续的单调递减正值函数 $f(x)(x\geqslant1)$，使有

$$f(n)=u_n,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与积分数列 $\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$ $\left(\text{或广义积分}\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)$ 有相同的收敛性.

例 4.1.25 用 Cauchy 积分判敛法来研究 p -级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$ 的收敛性.

解 取 $f(x)=\frac{1}{x^p}(x>0)$，由广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant1\end{cases}$$

可知，当 $p>1$ 时，p -级数收敛. $p\leqslant1$ 时 p -级数发散.

定理 4.1.26 对数判敛法(logarithm test) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，若当 $n\geqslant N$ 时有

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \geqslant q > 1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;若当 $n \geqslant N$ 时 有

$$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} \leqslant 1,$$

则级数发散.

例 4.1.27 研究 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}(x > 0)$ 的收敛性.

解 因为$\frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = -\ln x$,根据上述对数判敛法可知:当 $x < \frac{1}{e}$ 时级数收敛;$x \geqslant \frac{1}{e}$时级数发散.

定理 4.1.28 **Raabe(拉阿伯)判敛法**(Raabe test) 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,记数列$\{R_n\}$ 为

$$R_n = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right),$$

其中 $D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ (定理 4.1.18).若

$$\lim_{n \to \infty} R_n = R,$$

则:当 $R > 1$ 时(包括$+\infty$),级数收敛;当 $R < 1$ 时,级数发散.

同样,当 $R = 1$ 时,Raabe 判敛法不能给出判断.

例 4.1.29 研究 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$ 的收敛性.

解 此级数若用 d'Alembert 法来判敛,由于$\lim_{n \to \infty} D_n = 1$,而无法得到结论.我们用较精密的 Raabe 方法来判敛,由于

$$R_n = n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right) = \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \frac{3}{2} > 1$,因而级数收敛.

定理 4.1.30 Bertrand(贝特朗)判敛法(Bertrand test) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数. 并记数列$\{B_n\}$为

$$B_n = (\ln n)\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = (\ln n)(R_n - 1),$$

其中 R_n 见定理 4.1.28.若

$$\lim_{n\to\infty} B_n = B.$$

则:当 $B>1$ 时级数收敛,当 $B<1$ 时级数发散.

同样,若 $B=1$,Bertrand 方法也不能给出判断.

例 4.1.31 对于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 无论用 d'Alembert 方法或 Raabe 方法来判敛,都不能给出判断,但更为精密的 Bertrand 方法却可断定其发散. 这是因为,对于调和级数有

$$B_n = \ln n\left[n\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} - 1\right) - 1\right] \equiv 0.$$

定理 4.1.32 Gauss 判敛法(Gauss test) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,并记数列$\{G_n\}$为

$$G_n = n(\ln n)\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n(\ln n)\left(1 - \frac{1}{n} - D_n\right),$$

其中 $D_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$(定理 4.1.18),若

$$\lim_{n\to\infty} G_n = G,$$

则：当 $G>1$ 时级数收敛，当 $G<1$ 时级数发散.

同样，若 $G=1$，Gauss 方法不能给出判断.

例 4.1.33 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{(n+1)!\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)}$，

α,β,γ 都大于零，称为 **Gauss 超越几何级数**（transcendental geometric series）. 研究其收敛性.

解 因为 $D_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$，

$$R_n=n\left(\frac{1}{D_n}-1\right)=n\left[\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}-1\right],$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=1+[\gamma-(\alpha+\beta)]$. 根据 Raabe 判敛法知道，当 $\gamma-(\alpha+\beta)>0$，即 $\gamma>(\alpha+\beta)$ 时，级数收敛. 当 $\gamma-(\alpha+\beta)<0$，即 $\gamma<(\alpha+\beta)$ 时，级数发散. 但对于 $\gamma=\alpha+\beta$ 的情形，Raabe 法不能给出判断，为此用更精确的 Gauss 方法：

$$G_n=n(\ln n)\left(1-\frac{1}{n}-D_n\right)=n(\ln n)\left[1-\frac{1}{n}-\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\right],$$

当 $\gamma=\alpha+\beta$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}G_n=0<1,$$

因此 Gauss 超越几何级数在 $\gamma=\alpha+\beta$ 时发散.

4.1.4 任意项级数

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 不是同号级数，即级数中既有无穷多个正项，又有无穷多个负项，则称其为**任意项级数或变号级数**（series with variable signs）.

定理 4.1.34 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则原级数必定收敛.

定义 4.1.35　绝对收敛(absolute convergence)　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为**绝对收敛**.

例 4.1.36　级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{\cosh n}$ 为绝对收敛,这是因为

$$\left|\frac{\cos n}{\cosh n}\right| \leqslant \frac{1}{\cosh n} < 2\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ 是收敛的等比级数,因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{\cosh n}\right|$ 也收敛.

定义 4.1.37　若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,但不绝对收敛,则称其为**条件收敛**(conditional convergence).

定义 4.1.38　形如:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, \qquad u_n > 0,\ n = 1,2,\cdots$$

的级数称为**交错级数**(alternating series).

定理 4.1.39　Leibniz 判敛法(Leibniz test)　若交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\ u_n > 0$$

满足条件:

(1) $\{u_n\}$为单调递减数列.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

则级数收敛. 且对和数 S 及余和有如下估值:

$$|S| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\right| < u_1,$$

$$|S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}u_k\right| < u_{n+1}.$$

例 4.1.40 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛，这是因为它显然满足上面判敛法所述之条件，因此收敛．但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ 是发散的，故为条件收敛．

定理 4.1.41 Dirichlet 判敛法(Dirichlet test) 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n + \cdots$$

在满足条件：

(1) $\{b_n\}$ 为单调减数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界，即

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right| \leqslant M, \qquad n = 1,2,\cdots$$

时收敛．

例 4.1.42 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\phi}{n^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\phi}{n^p}$ 的收敛性，其中 $p>0$.

解 由于

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{\phi}{2}(\cos\phi+\cos 2\phi+\cdots+\cos n\phi)\\
&=\left(\sin\frac{3\phi}{2}-\sin\frac{\phi}{2}\right)+\left(\sin\frac{5\phi}{2}-\sin\frac{3\phi}{2}\right)\\
&\quad+\cdots+\left(\sin\frac{(2n+1)\phi}{2}-\sin\frac{(2n-1)\phi}{2}\right)\\
&=\sin\frac{(2n+1)\phi}{2}-\sin\frac{\phi}{2}.
\end{aligned}$$

于是有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos k\phi\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{\phi}{2}\right|},$$

可见当 $\phi\neq 2k\pi$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\phi$ 的部分和数列有界. 此外，数列 $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ 当 $p>0$ 时为单调减趋于零. 因此根据 Dirichlet 判敛法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\phi}{n^p}$ 收敛. 而当 $\phi=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，级数相应成为 p-级数，因此 $p>1$ 时收敛，$p\leqslant 1$ 时发散. 用同样的方法可以证明，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\phi}{n^p}$ 对任意的 ϕ 值是收敛的.

定理 4.1.43　Abel(阿贝尔)**判敛法**(Abel test)　若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots$$

满足条件：

(1) $\{b_n\}$是单调有界数列.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

则该级数收敛.

例 4.1.44　研究 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{Arctan} n}{n}$ 的收敛性.

解　因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛，数列$\{\operatorname{Arctan} n\}$单调有界. 根据上述 Abel 判敛法知道，级数收敛.

4.1.5　绝对收敛级数与条件收敛级数的某些特性、级数加快收敛法

定理 4.1.45　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数，其中的正项记作

$u_{n_i}(i=1,2,\cdots)$，负项记作 $u_{n_j}(j=1,2,\cdots)$. 那么：

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_{n_i}$ 和 $\sum_{j=1}^{\infty} u_{n_j}$ 都收敛.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_{n_i}$ 和 $\sum_{j=1}^{\infty} u_{n_j}$ 都发散.

定理 4.1.46 绝对收敛级数具有可交换性. 即，由绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 经无穷次交换项序后所得到的新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k}$ 仍然绝对收敛，且和不变.

可交换性对条件收敛的级数一般不成立. 例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 条件收敛，且可证明

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \\
&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots \\
&=\ln 2(\text{例 } 4.3.9),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots \\
&= 0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0 \\
&\quad +\frac{1}{10}+0-\frac{1}{12}+0+\cdots \\
&= \ln\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

若将这两个级数的对应项相加，则得到一新的级数

$$\begin{aligned}
&1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+0+\cdots \\
&=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots \\
&=\ln 2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

不难看出，这是 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 的一种换序级数，虽然收敛，但其和已与原级数的和不同.

定理 4.1.47 Riemann 定理 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛，则总可以通过适当重排该级数的各个项而得到一个新的换序级数 $\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_k}$，使其收敛于任何预先给定的数，或使其发散.

有些级数虽然收敛，但收敛速度很慢（主要反映在级数通项趋于零的速度较慢）. 为了改善其收敛状况，这里介绍一种常用的加快收敛方法.

一种加快收敛的方法(a method of accelerating convergence)

设有收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \qquad u_n \neq 0.$$

若对于某一已知收敛和的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n = v$，有关系式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = r, \qquad r \neq 0$$

成立，则我们可以用变换式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = r\,v + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - r\,v_n)$$

来加快级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛速度. 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n - r\,v_n}{u_n} = 1 - r\cdot\frac{1}{r} = 0,$$

因此当 $n\to\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - r\,v_n)$ 的通项要比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的通项趋于零的速度为快. 例如：为了改善级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性，可以

利用级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1 \text{（即 } r = 1\text{）},$$

于是有变换式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

不难看出，等式右端级数的通项为$\frac{1}{n^3}$量级，因此趋于零的速度当然比$\frac{1}{n^2}$要快.

如果用级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\right) = 2$来改善收敛，则可得到收敛更快的变换式（仍有 $r=1$）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}\right)$$

$$= 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(4n^2 - 1)}.$$

可以看出，变换式的通项为$\frac{1}{n^4}$量级.

级数相乘的两种排列方式　级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$相乘时，可对乘积项 $u_i v_j$（$i, j = 1, 2, \cdots$）作多种方式的排列，其中常见的为两种：

(1) 对角线方式

$$
\begin{array}{|ccccccc}
u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
u_2v_1 & & u_2v_2 & & u_2v_3 & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & \\
u_3v_1 & & u_3v_2 & & u_3v_3 & & \cdots \\
& \swarrow & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中 $c_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1$. 这种排列方式称为级数的 Cauchy 乘积.

(2) 正方形方式

$$
\begin{array}{|ccccccc}
u_1v_1 & & u_1v_2 & & u_1v_3 & & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
u_2v_1 & \leftarrow & u_2v_2 & & u_2v_3 & & \cdots \\
& & & & \downarrow & & \\
u_3v_1 & \leftarrow & u_3v_2 & \leftarrow & u_3v_3 & & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_n\right)=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_2+u_2v_1)+(u_1v_3+u_2v_3+u_3v_3+u_3v_2+u_3v_1)+\cdots.$$

定理 4.1.48 Cauchy 定理 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛,其和分别为 U 与 V. 则它们各项之积 $u_nv_m(n,m=1,2,\cdots)$ 按任何方法排列所构成的级数也绝对收敛,且和为 UV. 即

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} v_{m_k} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m\right) = UV.$$

定理 4.1.49 Mertens(默滕斯)定理 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛为 U、V. 且其中有一个为绝对收敛. 则它们的 Cauchy 乘积(级数相乘的对角线方式)

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n-k+1}\right)$$

也收敛,且和为 UV.

注意,两个条件收敛级数的 Cauchy 乘积不一定收敛. 例如,由条件收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 自乘所得的 Cauchy 乘积就是发散的.

4.1.6 二重级数

定义 4.1.50 由双重附标无穷数集 $a_{i,j}(i,j=1,2,\cdots)$ 所得到的运算符号:

$$a_{1,1}+a_{2,1}+\cdots+a_{i,1}+\cdots+a_{1,2}+a_{2,2}+\cdots+a_{i,2}+\cdots+\cdots$$

$$+a_{1,j}+a_{2,j}+\cdots+a_{i,j}+\cdots+\cdots=\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$$

称为**二重级数**(double series). 为研究方便,将数集的元素排成无穷矩阵:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \cdots & a_{i,1} & \cdots & \rightarrow i \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \cdots & a_{i,2} & \cdots \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \cdots & a_{i,3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,j} & a_{2,j} & a_{3,j} & \cdots & a_{i,j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \downarrow j \end{array}$$

其中 i 为列指标，j 为行指标. 当 m、n 无限增大时，若部分和

$$A_{m,n}=\sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} a_{i,j}$$

有有穷极限(设为 A)，即

$$\lim_{m,n\to\infty} A_{m,n}=A,$$

则称**二重级数收敛**，且和为 A，记作

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}=A.$$

否则，称**二重级数发散**.

显然，二重级数收敛的必要条件为

$$\lim_{i,j\to\infty} a_{i,j}=0.$$

定义 4.1.51 若将无穷矩阵中的某一行元素依次相加，所得级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$$

称为**行级数**(repeated series by rows). 再将行级数依次相加，所得运算符号：

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j},$$

称为**累级数**(repeated series). 自然，交换次序可得另一种累级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

若行级数收敛(设和为 A_j)，且级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ 也收敛(设和为 A_*)，则称**累级数** $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$ **收敛**，收敛和为 A_*. 同样，若级数 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 收敛(设和为 A_i)，且级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 也收敛(设和为 A^*)，则称**累级数** $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ **收敛**，收敛和为 A^*.

定理 4.1.52 二重级数与累级数的关系 若二重级数及行级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$ 都收敛，则累级数 $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$ 也必定收敛，且与二重级数有相同的和数. 即

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

类似地，若二重级数及列级数 $\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 都收敛，则累级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 也必定收敛，且与二重级数有相同的和数. 即

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}.$$

当 $a_{i,j} \geqslant 0$ 时，二重级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 称为正项二重级数，对于正项二重级数的收敛性有下列定理.

定理 4.1.53 正项级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 收敛的充要条件是部分和有上界. 即有常数 M，使

$$A_{m,n} = \sum_{i,j=1}^{i=m,j=n} a_{i,j} \leqslant M, \qquad m,n = 1,2,\cdots.$$

定理 4.1.54 正项级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 与累级数 $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$，$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 有相同的收敛性及收敛和.

定理 4.1.55 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与正项二重级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 是由完全相同的项构成，则二者有相同的收敛性及收敛和.

定理 4.1.56 若 $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$ 收敛，则 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 也收敛.

定义 4.1.57 若 $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$ 收敛，则称**二重级数** $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ **绝对收敛**；若 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 收敛，而 $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{i,j}|$ 发散，则称**二重级数** $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ **条件收敛**.

定理 4.1.58 若二重级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 绝对收敛，则累级数 $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}$，$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 必定收敛，且与二重级数有相同的和数.

定理 4.1.59 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与二重级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$ 由相同项构成，则它们具有相同的绝对收敛性.

定理 4.1.60 绝对收敛的二重级数有可交换性.

定义 4.1.61 设有 r 个下标 $i,j,\cdots,l$ 的无穷数组

$$a_{i,j,\cdots,l}, \qquad i,j,\cdots,l = 1,2,\cdots,$$

则称运算符号

$$\sum_{i,j,\cdots,l=1}^{\infty} a_{i,j,\cdots,l}$$

为**多重**（**r-重**）**级数**（multiple series）. 若部分和

$$A_{m,n,\cdots,q} = \sum_{i,j,\cdots,l=1}^{i=m,j=n,\cdots,l=q} a_{i,j,\cdots,l},$$

当 $m,n,\cdots,q\to\infty$ 时有有穷极限 A，则称此**多重级数收敛**，且和为 A. 否则称为**发散**.

多重级数的收敛性理论可效仿上面的二重级数收敛理论加以推广得到.

4.1.7 无穷乘积

定义 4.1.62 **无穷乘积及其收敛性**（infinite product and its convergence） 设

$$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$$

为一无穷非零实数列,称运算符号

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n \cdot \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} b_n$$

为**无穷乘积**.若部分积

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} b_k,$$

当 $n \to \infty$ 时有有穷极限 $P(\neq 0)$,则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **收敛**,且无穷乘积的值为 P, 否则称为**发散**.

例 4.1.63 研究 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \dfrac{\theta}{2^n}$ 的收敛性.

解 因为 $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{\theta}{2^k} = \dfrac{\sin \theta}{2^n \sin \dfrac{\theta}{2^n}}$,故

$$\lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \theta}{2^n \sin \dfrac{\theta}{2^n}} = \frac{\sin \theta}{\theta},$$

因此,当 $\sin \theta \neq 0$ 时,$\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \dfrac{\theta}{2^n}$ 是收敛的,收敛值为 $\dfrac{\sin \theta}{\theta}$. 特别地,当 $|\theta|$ 很小时,收敛值接近于 1;而当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时,有

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \cdots$$
$$= \frac{2}{\pi}.$$

定义 4.1.64 从无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 中舍去前 m 个因子后得

$$\pi_m = \prod_{n=m+1}^{\infty} b_n = b_{m+1} \cdot b_{m+2} \cdot \cdots \cdot b_{m+k} \cdot \cdots,$$

称之为**余乘积**(remainder product).

定理 4.1.65 无穷乘积与其任何一个余乘积有相同的收敛性.

定理 4.1.66 变动无穷乘积有限个因子的值或序,不影响其收敛性.

定理 4.1.67 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的必要条件是:只有有限个负因子,且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

为此,不妨总假定 $b_n > 0$.

定理 4.1.68 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛的充要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n$$

收敛. 且若 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln b_n = B$,则

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = P = \mathrm{e}^B.$$

例 4.1.69 无穷乘积

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \cdots$$

是收敛的. 这是因为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{n+1}{n}$$

$$= \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{2}{3} + \cdots + \ln \frac{2n}{2n-1} + \ln \frac{2n}{2n+1} + \cdots$$

是一个收敛的交错级数.

定理 4.1.70 设 $b_n = 1 + \beta_n$,若 n 足够大时,恒有 $\beta_n > 0$(或 $\beta_n < 0$). 则无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \beta_n)$ 收敛的充要条件是:级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$ 收敛.

定义 4.1.71 无穷乘积的绝对收敛 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln b_n$ 绝对收敛$\left(\text{从而有无穷乘积}\prod_{n=1}^{\infty}b_n\text{ 收敛}\right)$,则称**无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛.**

定理 4.1.72 对于绝对收敛的无穷乘积,可以任意重排其因子而不改变它的值.即,绝对收敛的无穷乘积有可交换性.

定理 4.1.73 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\beta_n)$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|$ 收敛.

定理 4.1.74 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散为 0 的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln b_n$ 发散为 $-\infty$.

数 $\frac{\pi}{2}$ 的无穷乘积展开式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\cdots$$

称为 **Wallis 公式**(Wallis formula).

数 $\frac{2}{\pi}$ 的无穷乘积展开式

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\cdots$$

(例 4.1.63)

称为 **Viéte(韦达)公式**(Viéte formula).

正弦与余弦的无穷积展开

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=x\cdot\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\cdots,$$

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}\right) \cdot \cdots.$$

双曲正弦和双曲余弦的无穷积展开

$$\sinh x = x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \cdots$$

$$\cosh x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}\right) \cdot \cdots.$$

指数函数 e^x 的无穷积展开

$$e^x = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n\gamma}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{x}{\gamma}}},$$

式中 γ 为 Euler 常数(例 1.3.2(13)).

Γ 函数的无穷积展开

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Riemann $\zeta(x)$ 函数的无穷积展开

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}}, \qquad x > 1,$$

式中$\{p_k\}$是全部素数的递增序列，即

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11, \cdots.$$

4.2 函数项级数

4.2.1 基本概念

定义 4.2.1 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$是定义在数集 E 上的一个函数序列，则运算符号

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

称为 E 上的**函数项级数**(series with function terms).

定义 4.2.2 设有函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(x \in E)$. 若对于点 $x_0 \in E$，数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为函数项级数的**收敛点**(point of convergence). E 中全部收敛点之集合 I 称为函数项级数的**收敛域**(domain of convergence).

定义 4.2.3 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 I，其前 n 项之和

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = s_n(x)$$

称为**部分和函数**(partial sum function)(序列).

对应收敛域 I 中的每一个 x，有惟一确定的和数 $S(x)$. 因此 $S(x)$ 是定义在 I 上的一个函数，称之为**和函数**(sum function). 同时称函数项级数在 I 上收敛为和函数 $S(x)$，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \qquad x \in I.$$

与此平行，$S(x)$一定是函数序列$\{s_n(x)\}$的极限函数，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = S(x).$$

例 4.2.4　等比级数(geometric series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$$

的部分和函数为

$$s_n(r) = 1 + r + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

当$|r|<1$时有

$$\lim_{n\to\infty} s_n(r) = \frac{1}{1-r}.$$

所以等比级数的收敛域 I 是$|r|<1$，且和函数为 $S(x)=\frac{1}{1-r}$. 即

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \qquad |r|<1.$$

定义 4.2.5　设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$（函数序列$\{s_n(x)\}$）在区间 I 上收敛于和函数 $S(x)$. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关，而与 x 无关的 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N(\varepsilon)$时，有不等式

$$|s_n(x) - S(x)| < N(\varepsilon), \qquad x \in I$$

成立．则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 或$\{s_n(x)\}$ **在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$.**

准则 4.2.6　一致收敛的 Cauchy 准则(Cauchy criterion for uniform convergence)　函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充要条件是：对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N(\varepsilon) > 0$，使当 $n > N(\varepsilon)$ 时，对一切自然数 p，有

$$|s_{n+p}(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon, \qquad x \in I.$$

定理 4.2.7 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的必要条件是：函数序列 $\{u_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛为零、即对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)>0$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，成立不等式

$$|u_n(x)|<\varepsilon, \qquad x\in I.$$

定理 4.2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$（或 $\{s_n(x)\}$）在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|r_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|S(x)-s_n(x)|=0.$$

例如，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ 在 $[0,1)$ 上收敛，但不是一致收敛，这是因为函数序列 $\{r^n\}$ 在 $[0,1)$ 上不一致趋于零．不过对于无论多小的 $\eta>0$，等比级数在区间 $[0,1-\eta]$ 上是一致收敛为和函数 $\frac{1}{1-r}$ 的．这是因为

$$\begin{aligned}\sup_{r\in[0,1-\eta]}|s_n(r)-S(r)|&=\sup_{r\in[0,1-\eta]}\left|\frac{1-r^n}{1-r}-\frac{1}{1-r}\right|\\&=\sup_{r\in[0,1-\eta]}\frac{r^n}{1-r}\leqslant\frac{(1-\eta)^n}{\eta},\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，必定有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{r\in[0,1-\eta]}|s_n(r)-S(r)|=0.$$

定理 4.2.9 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$（或 $\{s_n(x)\}$）在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是：对于 I 中的任何点列 $\{x_n\}$，有

$$|r_n(x_n)|=|S(x_n)-s_n(x_n)|\to 0.$$

例如，$x+\sum_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$ 在 $[0,1)$ 上非一致收敛于和函数 $S(x)=0$. 这是因为，若取 $\{x_n\}=\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$，则有

$$|r_n(x_n)| = |0-(x_n)^n| = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

定理 4.2.10 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 在区间 I 上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上也一致收敛．并称为**绝对一致收敛**.

注意，绝对一致收敛不同于绝对收敛加上一致收敛. 当然，前者可以包含后者，但反过来却不一定．例如 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在区间$[0,1]$上既是一致收敛也是绝对收敛，但并非绝对一致收敛.

4.2.2 一致收敛的判别法

一致收敛判别法(Weierstrass M-test) 设有函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，若存在收敛的正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}M_n,$$

使对于 $x\in I$，有不等式

$$|u_n(x)|\leqslant M_n, \qquad n=1,2,\cdots$$

成立，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上绝对一致收敛，且称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 为其**强级数**(dominant series). 本判别法又称 **M-判别法**或**强级数判别法**.

例如，函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 当 $p>1$ 时在$(-\infty,\infty)$上一致收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>1)$ 为其强级数.

一致收敛判别法(Dini(狄尼)test) 设$\{u_n(x)\}$的各项都是

有限区间$[a,b]$上的连续同号函数，且$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上收敛于连续函数$S(x)$，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上必定一致收敛于$S(x)$.

一致收敛判别法(Dirichlet test)　函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$在满足下列条件时，在区间$I$上一致收敛：

(1) 部分和序列$\{s_n(x)\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right\}$在$I$上一致有界.

(2) 对于每个$x \in I$，$\{b_n(x)\}$是随n的单调序列，且在区间I上$\{b_n(x)\}$一致趋于零(定理 4.2.7).

注 4.2.11　若对于一切$x \in I$及自然数n，都存在常数$M > 0$，使$|s_n(x)| \leqslant M$，就称函数列$\{s_n(x)\}$在I上一致有界.

例 4.2.12　证明：$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$[0,1]$上一致收敛.

证　取$a_n(x) = (-1)^n$；$b_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. 则有$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \leqslant 2$ $(x \in [0,1]; n = 1,2,\cdots)$. 此外，对于每个$x \in [0,1]$，序列$\{b_n(x)\}$显然是单调递减的. 又因为对于任给的$\varepsilon > 0$，必存在这样的自然数$N$，使当$n > N$时有$\left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^n < \varepsilon$. 于是在$n > N$时有

$$|b_n(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad x \in [0,1]$$

$\left(\text{因为当 } x \in \left[\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, 1\right] \text{时}, |b_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^n < \varepsilon; \text{当 } x \in \left[0, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\right) \text{时}, |b_n(x)| \leqslant x^2 < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\right)$. 因此，由 Dirichlet 判别法知

道级数在[0,1] 上一致收敛.

一致收敛判别法(Abel test)　函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 在满足下列条件时,于区间 I 上一致收敛:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 上一致收敛;

(2) 对于每个 $x\in I$,序列 $\{b_n(x)\}$ 是单调的;

(3) $\{b_n(x)\}$ 在区间 I 上一致有界.

例 4.2.13　证明:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^{n+1}}(x+n)^n$ 在[0,1] 上一致收敛.

证　取 $a_n(x)=\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^n}{n}$;$b_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在[0,1] 上一致收敛, 及对于任何 $x\in[0,1]$, 序列 $\{b_n(x)\}$ 是单调的,且 $|b_n(x)|<3$ ($x\in[0,1]$;$n=1,2,\cdots$). 因此,根据 Abel 判别法知道,级数在[0,1]上一致收敛.

4.2.3　一致收敛函数项级数的性质

定理 4.2.14　和函数的连续性(continuity of sum function)　设函数序列 $\{u_n(x)\}$ 的每项函数都在区间 I 上连续,若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$,则和函数 $S(x)$ 在 I 上连续.

推论 4.2.15　设 $u_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 I 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上收敛于 $S(x)$. 若 $S(x)$ 在 I 上不连续,则这种收敛必定是非一致收敛.

例 4.2.16　函数项级数

$$x+\sum_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$$

在$(-1,1]$上收敛于和函数

$$s(x)=\begin{cases}0, & -1<x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

由于级数的每项函数(x^n-x^{n-1}) $(n=2,3,\cdots)$在$(-1,1]$上都是连续的,而$S(x)$却不连续,因此必定为非一致收敛.

定理 4.2.17　逐项取极限(term by term limiting process)

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛,$x_0$为$I$的一个聚点,且$\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)(n=1,2,\cdots)$存在,则

$$\lim_{x\to x_0}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0}u_n(x)\right\},\qquad x_0\in I.$$

例 4.2.18　求$\lim\limits_{x\to 0^+}\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}\right\}$.

解　取$a_n(x)=\dfrac{1}{2^n}$, $b_n(x)=\dfrac{1}{n^x}$. 由 Abel 判敛法可知,级数在$[0,\delta](\delta>0)$上一致收敛$\left(因为\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)在[0,\delta]上一致收敛,\{b_n(x)\}在[0,\delta]上单调减,且一致有界|b_n(x)|\leqslant 1\right)$. 又因$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{2^n n^x}=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$,故当$x\to 0^+$时,可逐项取极限. 即

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2^n n^x}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

定理 4.2.19　逐项积分(term by term integration)　若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛,且各项函数$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$I$上连续(或可积). 则

$$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x,\qquad [a,b]\in I.$$

例 4.2.20 求$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x\ (|r|<1)$.

解 利用三角恒等式

$$\cos(n+1)x+\cos(n-1)x=2\cos nx\cos x,$$

很容易证明

$$(1-2r\cos x+r^2)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx\right]=1-r^2.$$

因此有

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx.$$

当$|r|<1$时,等式右端的函数项级数显然在$[-\pi,\pi]$上一致收敛$\left(因为\sum_{n=1}^{\infty}|r|^n为其强级数\right)$.于是可以逐项积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}r^n\cos nx\ \mathrm{d}x$$
$$=2\pi.$$

定理 4.2.21 **逐项微分**(term by term differentiation) 若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上收敛,$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$I$上有连续导函数$u'_n(x)$,且$\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$在$I$上一致收敛.则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x),\qquad x\in I.$$

例 4.2.22 证明:Riemann ζ-函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},\qquad x>1$$

有连续导函数.

证 任取$\varepsilon>0$,则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$[1+\varepsilon,+\infty)$上收敛,$\left(\frac{1}{n^x}\right)'=$

$-\dfrac{\ln n}{n^x}(n=1,2,\cdots)$ 在$[1+\varepsilon,+\infty)$连续，且函数项级数

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$$

在$[1+\varepsilon,+\infty)$上一致收敛$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^{1+\varepsilon}}\text{为其强级数}\right)$. 根据定理 4.2.21 及定理 4.2.14 可知，$\zeta(x)$在$[1+\varepsilon,+\infty)$上逐项可微，且导函数连续．又考虑到 ε 的任意性，$\zeta'(x)$应在 $x>1$ 处存在和连续.

4.3 幂级数

4.3.1 基本概念

定义 4.3.1 形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$ 的函数项级数，称为**幂级数**(power series). 式中 x_0；$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$都是实常数. 不失一般性，通常可用下列简单形式来讨论($x_0=0$)：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

定理 4.3.2 Abel 定理 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在点$x_0(\neq 0)$收敛，则它一定在区间$(-|x_0|,|x_0|)$内绝对收敛；若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在点$x_0'(\neq 0)$发散，则它一定在区间$[-|x_0'|,|x_0'|]$外发散.

定义 4.3.3 由定理 4.3.2 可以推知，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛

域是以原点为中心的区间．若以 $2R(0\leqslant R\leqslant+\infty)$ 表示区间的长度，则称 R 为幂级数的**收敛半径**(radius of convergence)，$(-R,R)$ 为幂级数的**收敛区间**(interval of convergence).

注意，在端点 $x=R$ 及 $x=-R$ 处的收敛性，需分别另作具体分析.

定理 4.3.4 设有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho,$$

则此幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}$（当 $\rho=0$ 时，$R=+\infty$；当 $\rho=+\infty$ 时，$R=0$).

定理 4.3.5 Cauchy-Hadamard(柯西-阿达玛)定理 设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho,$$

则幂级数的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}$（$\rho=0$ 时，$R=+\infty$；$\rho=+\infty$ 时，$R=0$).

例 4.3.6 (1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^n}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$. 这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$ 的收敛半径 $R=0$. 这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

(3) 幂级数

$$1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\frac{x^4}{2^4}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}}+\frac{x^{2n}}{2^{2n}}+\cdots$$

的收敛半径为 $R=2$，这是因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{2}$. 而且很容易看出，在端点 $x=\pm2$ 处级数发散.

4.3.2 幂级数性质

定理 4.3.7 幂级数的一致收敛性(uniform convergence of a power series) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R(\neq0)$，则在收敛区间 $(-R,R)$ 内的任何一个闭区间上，幂级数一致收敛．如果在端点 $x=R$ 处级数收敛，那么级数在 $[0,R]$ 上一致收敛．若在 $x=R$ 处级数发散，则级数在 $[0,R)$ 上必为非一致收敛.

定理 4.3.8 幂级数和的连续性(continuity of sum of power series) 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内连续．且如果级数在端点 $x=R$(或 $-R$)处收敛，则和函数在端点处也连续(单侧连续).

例 4.3.9 函数 $\ln(1+x)$ 在 $(-1,1)$ 上有幂级数展开式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,$$

且级数在 $x=1$ 处收敛．因此可以由和函数的连续性来求级数在 $x=1$ 处的收敛值，即

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdot+\cdots=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln 2.$$

定理 4.3.10 幂级数的逐项积分(term by term integration for power series) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可以逐项积分，且逐项积分后所得幂级数之收敛半径不变，即

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad x \in (-R, R).$$

定理 4.3.11　幂级数的逐项微分(term by term differentiation for power series)　幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R,R)$内可以任意次逐项微分,且收敛半径不变. 即

$$\frac{\mathrm{d}^k S(x)}{\mathrm{d}x^k} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(a_n x^n),$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k},$$

$$x \in (-R, R); \quad k = 1, 2, \cdots.$$

例 4.3.12　(1) 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$在收敛区间$(-1,1)$上的和函数.

解　设和函数为$S(x)$,根据上述幂级数的逐项微分和逐项积分性质可得

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

$$= \frac{1}{1+x^2}, \qquad |x| < 1$$

及

$$S(x) = \int_0^x s'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x.$$

因此

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad x \in (-1, 1).$$

(2) 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$在收敛区间$(-1,1)$上的和函数.

解　设和函数为$S(x)$,并记$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$,则$S(x) =$

$x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sigma(x)$. 因此只要求出 $\sigma(x)$, $S(x)$ 也就知道了. 由幂级数的逐项积分性质可得

$$\int_0^x\sigma(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\qquad |x|<1.$$

于是有

$$\sigma(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

及

$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2},$$

所以

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\qquad -1<x<1.$$

4.3.3 幂级数的运算

定义 4.3.13 若两个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad 及 \quad \sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

在 $x=0$ 的某邻域内有相同的和函数,则称它们在此邻域内等同,并记作

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\qquad |x|<\delta.$$

定理 4.3.14 若

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\qquad |x|<\delta.$$

则 $a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

定理 4.3.15　常数乘幂级数　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，λ 为常数，则

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) x^n, \qquad |x| < R.$$

定理 4.3.16　幂级数的加法、乘法、乘方　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2；并记 $R = \min\{R_1, R_2\}$，则：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n \ (|x| < R)$，

(2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ (|x| < R)$，

其中 $c_n = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0)$. 特别有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n, \quad |x| < R_1$$

及

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \qquad |x| < R_1,$$

其中 q_n 由系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 相应的加法乘法运算得到.

定理 4.3.17　幂级数的复合运算　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ 的收敛半径分别为 R 与 $\bar{R}$，且均不为零. 若 $|a_0| < \bar{R}$，则由复合所得幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} P_m x^m,$$

必定有大于零的收敛半径. 其中 P_m 为等式左边合并 x^m 项后所得系数.

定理 4.3.18　幂级数的除法　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有大于 0 的收敛半径 R_1，R_2，且 $a_0 \neq 0$，则幂级数

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

有小于 R_1 和 R_2 的非零收敛半径．其中 c_n 可以由关系式

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

两边比较 x 同幂项系数所得方程组

$$b_n = c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_n a_0, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

逐个解出.

4.3.4　Taylor 级数

定义 4.3.19　设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处任意次可导，则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots,$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的 **Taylor 级数**. 相应系数称为 **Taylor 系数**. 特别地，当 $x_0 = 0$ 时有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots,$$

并称它为函数 $f(x)$ 的 **Maclaurin 级数**.

值得注意的是，$f(x)$ 的 Taylor 级数未必一定收敛于 $f(x)$. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 点的各阶导数均为 0(例 2.1.16),因此它的 Maclaurin 级数为

$$0+0x+\frac{0}{2!}x^2+\cdots+\frac{0}{n!}x^n+\cdots,$$

显然这个级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛为 0 而不是 $f(x)$.

定义 4.3.20 若在 x_0 的某个邻域上等式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0|<\delta$$

成立. 则称 $f(x)$ 在 x_0 的这一邻域上可以展成幂级数, 并称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 为其**幂级数展开式**(expansion in power series).

定理 4.3.21 幂级数展开式的惟一性(uniqueness of power series expansion) 设 $f(x)$ 在 x_0 点任意次可导,若

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad |x-x_0|<\delta,$$

则等式右端必定是 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 级数,即 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

定理 4.3.22 设 $f(x)$ 在 x_0 点任意次可导,则 $f(x)$ 在 x_0 点某邻域上可以展成幂级数的充要条件是:在此邻域内有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x-x_0)=0,$$

式中 $R_n(x-x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点的 Taylor 余项(定理 2.2.13).

函数的幂级数展开法(methods for function represented by power series)

(1) 直接展开法

直接展开就是通过直接计算 $f(x)$ 在 x_0 点的各阶导数以求得相应的 Taylor 级数,同时在适当范围内证明 Taylor 余项趋于 0.

例如，计算函数 $\sin x$ 在 $x=0$ 点的各阶导数可得到相应的 n 阶 Taylor 公式：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n + R_n(x),$$

按 Lagrange 型余项

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{n+1}{2}\pi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \xi \text{在} 0,x \text{之间}.$$

由于对任何 x 有

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty,$$

所以得到 $\sin x$ 在 $x=0$ 点的幂级数展开式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$
$$-\infty < x < +\infty.$$

(2) 间接展开法

间接展开是利用某些已知的函数幂级数展开式，并配以适当的变量代换或其他幂级数运算来得到所需的函数幂级数展开式. 常用的方法有

① 逐项积分、逐项微分法　例如

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^{2n+1})'$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x (-1)^n x^n \mathrm{d}x\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad -1<x\leqslant 1.$$

② 变量代换法　例如，$\ln x$ 在 $x=2$ 处的幂级数展开式可利用上述展开式得到，即

$$\ln x=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}(x-2)^{n+1},$$

且由不等式 $-1<\frac{x-2}{2}\leqslant 1$ 知道展开式应在 $0<x\leqslant 4$ 上成立.

③ 四则运算法　例如，$\frac{x}{x^2-2x-3}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开，可以化为两个等比级数的差，即

$$\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-\frac{1}{3^n}\right]x^n, \qquad |x|<1.$$

又如，$\sec x$ 在 $x=0$ 的幂级数展开，可以借助 $\cos x$ 的展开式及幂级数除法运算来进行，即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots.$$

④ 复合法　例如，函数$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$在$x=0$的幂级数展开式，可借助$e^u$及$\ln(1+x)$的展开式得到，即

$$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots}$$

$$=1+\left(\frac{-x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4-\frac{959}{2304}x^5+\cdots.$$

⑤ 反演法　例如，由

$$y=\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\cdots,$$

并令

$$x=\operatorname{Arcsin} y=y+b_3y^3+b_5y^5+b_7y^7+\cdots,$$

代入上式可得

$$b_3=\frac{1}{6},\quad b_5=\frac{3}{40},\quad b_7=\frac{5}{112},\cdots,$$

所以

$$\operatorname{Arcsin} x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots.$$

公式　基本的函数幂级数展开式(standard expansions in power series for functions)

(1) $$e^x=e^{x_0}\left[1+(x-x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\cdots\right],\quad -\infty<x<+\infty.$$

特别当$x_0=0$时有

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad -\infty<x<+\infty.$$

(2) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\quad -\infty<x<+\infty.$$

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$

$$-\infty<x<+\infty.$$

(4) $\operatorname{Arcsin} x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5}\cdot x^5+\cdots$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\cdot\frac{1}{(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots,$$

$$-1\leqslant x\leqslant 1.$$

(5) $\operatorname{Arctan} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$

$$-1\leqslant x\leqslant 1.$$

(6) $\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$

$$-\infty<x<+\infty.$$

(7) $\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$

$$-\infty<x<+\infty.$$

(8) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,$

$$-1<x\leqslant 1.$$

(9) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\qquad -1<x<1.$$

在收敛区间的端点 $x=\pm 1$ 上敛散情况为:

$x=1$:$\alpha>0$ 时绝对收敛;$-1<\alpha<0$ 时条件收敛;$\alpha\leqslant -1$ 时发散.

$x=-1$:$\alpha>0$ 时绝对收敛;$\alpha<0$ 时发散.

定义 4.3.23 记函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

的 Maclaurin 级数为

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n$$
$$= 1 + \frac{\beta_1}{1} x + \frac{\beta_2}{2!} x^2 + \frac{\beta_3}{3!} x^3 + \frac{\beta_4}{4!} x^4 + \cdots + \frac{\beta_n}{n!} x^n + \cdots,$$

其中前 n 个数的值为

$$\beta_1 = -\frac{1}{2},\ \beta_2 = \frac{1}{6},\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = -\frac{1}{30},\ \beta_5 = 0, \cdots.$$

记 $B_n = (-1)^{n-1} \beta_{2n}$,得

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66}, \cdots,$$

称这些数 B_n 为 Bernoulli 数(Bernoulli numbers B_n).

记函数 $\sec x$ 的 Maclaurin 级数为

$$\sec x = E_0 + \frac{E_2}{2!} x^2 + \frac{E_4}{4!} x^4 + \cdots + \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \cdots,$$

其中的 $|x| < \frac{\pi}{2}$,E_{2n} 称为 Euler 数(Euler numbers E_{2n}). 前几个数的值为

$$E_0 = 1, \quad E_2 = +1, \quad E_4 = 5, \quad E_6 = +61, \cdots.$$

Stirling (斯特林)公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

定理 4.3.24 Weierstrass 定理 若 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则存在一多项式函数序列 $\{P_n(x)\}$,它在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. $P_n(x)$ 的一种选择为

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-k}.$$

4.4 Fourier 级数

4.4.1 基本概念

定义 4.4.1 设$\{\phi_n(x)\}(n=0,1,2,\cdots)$是区间$[a,b]$上的一族可积且平方可积函数(记作 $\phi_n(x)\in L^2(a,b)$).若

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m\neq n, \\ \lambda_n > 0, & m=n. \end{cases}$$

则称$\{\phi_n(x)\}$是$[a,b]$上的一族**正交函数系**(system of orthogonal functions). $\sqrt{\lambda_n}$称为**范数**(norm),记作 $\|\phi_n\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)\mathrm{d}x}$,同时称$\left\{\dfrac{\phi_n(x)}{\|\phi_n\|}\right\}$为**规范正交函数系**(system of normal orthonormal functions).且显然有

$$\int_a^b \frac{\phi_m(x)}{\|\phi_m\|}\cdot\frac{\phi_n(x)}{\|\phi_n\|}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m\neq n, \\ 1, & m=n. \end{cases}$$

注意,对于复函数系$\{\phi_n(x)\}$,正交的含意为$\int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}\mathrm{d}x=0$ $(m\neq n)$,式中$\overline{\phi_m(x)}$为 $\phi_m(x)$的共轭函数.

例 4.4.2 (1)三角函数系

① 三角函数系

$$\left\{1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\cdots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\cdots\right\}$$

在$[-l,l]$上(或任何一个长为$2l$ 的区间上)正交.其规范正交函数系为

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\cdots,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},\cdots\right\}.$$

② 当 $l=\pi$ 时,可得到$[-\pi,\pi]$上的正交三角函数系:

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

及其规范正交系：

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \cdots\right\}.$$

③ 当 $l=\frac{\pi}{\omega}$ 时，可得到在 $\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$ 上正交的三角函数系：

$$\{1, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \cdots, \cos n\omega x, \sin n\omega x, \cdots\}.$$

④ 当 $l=\frac{b-a}{2}$ 时，又可得到一般区间 $[a,b]$ 上的正交三角函数系：

$$\left\{1, \cos\frac{2\pi x}{b-a}, \sin\frac{2\pi x}{b-a}, \cos\frac{4\pi x}{b-a}, \sin\frac{4\pi x}{b-a}, \cdots,\right.$$

$$\left.\cos\frac{2n\pi x}{b-a}, \sin\frac{2n\pi x}{b-a}, \cdots\right\}$$

⑤ 复变量形式的三角函数系（$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$）：

$$\{\cdots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}, \cdots\}$$

也是 $[-\pi, \pi]$ 上的正交系.

（2）设 $\{\mu_n\}$ 为零阶 Bessel（贝塞尔）函数

$$\mathrm{J}_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}$$

的正根递增序列，则以 ρ 为自变量的函数系：

$$\left\{\sqrt{\rho}\,\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)\right\}, \quad n=1,2,\cdots$$

在区间 $[0,R]$ 上正交．其规范正交系为

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{R\mathrm{J}_0{}'(\mu_n)}\sqrt{\rho}\,\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)\right\}.$$

(3) Legendre(勒让德)多项式系

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n(x^2-1)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},\qquad n=0,1,2,\cdots$$

在区间$[-1,1]$上正交.它的规范正交系为

$$\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}\mathrm{P}_n(x)\right\},\qquad n=0,1,2,\cdots.$$

定义 4.4.3 设$\{\phi_n(x)\}(n=0,1,2,\cdots)$为$[a,b]$上的正交函数系,则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n(x)$$

称为一**正交级数**(orthogonal series).其中 c_n 为任意实数.

若积分

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots$$

存在,并取

$$c_n=\frac{1}{\|\phi_n\|^2}\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

则称此 $c_n(n=0,1,2,\cdots)$为 $f(x)$关于$\{\phi_n(x)\}$的 **Fourier**(**傅里叶**)**系数**(Fourier coefficients).相应的正交级数 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n(x)$ 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 级数**(Fourier series),记作

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n(x)\quad\left(c_n=\frac{1}{\|\phi_n\|^2}\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x\right).$$

Fourier 级数的几种形式

设 $f(x)$在区间 I 上绝对可积,则:

(1) 当 $I=[-l,l]$时,有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

(2) 当 $I=[-\pi,\pi]$时,有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

由于 $\|1\| = \sqrt{2\pi}$, $\|\cos nx\| = \sqrt{\pi}$, $\|\sin nx\| = \sqrt{\pi}$ ($n=1$, $2,\cdots$),于是

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

其复数形式为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1},$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots.$$

(3) 当 $I=[0,l]$时分别有余弦级数和正弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} \quad \text{(余弦级数)},$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots;$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \quad \text{（正弦级数）},$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

类似地，当 $l=\pi$ 时，可以得到$[0,\pi]$上的余弦级数和正弦级数.

（4）当 $I=\left[-\frac{\pi}{\omega},\frac{\pi}{\omega}\right]$时，有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\,\omega x + b_n\sin n\,\omega x),$$

其中

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\cos n\,\omega x\ \mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(x)\sin n\,\omega x\ \mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

（5）当 $I=[\alpha,\beta]$时，有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha}\right),$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

或

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left[\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] + b_n \sin\left[\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right] \right\},$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\cos\left[\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\sin\left[\frac{2n\pi}{\beta-\alpha}\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

定义 4.4.4　函数的 Fourier 级数展开式(expansion of a function in Fourier series)　若 $f(x)$的 Fourier 级数

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x) \qquad \left(c_n = \frac{1}{\|\phi_n\|^2}\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x\right)$$

在$[a,b]$上除有限点外,处处收敛于 $f(x)$,则称这个 Fourier 级数为 **$f(x)$在$[a,b]$上关于正交函数系$\{\phi_n(x)\}$的 Fourier 级数展开式**,并记作

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x), \qquad x \in [a,b].$$

特别地,当$\{\phi_n(x)\}$为$[-\pi,\pi]$上的正交三角函数系时,有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx), \qquad x \in [-\pi,\pi].$$

定义 4.4.5　设$\{\phi_n(x)\}$($n=0,1,2,\cdots$)是$[a,b]$上的一正交函数系.若等式

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

意味着 $f(x)\doteq 0$(记号"$\doteq$"表示几乎处处相等,即除开一个测度为

0 的点集外均相等)，则称$\{\phi_n(x)\}$在区间$[a,b]$上是一个**完备正交系**(complete orthogonal system).

定理 4.4.6 三角函数系

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$$

是$[-\pi,\pi]$上的完备正交系.

定理 4.4.7 惟一性定理 设$\{\phi_n(x)\}$是$[a,b]$上的一个完备正交系. 若 $f(x)$和 $g(x)$关于$\{\phi_n(x)\}$有相同的 Fourier 级数. 则

$$f(x) \doteq g(x), \qquad x \in [a,b].$$

特别地，就连续函数而言，一个正交级数只能是一个连续函数的 Fourier 级数.

定理 4.4.8 设$\{\phi_n(x)\}$是$[a,b]$上的完备正交系. 若正交级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$一致收敛，则它必定是和函数的 Fourier 级数.

特别地，若区间$[-\pi,\pi]$上的有界可积函数 $f(x)$可以在这个区间上展开成三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则这级数必定是它的 Fourier 级数.

4.4.2 Fourier 系数的性质

定理 4.4.9 最佳均方逼近(best approach of mean square)

设$\{\phi_n(x)\}$是 $L^2(a,b)$(定义 4.4.1)中的一个完备规范正交系，f 为L^2 中的任意函数，它的 Fourier 级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x)$. 同时记

$$f_n = \sum_{m=0}^{n} c_m \phi_m(x)$$

为 f 的 n 阶 Fourier 多项式. 则在形如

$$\Phi_n = \sum_{m=0}^{n} \gamma_m \phi_m(x) \qquad (\gamma_m \text{ 为任意实数})$$

的一切 n 阶多项式中，以 f_n 为 f 的最佳均方逼近，即

$$\int_a^b (f-f_n)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (f-\Phi_n)\mathrm{d}x.$$

Bessel 不等式(Bessel inequality)　设 $c_n(n=0,1,2,\cdots)$为函数 $f(x)$关于$[a,b]$上完备规范正交系$\{\phi_n(x)\}$的 Fourier 系数，则不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

称为 **Bessel 不等式**.

特别地，对于 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 三角级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其系数应满足不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^2 + b_n^2] \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

定义 4.4.10　设$\{\psi_n(x)\}$是$[a,b]$上的可积函数序列，若当 $n\to\infty$时，数列

$$\delta_n^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)-\psi_n(x)]^2 \mathrm{d}x$$

收敛于 0，则称$\{\psi_n(x)\}$**均方收敛**(square average convergence)**于** $\boldsymbol{f(x)}$.

Parseval（帕塞瓦尔）等式——封闭性公式（Parseval equality——closed formula）　设$\{\phi_n(x)\}$是$[a,b]$上的完备规范正交系，$f(x)\in L^2(a,b)$. 则 $f(x)$的 Fourier 多项式

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m \phi_m(x)$$

均方收敛于 $f(x)$的充要条件是：Bessel 不等式(4.1)中的等号成立．即有 Parseval 等式

$$\sum_{n=i}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

特别地，对于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 三角多项式

$$f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

均方收敛于 $f(x)$ 的充要条件是：等式

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n^2+b_n^2]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

成立. 且称此等式为 Parseval **等式**或三角函数系的**封闭性公式**.

引理 4.4.11 Riemann 引理 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上绝对可积，则

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}x=0 \quad 及 \quad \lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x=0$$

或

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=0.$$

定理 4.4.12 Riemann-Lebesgue 定理 绝对可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的系数收敛于 0. 即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0.$$

且当下列条件之一成立时便有 $a_n=b_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$：

(1) 在 $[-\pi,\pi]$ 上 f 单调增有界.

(2) 在 $[-\pi,\pi]$ 上 f 分段单调.

(3) 在 $[-\pi,\pi]$ 上 f 有有界变差(定义 3.3.3).

定理 4.4.13 Mercer(麦切尔)定理 设 $\{\phi_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的完备规范正交系，且 $|\phi_n(x)|\leqslant H$(一致有界). 则 $[a,b]$ 上任一绝对可积函数关于 $\{\phi_n(x)\}$ 的 Fourier 系数，当 $n\to\infty$ 时收敛于 0.

4.4.3 Fourier 级数的收敛性

Fourier 三角级数部分和的积分表示式 函数 $f(x)$ 的Fourier

级数部分和可表示为 Dirichlet 含参积分：

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.$$

定理 4.4.14　收敛的局部化(localization of convergence)　函数 $f(x)$的 Fourier 级数在一点处的收敛性，只与函数 f 在该点处任意小邻域上的性质有关.

Dini 判敛法(Dini test)　若有常数 s_0，使函数

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s_0}{t}$$

在某个 $\delta>0$ 的闭区间$[0,\delta]$上绝对可积，即

$$\int_0^{\delta}\left|\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s_0}{t}\right|\mathrm{d}t<\infty,$$

则 $f(x)$的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛于 s_0. 特别地，对于满足条件

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\mathrm{d}t<\infty$$

的一切 x，$f(x)$的 Fourier 级数收敛于 $f(x)$.

Lipschitz 判敛法(Lipschitz test)　若函数 $f(x)$在点 x 处连续，且对于充分小的 $\delta>0$，有

$$|f(x\pm\delta)-f(x)|<L\delta^{\alpha}\qquad (\text{常数 } L>0, 0<\alpha\leqslant 1),$$

则 $f(x)$的 Fourier 级数在点 x 处收敛于 $f(x)$.

定理 4.4.15　设 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，若它在$[-\pi,\pi]$上分段光滑(即区间内除有限个点之外，$f'(x)$处处连续. 而在 $f'(x)$不连续的点上，$f'(x)$的左右极限存在)，则其 Fourier 级数在点 x 处收敛于$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Dirichlet-Jordan 判敛法(Dirichlet-Jordan test) 设 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数且在$[-\pi,\pi]$上有有界变差. 则 $f(x)$的 Fourier 级数处处收敛于$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Dirichlet 判敛法(Dirichlet test) 设 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数,且在$[-\pi,\pi]$上分段单调,仅有有限个第一类间断点. 则 $f(x)$的 Fourier 级数在每一点 x 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

注意在(定理 4.4.15)及两个 Dirichlet 判敛法中,如果 x 是连续点,则收敛于 $f(x)$,在端点$\pm\pi$ 处收敛于$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$.

4.4.4 Fourier 级数的一致收敛性

定理 4.4.16 Dini 定理 设 $f(x)$为$[-\pi,\pi]$上的连续函数,若对于$[-\pi,\pi]$上的一切 x 有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|\mathrm{d}t<\infty,$$

且当 $t=0$ 时积分对于 x 一致收敛. 则函数 $f(x)$的 Fourier 级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于 $f(x)$.

定理 4.4.17 Lipschitz 定理 设 $f(x)$是$[-\pi,\pi]$上的连续函数,且满足条件

$$|f(x')-f(x)|\leqslant L|x'-x|^{\alpha},$$
$$-\pi\leqslant x,x'\leqslant\pi,\text{常数}L>0,0<\alpha\leqslant 1,$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在$[-\pi,\pi]$内的任何一个闭区间$[a,b]$$(-\pi<a<b<\pi)$上一致收敛于 $f(x)$.

特别地,当 f 在$[-\pi,\pi]$上有有界导数 $f'(x)$或分段单调时,结论成立.

定理 4.4.18 Dirichlet-Jordan(狄利克雷-约当)定理 若函

数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续并有有界变差，且

$$f(-\pi)=f(\pi),$$

则 f 的 Fourier 级数在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于 $f(x)$.

在定理 4.4.16—定理 4.4.18 中都提及函数的连续性条件. 值得注意的是，仅有连续条件是不足以保证收敛的，对此有下面的定理.

定理 4.4.19 Reymond(雷蒙)定理 连续函数的 Fourier 级数未必到处收敛.

4.4.5 Fourier 级数的逐项积分与逐项微分

定理 4.4.20 Fourier 级数的逐项积分(term-by-term integration for Fourier series) 设 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，且在$[-\pi,\pi]$上分段连续(定义 1.4.7). 则它的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

不论收敛与否，均可在任意区间$[a,b]$上逐项求积分. 即 f 的积分总可由逐项积分求得：

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_b^a\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x\\&=\frac{a_0}{2}(b-a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[a_n(\sin nb-\sin na)\\&\quad-b_n(\cos nb-\cos na)].\end{aligned}$$

Fourier 级数的逐项微分运算，一般是不许可的. 除非导函数 f'有较好的性质：

定理 4.4.21 Fourier 级数的逐项微分(term-by-term differentiation for Fourier series) 设 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数. $f'(x)$在$[-\pi,\pi]$上分段光滑，则 $f(x)$的 Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

对任何 x 有

$$\frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2}=\left(\frac{a_0}{2}\right)'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-n\,a_n\sin nx).$$

4.4.6 Fourier 级数的求和

Gibbs(吉布斯)现象(Gibbs phenomenon)　设$\{\phi_n(x)\}$是定义在 x_0 点右邻域上的函数序列,且

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\phi(x)\quad 及\quad \lim_{x\to x_0^+}\phi(x)=\phi(x_0+0).$$

若当 $n\to\infty$ 及 $x\to x_0^+$ 时有不等式

$$\limsup_{\substack{n\to\infty\\ x\to x_0^+}}\phi_n(x)>\phi(x_0+0)\qquad (或<\phi(x_0+0)),$$

则称$\{\phi_n(x)\}$在 x_0 的右方具有 **Gibbs 现象**.

Gibbs 现象是 Fourier 级数求和过程中在第一类间断点处出现的奇特现象.

例 4.4.22　Gibbs 现象　函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$的正弦 Fourier 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

其和函数 $S(x)$在 $x=0$ 点为第一类间断. 在该点的右邻域上 $S(x)=\frac{\pi-x}{2}$. 此外,级数之部分和函数序列$\{s_n(x)\}$可表示为

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\int_0^x(\cos t+\cdots+\cos n\,t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]-\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x}{2} + \int_0^{(n+\frac{1}{2})x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$+ \int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x}{2} + \int_0^{nx} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + o(1).$$

函数 $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ 在 $x = \pi, 3\pi, 5\pi, \cdots$ 有极大值，在 $x = 2\pi, 4\pi, \cdots$ 有极小值. 由于积分

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{k\pi + t}\mathrm{d}t$$

的绝对值是 k 的递减序列，因此极大值序列是递减的，极小值序列是递增的. 于是

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\to 0^+} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

但是，和函数 $s(x)$ 在 $x=0$ 点的右极限却是 $\frac{\pi}{2}$，显然有

$$S(0+0) = \frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

这样就出现了奇特的 Gibbs 现象：在 $\left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ 上的连续曲线 $s_n(x)$（注意 $s_n(0)=0$），当 $n\to\infty$ 时凝集于 y 轴上的 $\left[0, \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right]$ 线段，而不是想像中的 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 线段，线段长度增大近

$$\frac{\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\frac{\pi}{2}} \approx 1.179$$

倍.

定理 4.4.23 有界变差函数 f 的 Fourier 级数在它的第一类间断点处(也只有在这种点处)出现 Gibbs 现象.

正如定理 4.4.19 所指出的,甚至在 f 的连续点,其 Fourier 级数也可能有发散的. 在这种情况下,若还是按通常的收敛概念来计算部分和 $s_n(x)$ 就变得毫无意义. 为解决这一问题,Fejér(费耶)在 1904 年证明了:若 $s_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数部分和,当 x 为 f 的连续点时,成立等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_n(x)}{n+1}=f(x).$$

稍后,Lebesgue 又证得这个等式不仅在连续点,就是在不连续点上述极限等于 $[f(x-0)+f(x+0)]/2$. 这一命题使 Fourier 级数理论出现了新的转折.

定义 4.4.24 设

$$\boldsymbol{T}=(\alpha_{m,n}),\qquad m=0,1,2,\cdots;n=0,1,2,\cdots$$

是一个无穷矩阵,对于数列$\{s_n\}$定义变换 τ_m:

$$\tau_m=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{m,n}s_n,\qquad m=0,1,2,\cdots.$$

假定所有这些级数都是收敛的. 若当 $m\to\infty$时,极限

$$\lim_{m\to\infty}\tau_m=s$$

存在,则称 **s_n 有 $\boldsymbol{T}$-极限 s,或称 s_n 是($\boldsymbol{T}$)收敛于 s**,记作

$$s_n\to s(\boldsymbol{T}).$$

同时也称方法 T 对$\{s_n\}$是有效的. 显然(T)收敛具有线性特征,即若 $s_n\to s(\boldsymbol{T})$,$r_n\to r(\boldsymbol{T})$,则对于任意常数 a、b 有

$$(as_n+br_n)\to(as+br)(\boldsymbol{T}).$$

当 $\alpha_{m,n}=0(m\neq n)$,$\alpha_{m,m}=1$ 时,有 $\tau_m=s_m$,这种(T)收敛就是通常的收敛.

如果 s_n 是无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 的部分和,而 $s_n\to s(\boldsymbol{T})$,则称级数

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 为(T)可和于 s，记作

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s(\boldsymbol{T}).$$

如果某(T)求和法能使每个收敛级数都可和于原来的和，即 $s_n \to s$ 意味着 $s_n \to s(\boldsymbol{T})$. 那么称该$(T)$求和法为**正则求和法**(regular summation).

定理 4.4.25 Toeplitz(特普利茨)定理 (T)求和法为正则的充要条件是：存在与 m 无关的 R，使

$$R_m = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{m,n}| < R, \qquad m = 0,1,2,\cdots,$$

且对于每个 n，当 $m \to \infty$ 时

$$\alpha_{m,n} \longrightarrow 0 \quad \text{及} \quad r_m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{m,n} \longrightarrow 1.$$

定义 4.4.26 若 T 的元素取为

$$\alpha_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}, & n \leqslant m, \\ 0 & n > m. \end{cases}$$

则有

$$\tau_m = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_m}{m+1},$$

我们称这种(T)求和法为$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{1})$**求和法**(summation)，或**算术平均求和法**(arithmetic mean summation). 显然，这种求和法是正则的.

定理 4.4.27 Fejér 定理 $f(x)$的 Fourier 级数在连续点 x 为$(c,1)$可和于 $f(x)$. 在跳跃点为$(c,1)$可和于 $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$. 而在任何 f 连续的闭区间上为一致可和于 f.

定理 4.4.28 Weierstrass 定理 周期为 2π 的连续函数 f，可用三角多项式一致逼近. 即对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在三角多项式

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

使不等式

$$| f(x) - T_n(x) | < \varepsilon$$

在整个数轴上一致地成立.

4.4.7 Fourier 级数的应用

例 4.4.29 单簧管是一端封闭,另一端开放的细管. 管内气柱声压分布函数 $p(x,t)$ 可通过求解下列双曲型方程定解问题得到.

$$\begin{cases} p_{tt} - a^2 p_{xx} = 0, & 0<x<l, t>0, \\ p(0,t) = 0 \ (\text{开端}); & p_x(l,t) = 0 \ (\text{闭端}), \\ p(x,0) = \psi(x), & 0<x<l, \\ p_t(x,0) = \phi(x), & 0<x<l. \end{cases}$$

由分离变量法可得到下列形式解:

$$p(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right) \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

其中系数 a_n, b_n 则由声压初始分布函数 $\psi(x)$ 和 $\phi(x)$ 确定. 即从关系式

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

及

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{(2n+1)\pi a}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$$

可知, a_n 及 $b_n \frac{(2n+1)\pi a}{2l}$ 应分别为 $\psi(x)$ 和 $\phi(x)$ 的 Fourier 系数. 所以

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{4}{(2n+1)\pi a}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x.$$

例 4.4.30 半径为 R 的无穷长圆柱体,初始温度处处为 $u_0(\neq 0)$. 若将圆柱表面突然置于保持恒温为 0 的条件下,求圆柱内温度分布函数 $u(\rho,t)$.

解 $u(\rho,t)$满足抛物型方程定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta_{\rho,\phi}u = 0, & 0<\rho<R, \quad t>0, \\ u(R,t)=0, & t>0, \\ u(\rho,0)=u_0, & 0\leqslant\rho\leqslant R. \end{cases}$$

由分离变量法可知,该定解问题有下列形式的解

$$u(\rho,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left[-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t\right]\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right),$$

其中 μ_n 为零阶 Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(x)$的第 n 个零点. 系数 c_n 则可利用初始条件由关系式

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)$$

确定. 因为这个等式若要成立,右端必定是函数 $u(\rho,0)=u_0$ 的 Fourier-Bessel 级数展开. 由此可得 c_n 为

$$c_n = \frac{2}{R^2\mathrm{J}_1^2(\mu_n)}\int_0^R u_0\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho = \frac{2u_0}{\mu_n\mathrm{J}_1(\mu_n)},$$

于是

$$u(\rho,t) = 2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n\mathrm{J}_1(\mu_n)}\exp\left(-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t\right)\mathrm{J}_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right).$$

例 4.4.31 如图 4.1,在半径为 R 的接地球导体外,离球心 a 处放置点电荷 q,则球外电场的电势分布函数 $u(r,\theta)$可表示为

$$u(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + U(r,\theta),$$

等式右端第一项为点电荷产生的电势，其中 r_1 为点电荷到空间点 M 的距离．第二项 $U(r,\theta)$ 为球上感应电荷产生的电势．它应满足 Laplace（拉普拉斯）方程

$$\Delta_{r,\theta,\phi}U = 0.$$

由分离变量法知道该方程有下列形式解：

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n r^n + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta),$$

其中 $\mathrm{P}_n(\cos\theta)$ 为 $\cos\theta$ 的 n 阶 Legendre 多项式．考虑到 $r\to\infty$ 时，U 有界，故 $c_n=0$．于是

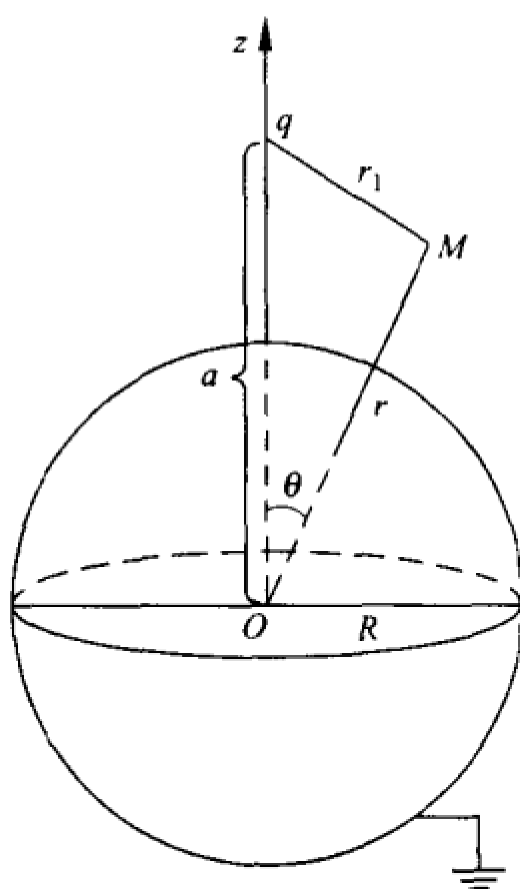


图 4.1 球外电场

$$\begin{aligned}u(r,\theta) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{r^{n+1}}\mathrm{P}_n(\cos\theta)\\ &= \frac{q/4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{a^2-2ar\cos\theta+r^2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{r^{n+1}}\mathrm{P}_n(\cos\theta)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{qr^n}{4\pi\varepsilon_0 a^{n+1}} + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta).\end{aligned}$$

为了求出系数 D_n，我们利用球面 $r=R$ 处的边界条件 $u=0$．即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{qR^n}{4\pi\varepsilon_0 a^{n+1}} + \frac{D_n}{R^{n+1}}\right)\mathrm{P}_n(\cos\theta) = 0.$$

如果等式成立，则左端应是零函数的 Fourier-Legendre 展开式．因此有

$$D_n = -\frac{qR^{2n+1}}{4\pi\varepsilon_0 a^{n+1}}.$$

从而

$$u(r,\theta) = \frac{q/4\pi\varepsilon_0}{\sqrt{a^2-2ar\cos\theta+r^2}} - \frac{Rq}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R^2}{a}\right)^n\frac{\mathrm{P}_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}.$$

5 广义积分

5.1 无穷限广义积分

5.1.1 基本概念

定义 5.1.1 设 $f(x)$定义在$[a,+\infty)$(或$(-\infty,b]$)上，且对任何 $u>a$(或 $v<b$)，$f(x)$在$[a,u]$(或$[v,b]$)上可积，若 $\lim\limits_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\left(\text{或}\lim\limits_{v\to-\infty}\int_v^b f(x)\mathrm{d}x\right)$存在，则称为**无穷限广义积分**(improper Riemann integral)或在$[a,+\infty)$或$(-\infty,b]$上收敛，并记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\quad\left(\text{或}\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{v\to-\infty}\int_v^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

若极限不存在，则称无穷限广义积分发散，仍记作

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\quad\left(\text{或}\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x\right).$$

例如，无穷限广义积分$\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}\mathrm{d}x(a>0)$当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

定义 5.1.2 对于任一数 c，若无穷限积分$\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，则称无穷限广义积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}}\int_v^u f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

是收敛的，否则是发散的.

5.1.2 收敛性判别法

在本节中,假设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \geqslant a$ 上有定义,且对任何 $u \geqslant a$,它们在 $[a,u]$ 上都可积.

定理 5.1.3 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是:$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$,使得当 $A_1, A_2 > N$ 时,都有 $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

定理 5.1.4 若 $a < b$,则广义积分 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_b^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

定理 5.1.5 若在 $[a, +\infty)$ 上 $f(x) \geqslant 0$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$ 为 u 的有界函数,即 $\exists M \geqslant 0$, $\forall u > a$,有

$$\left|\int_a^u f(x)\mathrm{d}x\right| < M.$$

定理 5.1.6 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也必收敛.

定义 5.1.7 若 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛,则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为**绝对收敛**(absolute convergent). 若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛而不绝对收敛,则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为**条件收敛**(conditional convergent).

定理 5.1.8 若 $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x) = \lambda \neq 0$,则当 $p > 1$ 时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,当 $p \leqslant 1$ 时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 5.1.9 **比较判别法**(comparison test) 若在 $x \geqslant a$ 时,恒有 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,则:

(1) 当$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时,$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 5.1.10 比较判别法的极限形式(comparison test in limiting form) 若在$x \geqslant a$时,$g(x) > 0$,且$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/g(x) = c$,于是:

(1) 当$0 < c < +\infty$时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.

(2) 当$c = 0$,且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

(3) 当$c = \infty$,且$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散,则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

定理 5.1.11 Dirichlet 判敛法 设$\int_a^u f(x)\mathrm{d}x$在$u > a$上有界且单调下降函数$g(x) > 0$有$\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$,则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

定理 5.1.12 若函数$f(x) \geqslant 0$在$[1, +\infty)$上单调下降,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$与$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.

定义 5.1.13 若$\lim\limits_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称此极限值为$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的 Cauchy 主值(Cauchy principal value),简称**主值**,记作 v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$,也称为在主值意义下广义积分存在.

定理 5.1.14 若$f(x)$为奇函数,且在任何有限区间上可积,则 v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

定理 5.1.15 若$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = I$存在,则 v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = I$;反之不一定成立.

5.2 无界函数的广义积分

5.2.1 基本概念

定义 5.2.1 设 $f(x)$ 在$(a,b]$上或$[a,b)$上有定义,但对 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在$[a+\varepsilon,b]$上或$[a,b-\varepsilon]$上$(0<\varepsilon<b-a)$无界,则称点 a 或 b 为 $f(x)$ 的**瑕点**(singular point).

定义 5.2.2 无界函数的广义积分(1) 设点 a 为 $f(x)$ 的瑕点,对任一 $\varepsilon > 0$, $f(x)$ 在$[a+\varepsilon,b]$上可积. 若$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称此极限为**无界函数 $f(x)$ 的广义积分**(improper integral of unbounded function),并称它是收敛的,且记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$;否则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是发散的.

例如,无界函数的广义积分$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}\mathrm{d}x$ $(a<b)$,当 $q<1$ 时收敛,当 $q\geqslant 1$ 时发散.

定义 5.2.3 无界函数的广义积分(2) 若瑕点 c 在$[a,b]$的内部,则定义无界函数的广义积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon'\to 0\\ \varepsilon''\to 0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right].$$

只有当右端两个积分都收敛时左端才收敛,若右端有一个发散,则左端发散.

5.2.2 收敛性判别法

下面假设 $f(x),g(x)$ 有瑕点 a，且 $f(x),g(x)$ 在$[a+\varepsilon,b]$ $(0<\varepsilon<b-a)$ 上可积.

定理 5.2.4 Cauchy 收敛准则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $a<x_1,x_2<a+\delta\leqslant b$ 时，恒有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

定理 5.2.5 在 $a<c\leqslant b$ 上$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

定理 5.2.6 若 $f(x)$ 是非负的，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是 $\varphi(u)=\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 u 的有界函数.

定理 5.2.7 若$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定义 5.2.8 若$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为**绝对收敛**. 若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛而不绝对收敛，则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为**条件收敛**.

定理 5.2.9 设$\lim\limits_{x\to a}(x-a)^q f(x)=\lambda\neq 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant 1$ 时发散.

定理 5.2.10 比较判别法 设在 $a<x\leqslant b$ 上，$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，则：

(1) 当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

(2) 当$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

定理5.2.11 若在(a,b)上$g(x)>0$,且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$,于是:

(1) 当$0<c<+\infty$时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.

(2) 当$c=0$且$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

(3) 当$c=+\infty$且$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$发散,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$也发散.

定理5.2.12 Dirichlet判别法 设在一切$u>a$上$\int_u^b f(x)\mathrm{d}x$有界,$g(x)$为单调升函数($g(x)>0$),且$\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$,则$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

定义5.2.13 设瑕点c在$[a,b]$之内部,若

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\epsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

存在,则称此极限值为无界函数的广义积分的Cauchy **主值**,记作

$$\text{v. p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\epsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right].$$

也称为在主值意义下,广义积分存在.

定理5.2.14 设瑕点c在$[a,b]$之内部,若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I$存在,则v. p.$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I$;反之,不一定成立.

广义积分表

(1) 含代数函数的积分

① $\int_1^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^n}=\dfrac{1}{n-1}\ (n>1)$.

② $\int_0^{\infty} \frac{a\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -\frac{\pi}{2} & (a<0). \end{cases}$

③ $\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^{\beta}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(1+x)^{\alpha+\beta+2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)^{*}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$= \mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1).$$

④ $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)x^a} = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (a<1).$

⑤ $\int_b^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0<a<1).$

⑥ $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)x^a} = -\pi\cot a\pi \quad (a<1).$

⑦ $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b\sin\left(\frac{a\pi}{b}\right)} \quad (0<a<b).$

⑧ $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)}{a\,\Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)}.$

---

* $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \quad (x>0)$,

$\Gamma(n+1) = n!$（n 为正整数），

$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$,

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1.7724538509\cdots$.

(2) 含三角函数的积分

⑨ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (a > 0), \\ -\dfrac{\pi}{2} & (a < 0). \end{cases}$$

⑩ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

⑪ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} \mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8}.$$

⑫ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}.$$

⑬ $$\int_0^{\infty} \frac{\tan ax}{x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (a > 0), \\ -\dfrac{\pi}{2} & (a < 0). \end{cases}$$

⑭ $$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} \mathrm{d}x = \ln \frac{b}{a} \quad (a, b \neq 0).$$

⑮ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (|a| < 1), \\ \dfrac{\pi}{4} & (|a| = 1), \\ 0 & (|a| > 1). \end{cases}$$

⑯ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

⑰ $$\int_0^{\infty} \frac{x \sin bx}{a^2 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-|ab|} \quad (b > 0).$$

⑱ $$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-|a|}.$$

⑲ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} |a|.$$

⑳ $$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi a}{2} \quad (a < b).$$

㉑ $\int_0^{\infty}\cos(x^2)\,dx=\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

㉒ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+2x\cos a+x^2}=\frac{a}{\sin a}\quad\left((0<a<\frac{\pi}{2}\right)$.

㉓ $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

㉔ $\int_0^{\infty}\left(\frac{\arctan ax}{x}-\frac{\arctan bx}{x}\right)dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}\quad(a,b>0)$.

㉕ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\frac{\pi}{2ab}$.

(3) 含指数和双曲函数的积分

㉖ $\int_1^{\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}$.

㉗ $\int_0^{\infty}x^be^{-ax}dx=\frac{\Gamma(b+1)}{a^{b+1}}\qquad(a>0,\ b>-1)$,

$$=\frac{b!}{a^{b+1}}\qquad(a>0,\ b=0,1,2,\cdots).$$

㉘ $\int_0^{\infty}x^be^{-ax^2}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2a^{(b+1)/2}}\qquad(a>0,\ b>-1)$,

$$=\begin{cases}\frac{1\cdot3\cdots(b-1)\sqrt{\pi}}{2^{(b/2)+1}a^{(b+1)/2}} & (a>0,\ b=0,2,4,\cdots),\\ \frac{\left(\frac{b-1}{2}\right)!}{2a^{(b+1)/2}} & (a>0,\ b=1,3,5,\cdots).\end{cases}$$

㉙ $\int_0^{\infty}e^{-a^2x^2}dx=\frac{1}{2a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\quad(a>0)$.

㉚ $\int_0^{\infty}xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}$.

㉛ $\int_0^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

㉜ $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-ax} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0).$

㉝ $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0).$

㉞ $\int_0^{\infty} e^{(-x^2 - a^2/x^2)} dx = \frac{1}{2} e^{-2a} \sqrt{\pi}.$

㉟ $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} \quad (a, b > 0).$

㊱ $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$

㊲ $\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}.$

㊳ $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (a > 0).$

㊴ $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (a > 0).$

㊵ $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cosh bx\, dx = \frac{a}{a^2 - b^2} \quad (a > b \geqslant 0).$

㊶ $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sinh bx\, dx = \frac{b}{a^2 - b^2} \quad (a > b \geqslant 0).$

㊷ $\int_0^{\infty} x e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{2ab}{(a^2 + b^2)^2}.$

㊸ $\int_0^{\infty} x e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}.$

㊹ $\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-b^2/4a^2}}{2a}.$

㊺ $\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{2b(3a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^3}.$

㊻ $\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{2a(a^2 - 3b^2)}{(a^2 + b^2)^3}.$

㊼ $\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{6(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)}{(a^2+b^2)^4}$ $(a>0)$.

㊽ $\int_0^{\infty} x^3 e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{24ab(a^2 - b^2)}{(a^2+b^2)^4}$ $(a>0)$.

㊾ $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{n![(a-ib)^{n+1} + (a+ib)^{n+1}]}{2(a^2+b^2)^{n+1}}$

$(i = \sqrt{-1},\ a>0)$.

㊿ $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{in![(a-ib)^{n+1} - (a+ib)^{n+1}]}{2(a^2+b^2)^{n+1}}$

$(i = \sqrt{-1},\ a>0)$.

(51) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx = \arctan \frac{1}{a}$.

(52) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\cosh ax} = \frac{\pi}{2a}$.

(53) $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sinh ax} = \frac{\pi^2}{4a^2}$.

(54) $\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x} \right) dx = \gamma$.*

(55) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x} \right) dx = \gamma$.

(56) $\int_0^{1} \frac{1 - e^{-x} - e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx = \gamma$.

(4) 含对数函数的积分

(57) $\int_0^{1} \ln|\ln x| dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma$ (Euler 常数).

(58) $\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6}$.

(59) $\int_0^{1} \frac{\ln x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}$.

---

* Euler 常数 $\gamma = 0.57721566490\cdots$(例 1.3.2(13)).

⑥⓪ $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{8}$.

⑥① $\int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^\infty \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$.

⑥② $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

⑥③ $\int_0^1 x\ln(1-x)\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}$.

⑥④ $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$.

⑥⑤ $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \ln\frac{1+b}{1+a} \quad (a,b>-1)$.

⑥⑥ $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

⑥⑦ $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

⑥⑧ $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a}\mathrm{d}x = \Gamma(a+1) \quad (a>-1)$.

⑥⑨ $\int_0^1 (\ln x)^n\mathrm{d}x = (-1)^n n! \quad (n=1,2,\cdots)$.

⑦⓪ $\int_0^1 x^n\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a+1)}{(n+1)^{a+1}} \quad (a,n>-1)$.

⑦① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

⑦② $\int_0^{\pi} x\ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2$.

⑦③ $\int_0^{\pi} \ln(a\pm b\cos x)\mathrm{d}x = \pi\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right) \quad (a\geqslant b)$.

⑦④ $\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+\sin a\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x = \pi a$.

⑦⑤ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\ln\sin x\mathrm{d}x = \ln 2 - 1$.

⑯ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \tan x \mathrm{d}x = 0.$

⑰ $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi\ln a & (a \geqslant b > 0), \\ 2\pi\ln b & (b \geqslant a > 0). \end{cases}$

⑱ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2.$

⑲ $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x \, \mathrm{d}x = -\gamma$ (Euler 常数).

⑳ $\int_0^{\infty} \ln \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}.$

多 元 分 析

6 向量代数

6.1 n 维向量空间中的代数

6.1.1 n 维向量空间和基

定义 6.1.1 n 个有序实数组 $u^1,u^2,\cdots,u^n$ 称为一个 **n 维向量**(n-dimensional vector),记作

$$u=(u^1,u^2,\cdots,u^n)$$

其中 $u^1,\cdots,u^n$ 称为向量 u 的**分量**(components). 从几何的观点看,n 维向量又可视为 n 维实空间$\mathbb{R}^n$ 中的一个 **n 维点**(n-tuple point). 特别是,当 n 维点解释为$\mathbb{R}^n$中的几何点时,常用记号

$$x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$$

表示由点$(0,0,\cdots,0)$至点$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$所引的**位置向量**(position vector). 此时 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 常称为**向量 x 的坐标**(coordinate).

对 n 维向量规定以下的基本运算法则,即 $\forall u,v\in\mathbb{R}^n$ 及 $\forall k\in\mathbb{R}$ 应满足:

(1) 加法: $u+v=(u^1+v^1,u^2+v^2,\cdots,u^n+v^n)$.

(2) 数乘: $ku=(ku^1,ku^2,\cdots,ku^n)$.

满足上述运算法则的全体 n 维向量的集合称为 **n 维向量空间**(*n*-dimensional vector space)，记作 $\mathscr{V}$.

定理 6.1.2 $\mathscr{V}$ 中的加法及数乘法满足以下 8 条规律，即 $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathscr{V}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，有：

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ （加法交换律）

(2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ （加法结合律）

(3) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$ （零向量的存在性）

(4) $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ （负向量的存在性及减法定义）

(5) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$ （对标量的分配律）

(6) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ （对向量的分配律）

(7) $\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}$ （对标量的结合律）

(8) $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

以上运算结果仍为 $\mathscr{V}$ 中之向量．人们常说：$\mathscr{V}$ 关于这两种运算是封闭的．由此可知，任何向量组 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r\} \subset \mathscr{V}$ 的线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha^i\boldsymbol{u}_i$, $\forall \alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^r \in \mathbb{R}$ 仍然是 $\mathscr{V}$ 中之向量（此处 $r \leqslant n$）.

定义 6.1.3 向量组 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ 称为**线性相关的**(linear dependence)，如果存在不全为零的实数 $\alpha^1, \cdots, \alpha^r$，使得

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha^i\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}.$$

否则称为**线性无关的**(linear independence).

定义 6.1.4 若 $\mathscr{V}$ 中的任何向量 $\boldsymbol{u}$ 都可由线性无关向量组 $\{\boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$ 线性表出：

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u^i \boldsymbol{g}_i,$$

即称 $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n\}$ 为极大线性无关向量组．$\mathscr{V}$ 中的任何极大线性无关向量组所包含的向量个数均相同，这个数 n 称为 $\mathscr{V}$ 的**维数**(dimension)，记作 $\dim \mathscr{V}$．当需要强调 $\mathscr{V}$ 的维数时，则用 $\mathscr{V}^n$ 表示 n

维向量空间(今后如无特别说明,记号 $\mathscr{V}$ 均应理解为 n 维向量空间). 极大线性无关向量组简记为 $\{\boldsymbol{g}_i\}$, 称为 $\mathscr{V}$ 的一组**协变基**(covariant basis),基中的每一向量 $\boldsymbol{g}_i$ 称为**协变基向量**(covariant basis vector), u^i 称为向量 $\boldsymbol{u}$ 在协变基向量 $\boldsymbol{g}_i$ 上的**逆变分量**(contravariant component).

$\mathscr{V}$ 中任一点的位置向量 $\boldsymbol{x}$ 可表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{g}_i,$$

$\{\boldsymbol{g}_i\}$ 又称为 $\mathscr{V}$ 中的**仿射标架**(affine frame). $x^1, x^2, \cdots, x^n$ 则称为位置向量 $\boldsymbol{x}$ 在仿射标架 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 上的**仿射坐标**(affine coordinates). $\mathscr{V}^3$ 中的仿射标架常称为**斜角标架**(oblique frame),相应的仿射坐标常称为**斜角坐标**(oblique coordinates).

定义 6.1.5 若 $\mathscr{V}$ 中的一组基向量 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 具有以下形式:

$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0), \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0), \cdots, \boldsymbol{e}_n=(0,\cdots,0,1)$,

则称 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 为 $\mathscr{V}$ 中的**标准基**(standard basis). 显然,标准基是 $\mathscr{V}$ 中的极大线性无关向量组,$\mathscr{V}$ 中的任何向量 $\boldsymbol{u}$ 可在标准基上分解为

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u^i \boldsymbol{e}_i,$$

u^i 称为向量 $\boldsymbol{u}$ 的**正交坐标**(orthogonal coordinates). 标准基是一组特殊的基,它在 $\mathscr{V}^3$ 中构成的标架称为**正交标架**(orthogonal frame),相应的仿射坐标 x, y, z 则是人们熟知的直角坐标.

$\mathscr{V}^3$ 中的标准基常用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 表示,此时 $\mathscr{V}^3$ 中的任意向量 $\boldsymbol{u}$ 可表示为

$$\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k},$$

其中 u_x, u_y, u_z 为 $\boldsymbol{u}$ 在标准基上的三个分量.

6.1.2 向量的内积与度量矩阵

定义 6.1.6 在标准基中任意两向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 的**内积**(inner

product)或**点积**(dot product)定义为

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \equiv \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i.$$

内积有以下性质:

(1) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$ (对称性)

(2) $\boldsymbol{u}\cdot(\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{w})=\alpha\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ (双线性)

(3) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}>0$,且 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ (正定性)

定义了内积的向量空间称为**内积空间**(inner product space),仍记作 $\mathscr{V}$.

当 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$ 时,称 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ **正交**(orthogonal). 显然有以下结论:

(1) 标准基中任何两个基向量彼此正交,基向量自身点积为 1:

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

其中 δ_{ij} 称为 Kronecker 符号(Kronecker delta). 故标准基又称为**单位正交基**(unitary orthogonal basis).

(2) 正交于所有基向量的向量必为零向量.

定义 6.1.7 在含有指标(index)从 1 至 n 求和时,当每项出现两次相同指标时,求和符号可以省略,例如:

$$\boldsymbol{u} = u^1\boldsymbol{g}_1 + u^2\boldsymbol{g}_2 + \cdots + u^n\boldsymbol{g}_n = u^i\boldsymbol{g}_i,$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u^1v^1 + u^2v^2 + \cdots + u^nv^n = u^iv^i,$$

$$\boldsymbol{g}_i = g_{i1}\boldsymbol{g}^1 + g_{i2}\boldsymbol{g}^2 + \cdots + g_{in}\boldsymbol{g}^n = g_{ij}\boldsymbol{g}^j,$$

这种记法称为 **Einstein**(爱因斯坦)**求和约定**(Einsteins summation convention).

应用 Einstein 求和约定时,应注意以下几点:

(1) 重复指标(求和指标)称为**哑标**(dummy index),不重复指标(非求和指标)称为**自由指标**(free index). 如 $g_{ij}g^j$ 中的 j 是哑标,i 是自由指标. 哑标可用任意字母代替,如 $g_{ij}g^j=g_{ik}g^k$,而

自由指标则不能改动.

(2) 当同时出现上、下指标时,重复指标应理解为"上指标和下指标分别相同的出现一次",如 $\sigma^{ij}n_j$ 中的指标 j.

(3) 当同时出现上、下指标时,同类指标不得重复,如 t^{i}_{ii} 是不容许的. 在任何情况下指标重复一次以上都是不容许的,在这类情况下求和约定自动失效. 如曲线坐标中单位基向量求导公式

$$\boldsymbol{e}_{i,i}=-\frac{1}{h_j}h_{i,j}\boldsymbol{e}_j-\frac{1}{h_k}h_{i,k}\boldsymbol{e}_k,$$

重复指标 j 及 k 各自出现了 3 次,这时就不能理解为按指标 j 或 k 求和.

定义 6.1.8 设$\{\boldsymbol{g}_i\}$是 $\mathscr{V}$ 中的协变基,由点积运算惟一确定的矩阵$(g_{ij})=[\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j]$称为度量矩阵(metric matrix),$g_{ij}=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j$ 称为**度量张量的协变分量**(covariant component of metric tensor). 由点积性质可知,度量矩阵是对称矩阵($g_{ij}=g_{ji}$).

协变基中两向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的点积可表示为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(u^i\boldsymbol{g}_i)\cdot(v^j\boldsymbol{g}_j)=u^iv^j\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=g_{ij}u^iv^j.$$

定义 6.1.9 定义向量 $\boldsymbol{u}$ 的**长度**(length)**或范数**(norm)为

$$u=\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}=\sqrt{g_{ij}u^iu^j}=\sqrt{u^iu_i},$$

其中 u_i 为向量 $\boldsymbol{u}$ 的逆变分量(见定义 6.1.10). 由此可知,度量矩阵(g_{ij})为正定对称矩阵,其行列式 $\det(g_{ij})=g>0$.

定义两非零向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的夹角 $\theta\in[0,\pi]$的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\ \|\boldsymbol{v}\|}=\frac{g_{ij}u^iv^j}{\sqrt{g_{kl}u^ku^l}\ \sqrt{g_{rs}v^rv^s}},$$

此式隐含 $\mathscr{V}^3$ 中两向量内积的另一定义:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=uv\cos(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

6.1.3 逆变基

定义 6.1.10 设$\{\boldsymbol{g}_i\}$是 $\mathscr{V}$ 中的协变基,且有线性无关向量组

$\{\boldsymbol{g}^i\}$满足以下条件：

$$g_i^j=\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

则称$\{\boldsymbol{g}^i\}$是$\{\boldsymbol{g}_i\}$的**逆变基**(contravariant basis). 逆变基中的基向量 $\boldsymbol{g}^i$ 称为 $\mathscr{V}$ 中的**逆变基向量**(contravariant basis vector)，δ_i^j 和定义 6.1.6 中所述 δ_{ij} 一样，都是 Kronecker 符号. 可以证明，对应于协变基$\{\boldsymbol{g}_i\}$的逆变基$\{\boldsymbol{g}^i\}$存在且惟一. $\mathscr{V}$ 中之任何向量 $\boldsymbol{u}$ 可在逆变基$\{\boldsymbol{g}^i\}$上分解为：

$$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i,$$

其中 u_i 称为**向量 $\boldsymbol{u}$ 的协变分量**(covariant component of a vector).

$g^{ij}=\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j$ 称为**度量张量的逆变分量**(contravariant component of metric tensor)，矩阵(g^{ij})和矩阵(g_{ij})一样，也是正定对称矩阵，其行列式 $g'=\det(g^{ij})>0$.

在标准基中，协变基$\{\boldsymbol{g}_i\}$及逆变基$\{\boldsymbol{g}^i\}$均退化为单位正交基$\{\boldsymbol{e}_i\}$，且有 $g^{ij}=g_{ij}=\delta_{ij}$，此时度量矩阵$(g_{ij})$及$(g^{ij})$均退化为 n 阶单位矩阵.

注 逆变基又称为**倒易基**(reciprocal basis)，有些作者称协变基$\{\boldsymbol{g}_i\}$与逆变基$\{\boldsymbol{g}^i\}$为互为**对偶基**(duel basis)或互为倒易基.

定理 6.1.11 在协变基与逆变基之间存在下列三类转换关系：

(1) (g_{ij})与(g^{ij})互为逆矩阵，即$(g_{ij})=(g^{ij})^{-1}$，且 $g'=\dfrac{1}{g}$.

(2) 协变基向量与逆变基向量之间有以下转换关系：

$$\boldsymbol{g}_i=g_{ij}\boldsymbol{g}^j,\quad \boldsymbol{g}^i=g^{ij}\boldsymbol{g}_j.$$

(3) 若向量 $\boldsymbol{u}$ 在两种基中的分解式为

$$\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{g}_i,\quad \boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i,$$

则协变分量 u_i 与逆变分量 u^i 之间有以下关系：

$$u_i=g_{ij}u^j,\quad u^i=g^{ij}u_j.$$

推论 6.1.12 向量 $\boldsymbol{u}$ 在两种基中的分解式可表示为

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}_i)\boldsymbol{g}^i,\quad \boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}^i)\boldsymbol{g}_i.$$

6.1.4 坐标变换与基的转换

由原坐标系向新坐标系转换时,即由原基$\{\boldsymbol{g}_i\}$,$\{\boldsymbol{g}^i\}$转换至新基$\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$,$\{\boldsymbol{g}^{i'}\}$时,定义以下**转换系数**(coefficient of transformation):

$$\beta_{i'}^{i}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}^i,\qquad \beta_{i}^{i'}=\boldsymbol{g}^{i'}\cdot\boldsymbol{g}_i.$$

定理 6.1.13 在原基$\{\boldsymbol{g}_i\}$、$\{\boldsymbol{g}^i\}$与新基$\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$、$\{\boldsymbol{g}^{i'}\}$之间存在以下 3 类转换关系:

(1) 新、旧基向量间的转换关系是

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\beta_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_{i},\qquad \boldsymbol{g}^{i'}=\beta_{i}^{i'}\boldsymbol{g}^{i}.$$

(2) 向量 $\boldsymbol{u}$ 的协变分量 u_i 与逆变分量 u^i 向新基的相应分量按以下公式转换:

$$u_{i'}=\beta_{i'}^{i}u_{i},\qquad u^{i'}=\beta_{i}^{i'}u^{i}.$$

(3) 度量张量分量的转换关系是

$$g_{i'j'}=\beta_{i'}^{i}\beta_{j'}^{j}g_{ij},\qquad g^{i'j'}=\beta_{i}^{i'}\beta_{j}^{j'}g^{ij}.$$

6.2 三维向量空间中的代数

$\mathscr{V}^n$中的基本理论与运算均适用于$\mathscr{V}^3$,但$\mathscr{V}^3$中的向量运算还有其特殊问题,它们都来源于叉积运算.

定义 6.2.1 两向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 的叉积(或向量积)(cross product, vector product)为一新向量 $\boldsymbol{w}$,其长度等于 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 所构成之平行四边形面积,其指向按 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$ 的右旋顺序决定(如图 6.1). 以上内容记作

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v},$$

$$w=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=uv\sin\theta.$$

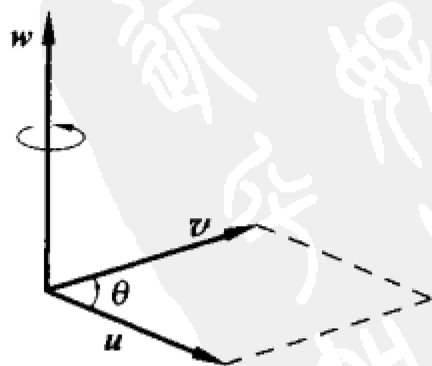


图 6.1

θ 的度量规定从 $\boldsymbol{u}$ 转至 $\boldsymbol{v}$ $(0<\theta<\pi)$. 叉积运算有以下基本性质：

(1) 当 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 方向相同时，其叉积为零. 特别是 $\boldsymbol{u}$ 的自身叉积为零.

(2) $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$ （不服从交换律).

定义 6.2.2 三向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{w}$ 的**标量三重积**(scalar triple product)定义为以下运算：

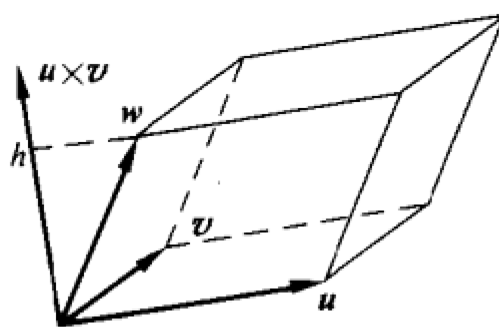


图 6.2

$$[\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}]=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|h,$$

其中 h 为 $\boldsymbol{w}$ 在 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ 上的投影. 故可知 $|(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}|$ 在几何上等于 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 所构成之平行六面体的体积.

标量三重积有以下性质：

(1) $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}$.

(2) 三向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 共面条件即线性相关条件为 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=0$. 反之，若 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}\neq 0$，则 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 线性无关.

定义 6.2.3 三向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 的**向量三重积**(vector triple product)定义为 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$，可由以下公式计算：

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}.$$

故知向量三重积求积次序不可交换.

定义 6.2.4 定义 $\mathscr{V}^3$ 中的**置换符号**(permutation symbol)为

$$e^{ijk} \text{或} e_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{当}(i,j,k)\text{是}(1,2,3)\text{的偶数次置换},\\ -1, & \text{当}(i,j,k)\text{是}(1,2,3)\text{的奇数次置换},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

定义 6.2.5 定义 $\mathscr{V}^3$ 中的 **Eddington**(埃丁顿)**张量**(Eddington's tensor)为

$$\varepsilon_{ijk}=[\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j\boldsymbol{g}_k], \qquad \varepsilon^{ijk}=[\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}^k].$$

它们具有以下性质：

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk} \text{或} \sqrt{g}\,\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}1, & \text{当}(i,j,k)\text{是}(1,2,3)\text{的偶数次置换},\\ -1, & \text{当}(i,j,k)\text{是}(1,2,3)\text{的奇数次置换},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

定义 6.2.6 定义 $\mathscr{V}^3$ 中的**广义 Kronecker 符号**(generalized Kronecker)为

$$\delta^{ijk}_{rst}=\delta^{ij}_{rs}=\begin{cases}0, & \text{有两个或更多的上(或下)指标相同,}\\ & \text{或上、下由不同指标组成,}\\ 1, & \text{上下指标的区别为偶数次置换,}\\ -1, & \text{上下指标的区别为奇数次置换.}\end{cases}$$

三类符号的关系与应用

(1) 三类符号间的恒等式

$$e^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk},\quad e_{ijk}=\sqrt{g}\,\varepsilon_{ijk},$$

$$\delta^{ijk}_{rst}=e^{ijk}e_{rst}=\varepsilon^{ijk}_{rst}=[\boldsymbol{g}^i\,\boldsymbol{g}^j\,\boldsymbol{g}^k][\boldsymbol{g}_r\,\boldsymbol{g}_s\,\boldsymbol{g}_t]$$

$$=\begin{vmatrix}\delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t\\ \delta^j_r & \delta^j_s & \delta^j_t\\ \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t\end{vmatrix}$$

$$=\delta^i_r\delta^j_s\delta^k_t+\delta^i_t\delta^j_r\delta^k_s+\delta^i_s\delta^j_t\delta^k_r-\delta^i_t\delta^j_s\delta^k_r-\delta^i_s\delta^j_r\delta^k_t-\delta^i_r\delta^j_t\delta^k_s,$$

$$\delta^{ijt}_{rst}=\delta^i_r\delta^j_s-\delta^i_s\delta^j_r,$$

$$\delta^{ist}_{rst}=3\delta^i_r-\delta^i_r=2\delta^i_r,$$

$$\delta^{rst}_{rst}=2\delta^r_r=3!.$$

(2) 三类符号的应用

① 三阶行列式

$$a=|a^m_n|=a^i_1a^j_2a^k_3e_{ijk}=a^1_ia^2_ja^3_ke^{ijk}=a^i_1a^j_2a^k_3\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk}$$

$$=a^1_ia^2_ja^3_k\sqrt{g}\,\varepsilon^{ijk}=\frac{1}{3!}\delta^{rst}_{ijk}a^i_ra^j_sa^k_t,$$

$$a=|a_{mn}|=a_{i1}a_{j2}a_{k3}e_{ijk}=a_{1i}a_{2j}a_{3k}e^{ijk}=a_{i1}a_{j2}a_{k3}\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon_{ijk}$$

$$=a_{1i}a_{2j}a_{3k}\sqrt{g}\ \varepsilon^{ijk}=\frac{1}{3!}e^{ijk}e^{rst}a_{ir}a_{js}a_{kt},$$

② 基向量的叉积

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=\pm\sqrt{g}\ \boldsymbol{g}^k=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k,$$

$$\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j=\pm\frac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{g}_k=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k.$$

③ 两向量的叉积

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=u^i\boldsymbol{g}_i\times v^j\boldsymbol{g}_j=u^iv^j\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k=\sqrt{g}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}^3\\ u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=u_i\boldsymbol{g}^i\times v_j\boldsymbol{g}^j=u_iv_j\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}.$$

④ 三向量的数量积

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=u^iv^jw^k\varepsilon_{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\\ w^1 & w^2 & w^3\end{vmatrix},$$

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=u_iv_jw_k\varepsilon^{ijk}=\sqrt{g}\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}.$$

⑤ 三向量的向量积

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}&=u^iv^j\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k\times w_r\boldsymbol{g}^r=u^iv^jw_r\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{krs}\boldsymbol{g}_s\\&=u^iv^jw_r(\delta_i^r\delta_j^s-\delta_i^s\delta_j^r)\boldsymbol{g}_s\\&=(u^iv^j-u^jv^i)w_i\boldsymbol{g}_j,\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}=(u_iv_j-u_jv_i)w^i\boldsymbol{g}^j,$$

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(v^iw^j-v^jw^i)u_j\boldsymbol{g}_i,$$

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(v_iw_j-v_jw_i)u^j\boldsymbol{g}^i.$$

组合运算恒等式汇集

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{d}]\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]\boldsymbol{d}\\&=[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}\ \boldsymbol{a}]\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}\ \boldsymbol{b}]\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})$$

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]^2$$

$$[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3][\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_3\\ \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{b}_3\end{vmatrix}$$

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}\ \ \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{f}]=[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{d}][\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{f}]-[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}][\boldsymbol{d}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{f}]$$

斜角坐标系与直角坐标系中向量运算的对照表

运　算	斜角坐标系($\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3$)	直角坐标系 ($\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$)
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$	$g_{ij}u^iv^j=u^iv_i$　　$g^{ij}u_iv_j=u_iv^i$	$u_iv_i=u^iv^i$
$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$	$\sqrt{g}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}^3\\ u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$
$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]$	$\sqrt{g}\begin{vmatrix}u^1 & u^2 & u^3\\ v^1 & v^2 & v^3\\ w^1 & w^2 & w^3\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$
$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$	$(u_iv_j-u_jv_i)w^i\boldsymbol{g}^j$ $(u^iv^j-u^jv^i)w_i\boldsymbol{g}_j$	$(u_iv_j-u_jv_i)w_i\boldsymbol{e}_j$
$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$	$(v_iw_j-w_iv_j)u^j\boldsymbol{g}^i$ $(v^iw^j-w^iv^j)u_j\boldsymbol{g}_i$	$(v_iw_j-w_iv_j)u_j\boldsymbol{e}_i$

向量运算与矩阵运算的对照表

将向量运算化为矩阵运算时，任意向量 $\boldsymbol{u}$ 用列向量表示，即

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_e\Leftrightarrow\boldsymbol{u}=(u_1\ \ u_2\ \ u_3)^{\mathrm{T}}$$

用向量 $\boldsymbol{u}$ 的分量构成三阶反对称方阵如下：

$$\boldsymbol{u}^{*}=\begin{vmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

于是有标准基下的向量运算与矩阵运算的对照表：

向 量 运 算	矩 阵 运 算
(1) $a=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$	$a=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$
(2) $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}^{*}\boldsymbol{v}$
(3) $b=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$	$b=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^{*}\boldsymbol{v}$
(4) $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$ $=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})-\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$	$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{E})\boldsymbol{w}$ 其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵

7 多元函数及其极限、连续性

7.1 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$

7.1.1 概念

定义 7.1.1 在 n 维向量空间中引进内积，则称此空间为 **n 维欧氏空间**(n-dimensional Euclidean space)，记作 $\mathscr{E}^n$.

定义 7.1.2 对于任一向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{E}^n$，称实数 $\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**范数**(Euclidean norm)(长度)，记作

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\ .$$

性质 7.1.3 范数满足下列条件：

(1) $\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n$，$\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0$ 且 $\|\boldsymbol{x}\|=0\Leftrightarrow(0,\cdots,0)=\boldsymbol{0}$；

(2) 当 a 为实数，$\|a\boldsymbol{x}\|=|a|\,\|\boldsymbol{x}\|$；

(3) $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{E}^n$，$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

定理 7.1.4 Schwarz 不等式

$$\forall\,\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{y}\in\mathscr{E}^n,\quad |\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|.$$

定义 7.1.5 设有 $\mathscr{E}^n$ 中任意两点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)$，则称

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

为点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 间的**距离**(distance).

性质 7.1.6 $\mathscr{E}^n$ 中两点的距离有下列性质：

(1) 非负性 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$ 且 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$；

(2) 对称性　$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$；

(3) 三角不等式　$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\rho(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$.

7.1.2 n 维欧氏空间中的点集

定义 7.1.7　称在 $\mathscr{E}^n$ 中的一串点 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k,\cdots$ 为**点列**(sequence of points)，记作$\{\boldsymbol{x}_k\}$或简记作 $\boldsymbol{x}_k$. 若存在常数 $M>0$，$\forall k>0$ 有 $\|\boldsymbol{x}_k\|\leqslant M$，则称$\{\boldsymbol{x}_k\}$为**有界点列**(bounded sequence of points).

定义 7.1.8　若存在 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{E}^n$使得

$$\lim_{k\to\infty}\rho(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{a})=\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|=0,$$

则称$\{\boldsymbol{x}_k\}$在 $\mathscr{E}^n$ 中收敛到 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 称为$\{\boldsymbol{x}_k\}$的**极限**(limit)，记作$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$.

性质 7.1.9　极限有下列性质：

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$的极限是惟一的.

(2) 设 $\boldsymbol{x}_k=(x_{k,1},\cdots,x_{k,n})$，$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$则

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i\quad(i=1,\cdots,n).$$

(3) 若$\{\boldsymbol{x}_k\}$有极限，则该点列有界.

(4) 设$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{b}$，$\alpha$ 为常数. 则：

$$\lim_{k\to\infty}\alpha\boldsymbol{x}_k=\alpha\boldsymbol{a},\quad\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{y}_k)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k\cdot\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

定义 7.1.10　设点 $\boldsymbol{x}_0\in\mathscr{E}^n$，$\delta>0$，称集合 $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<\delta\}$为 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个 δ **邻域**(neighborhood)，简称邻域，δ 为该邻域的半径．称 $B_0(\boldsymbol{x}_0;\delta)=B(\boldsymbol{x}_0;\delta)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}$为 $\boldsymbol{x}_0$ 的**空心邻域**(deleted neighborhood). 当不需要知道邻域的半径时，分别用 $B(\boldsymbol{x}_0)$及 $B_0(\boldsymbol{x}_0)$表示 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域和空心邻域.

定义 7.1.11　若存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)$使得 $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)\subset S$，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是集合 S 的**内点**(interior point). S 的全部内点组成的集合称为 S 的**内部**(interior of a set)，记作 S^0.

定义 7.1.12　若存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)$使得 $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap S=$

$\varnothing$,则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是集合 S 的**外点**(exterior point),S 的全部外点组成的集合称为 S 的**外部**(exterior of a set).

定义 7.1.13 若 $\boldsymbol{x}_0$ 既不是 S 的内点,也不是 S 的外点,则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 S 的**边界点**(boundary point). S 的全体边界点组成的集合称为 S 的**边界**(boundary),记作 ∂S.

定义 7.1.14 若点 $\boldsymbol{x}_0$ 的每个邻域 $B(\boldsymbol{x}_0;\delta)$ 都存在 $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap S$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{x}_0$. 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是集合 S 的**聚点**(accumulation point).

定理 7.1.15 以下条件之一都是 $\boldsymbol{x}_0$ 为 S 的聚点的充要条件:

(1) 任一 $B(\boldsymbol{x}_0)$ 都含有 S 中的无穷多个点;

(2) 存在不同的点列 $\boldsymbol{x}_k\in S$, $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}_0$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$.

定义 7.1.16 若 $\boldsymbol{x}_0\in S$,但存在 $B_0(\boldsymbol{x}_0)$ 不含 S 中其他的点,则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 S 的**孤立点**(isolated point).

注 7.1.17 (1) S 的聚点 $\boldsymbol{x}_0$ 可属于 S,也可不属于 S.

(2) 内点及非孤立的边界点都是聚点.

(3) $\boldsymbol{x}_0\in S$ 但 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 S 的聚点,则 $\boldsymbol{x}_0$ 是孤立点.

(4) 孤立点必是边界点.

定义 7.1.18 设点集 $S\subset\mathscr{E}^n$,若 S 的每一点都是它的内点,即 $S=S^0$,则称 S 为**开集**(open set). 显然空集 $\varnothing$ 为开集.

例 7.1.19 (1) $\mathscr{E}^n$ 是开集. (2) $\mathscr{E}^n$ 中的开球 $B(\boldsymbol{x}_0,R)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<R\}$ 是 $\mathscr{E}^n$ 中的开集. (3) $\mathscr{E}^n$ 中的开矩形 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\mid a_i<x_i<b_i,i=1,\cdots,n\}$ 是 $\mathscr{E}^n$ 中的开集,其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$.

定义 7.1.20 设点集 $S\subset\mathscr{E}^n$,若 S 包含它的一切聚点,则称为**闭集**(closed set). 显然空集 $\varnothing$ 为闭集. S 连同它的全体聚点组成的点集称为 S 的**闭包**(closure),记作 $\overline{S}$.

定理 7.1.21 以下条件之一都是 S 为闭集的充要条件:

(1) $S=\overline{S}$.

(2) $\forall \boldsymbol{x}_k \in S$,若$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$,则 $\boldsymbol{x}\in S$.

(3) 若 $\boldsymbol{x}\overline{\in} S$,则存在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域 $B(\boldsymbol{x};\delta)$,使得 $B(\boldsymbol{x};\delta)\cap S=\varnothing$.

例 7.1.22 (1) $\mathscr{E}^n$是闭集.(2) $\mathscr{E}^n$中的闭球$\overline{B}(\boldsymbol{x}_0,R)=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n, \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\leqslant R\}$是闭集.(3) $\mathscr{E}^n$中的闭矩形$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,\cdots,n\}$或写成$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$是闭集,其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$.

定理 7.1.23 设 $S\subset\mathscr{E}^n$,S 是开集$\Leftrightarrow S^c$ 是闭集,其中 $S^c=\mathscr{E}^n\backslash S$.

定理 7.1.24 设有开集 S_k,则:

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$ 是开集;(2) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} S_k$ 是开集.

定理 7.1.25 设有闭集 F_k,则:

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ 是闭集;(2) $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ 是闭集.

定义 7.1.26 设有开集 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$,任意两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$,若存在有限个点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{y}$,使得每一线段$\overline{\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_{i+1}}=\{\boldsymbol{z}\mid \boldsymbol{z}=t\boldsymbol{x}_i+(1-t)\boldsymbol{x}_{i+1},0\leqslant t\leqslant 1\}\subset\Omega$ $(i=1,\cdots,m-1)$,则称 Ω 是**连通开集**(open connected set),又称 Ω 为**开区域**(open region),开区域的闭包称为**闭区域**(closed region).

例 7.1.27 若 Ω 是开区域,则 $\Omega\cup\partial\Omega$ 为闭区域.

定义 7.1.28 对任意 $\boldsymbol{x}\in S\subset\mathscr{E}^n$,若存在常数 $M>0$,使得$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant M$,则称 S 为**有界集**(bounded set),否则称为**无界集**(unbounded set).

定义 7.1.29 设 $S\subset\mathscr{E}^n$,$\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n$,则 $\rho(\boldsymbol{x},S)=\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in S}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$称为**点 $\boldsymbol{x}$ 到集合 S 的距离**(distance from a point $\boldsymbol{x}$ to a set S).

定义 7.1.30 设集合 $A\subset\mathscr{E}^n$, $B\subset\mathscr{E}^n$,则

$\rho(A,B)=\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in A,\boldsymbol{y}\in B}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$称为**集合 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的距离**(distance between sets).

定义 7.1.31 设 $S\subset\mathscr{E}^n$，则 $d(S)=\sup\limits_{x\in S,y\in S}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 称为**集合 S 的直径**(diameter of a set).

定义 7.1.32 设 $S\subset\mathscr{E}^n$，$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$，$\lambda\in[0,1]$，若有 $\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}\in S$，则称 S 为**凸集**(convex set). 即对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S$ 都有点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的连线仍属于 S，就称 S 为凸集.

定义 7.1.33 若 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,\cdots,m)$，$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{x}_i$，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的 **凸组合**(convex combination).

定理 7.1.34 $S\subset\mathscr{E}^n$ 为凸集的充要条件是：S 中点的凸组合仍属于 S.

例如，开球区域 $B(\boldsymbol{x}_0;R)=\{\boldsymbol{x}_0\mid\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<R,\ \boldsymbol{x}_0\in\mathscr{E}^n\}$ 是凸集.

7.1.3 n 维欧氏空间的性质

定义 7.1.35 设点列 $\boldsymbol{x}_k\in\mathscr{E}^n$，若 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N>0$，当 $k>N$ 时，对任意自然数 p 有 $\|\boldsymbol{x}_{k+p}-\boldsymbol{x}_k\|<\varepsilon$，则称 $\boldsymbol{x}_k$ 为 $\mathscr{E}^n$ 中的柯西列(Cauchy sequence)或**基本列**.

定理 7.1.36 点列 $\boldsymbol{x}_k\in\mathscr{E}^n$ 为收敛列的充要条件为 $\boldsymbol{x}_k$ 是基本列.

注 7.1.37 此定理表明基本列一定是收敛列，称为 $\mathscr{E}^n$ 的**完备性**(completeness)，即 $\mathscr{E}^n$ 空间是完备的.

定理 7.1.38 若闭球列 $\overline{B}(\boldsymbol{x}_k;r_k)$ 满足：(1) $\overline{B}(\boldsymbol{x}_k;r_k)\supset\overline{B}(\boldsymbol{x}_{k+1};r_{k+1})$；(2) $\lim\limits_{k\to\infty}r_k=0$. 则存在惟一点 $\boldsymbol{x}_0\in\overline{B}(\boldsymbol{x}_k;r_k)$ $(k=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0$.

定义 7.1.39 若 S 的任一无穷子集必有聚点且属于 S，则称 S 为**列紧集**(sequential compact set).

定理 7.1.40 **聚点原理**(accumulation principle) 有界无穷

点集 $S\subset\mathscr{E}^n$在 $\mathscr{E}^n$中至少有一个聚点.

推论 7.1.41 (1) 有界点列 $\boldsymbol{x}_k\in\mathscr{E}^n$必有收敛的子列 $\boldsymbol{x}_{k_j}$.

(2) 无穷点集 $S\subset\mathscr{E}^n$为有界集的充要条件是 $\mathscr{E}^n$的任一无穷子集必有聚点.

(3) $S\subset\mathscr{E}^n$为有界闭集的充要条件是 S 为列紧集.

定义 7.1.42 设 $A=\{A_\alpha\}$是 $\mathscr{E}^n$中的一族集合,若 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha\supset S$,则称 A 是 S 的一个**覆盖**(covering),若每个 A_α 为开集,则称 A 为 $S\subset\mathscr{E}^n$的一个**开覆盖**(open covering),若覆盖 A 的子集也是一个覆盖,则称为**子覆盖**(subcovering),若覆盖 A 只含有限个集合,则称为**有限覆盖**(finite covering).

定义 7.1.43 若集合 $S\subset\mathscr{E}^n$的任一开覆盖必有有限子覆盖,则称 S 为**紧集**(compact set).

定理 7.1.44 $S\subset\mathscr{E}^n$为有界闭集的充要条件是 S 为紧集.

注 有限覆盖定理(Heine-Borel Theorem)含于此定理中.

7.2 多元函数

7.2.1 映射

定义 7.2.1 设有两个集合 X 与 Y,若存在某对应规律 f,使对每一元素 $\boldsymbol{x}\in X$ 都有惟一元素 $\boldsymbol{y}\in Y$ 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的一个**映射**(mapping)(**变换**(transform),**算子**(operator)),记作 $f:X\longrightarrow Y,\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}$,且称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**象**(image),记作 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$,称 $\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{y}$ 的**原象**(original),称 X 为 f 的定义域,称集合$\{\boldsymbol{y}\mid\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})\}$为 f 的值域,记作 $f(X)$,若值域为整个 Y 时,称为**满映射**(surjection).

例 7.2.2 (1) 定积分运算 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是从$[a,b]$到 $\mathscr{E}^1$的一个映射.

(2) 对$[a,b]$上的连续可微函数求导的运算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$是从$C^1[a,b]$到$C[a,b]$的一个映射：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:\quad C^1[a,b]\longrightarrow C[a,b],f(x)\longmapsto f'(x).$$

定义 7.2.3 设有从X到Y的映射f，若对任意$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in X$，$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$，有$f(\boldsymbol{x}_1)\neq f(\boldsymbol{x}_2)$，则称$f$是从$X$到$Y$的**一一映射**(one-one mapping)(**单叶映射**)，记作1-1.

例如，例7.2.2中的(1)及(2)都不是1-1的.

定义 7.2.4 设$f:X\longrightarrow Y$，若存在一个映射g使得对任意$\boldsymbol{y}\in f(X)$都有惟一确定的$\boldsymbol{x}\in X$与之对应，$\boldsymbol{x}=g(\boldsymbol{y})$，并满足$g(f(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x}$，则称此映射为$f$的**逆映射**(inverse mapping)，记作f^{-1}，故有$\boldsymbol{x}=f^{-1}(\boldsymbol{y})$.

定理 7.2.5 f存在逆映射的充要条件是f是从$\boldsymbol{x}$到$f(\boldsymbol{x})$的一一映射.

例如，$n\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$在$\mathscr{E}^n$中确定一个线性变换$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，当$\det\boldsymbol{A}\neq 0$时，$\boldsymbol{A}$就是一一变换，它有逆变换.

定义 7.2.6 设有集合X,Y,Z，且有映射$g:X\to Y$及$f:Y\to Z$.若可得到从X到Z的一个映射，则称它为g与f的**复合映射**(composite mapping)，记作$f\circ g:X\to Z$，即$(f\circ g)(\boldsymbol{x})=f(g(\boldsymbol{x}))$.

注 设g的定义域是X，只要g的值域包含于f的定义域，就可得到复合函数$f\circ g$，其定义域为X.

7.2.2 多元函数的概念

定义 7.2.7 设有n维点集$\Omega\subset\mathscr{E}^n$，若按某一对应规则$f$，每一点$P(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$有惟一的一个实数$y$与之对应，当点$P$取遍$\Omega$的各点时，$y$构成实数集$M\subset\mathscr{E}^1$，就称$f$是定义在$\Omega$上的$\boldsymbol{n}$**元函数**(function of n-variables)，记作

$$f:\Omega\subset\mathscr{E}^n\longrightarrow M\subset\mathscr{E}^1,\qquad P(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto y=f(x_1,\cdots,x_n)$$

或简记作 $y=f(x_1,\cdots,x_n),(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$,或简记作 $y=f(P)$, $P\in\Omega$. 称 Ω 为函数的定义域,M 为函数的定值域. n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$也可用向量表示为 $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\subset\mathscr{E}^n$.

特殊情形:

(1) $n=2$,二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D\subset\mathscr{E}^2$.

(2) $n=3$,三元函数 $u=F(x,y,z),(x,y,z)\in\Omega\subset\mathscr{E}^3$.

定义 7.2.8 n 元函数

$$f:\Omega\subset\mathscr{E}^n\longrightarrow\mathscr{E}^1,\qquad (x_1,\cdots,x_n)\longmapsto y=f(x_1,\cdots,x_n)$$

的图象是 $\mathscr{E}^{n+1}$中的一个点集

$$\{(x_1,\cdots,x_n,y)\mid y=f(x_1,\cdots,x_n),(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\}\subset\mathscr{E}^{n+1},$$

称它为 $\mathscr{E}^{n+1}$空间的一个**超曲面**(hypersurface).

特殊情形:

(1) 二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D\subset\mathscr{E}^2$的图象是点集.

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}\subset\mathscr{E}^3,$$

称它为 $\mathscr{E}^3$中的一个曲面(surface).

(2) 由参数方程

$$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v),\end{cases}\qquad (u,v)\in D\subset\mathscr{E}^2$$

所确定的二元函数的图象是点集

$$\{(x,y,z)\mid x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D\},$$

也称为 $\mathscr{E}^3$中的一个曲面.

定义 7.2.9 设 $f:\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}$ 在定义域 Ω 上是连续的且是1-1的(即对点 $P(x_1,\cdots,x_n),P'(x_1',\cdots,x_n')\in\Omega$,当 $P\neq P'$,有 $f(P)\neq f(P')$),则称曲面 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$在 Ω 上是**简单曲面**

(simple surface)(即曲面不断裂且不自相交).

特殊情形:

(1) 二元函数 $z=f(x,y)$的图象是 $\mathscr{E}^3$中的简单曲面.

(2) 若 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)$ 在$(u,v)\in D$上是1-1的,则其图象称为简单曲面.

定义 7.2.10 设有 $f:\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^1$及实数 c,若在点 $P\in\Omega$,$f(P)=c$,则称这些点 P 组成的集合为**等值 c 的集合**(level set of value c),记成$\{P\in\Omega\mid f(P)=c\}\subset\mathscr{E}^n$,当 $n=3$,称此集合为**等值面**(level surface),当 $n=2$,称此集合为**等值线**(level curve).

7.3 多元函数的极限及连续性

7.3.1 多元函数的极限

考察 n 元函数 $u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^1$在 $\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)$的极限.

定义 7.3.1 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$的聚点,$f(\boldsymbol{x})$在 $\Omega\setminus\boldsymbol{x}_0$ 有定义,$A\in\mathbb{R}$,若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $\boldsymbol{x}\in B_0(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap\Omega$, 就有 $|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$,则称在 Ω 上当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ 时,$f(\boldsymbol{x})$以 A 为**极限**(limit),记作$\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}f(\boldsymbol{x})=A$ 或$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=A$ 或 $\lim\limits_{\substack{x_1\to\mathring{x}_1\\ \vdots\\ x_n\to\mathring{x}_n}}f(x_1,\cdots,x_n)=A$.

定理 7.3.2 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 Ω 的聚点,$f(\boldsymbol{x})$在 $\Omega\setminus\boldsymbol{x}_0$ 有定义,则$\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}f(\boldsymbol{x})=A$的充要条件是:对任意 $S\subset\Omega$,$\boldsymbol{x}_0$ 为 S 的聚点,均有$\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in S}}f(\boldsymbol{x})=A$.

推论 7.3.3 在上述定理条件下,又设 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $S_1,S_2\subset\Omega$ 的聚点,若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in S_1}} f(x)=A_1,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in S_2}} f(x)=A_2,\qquad A_1\neq A_2,$$

则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x)$不存在.

定理 7.3.4 设 x_0 是 Ω 的聚点，$f(x)$在 $\Omega\backslash x_0$ 有定义，则以下条件之一均为$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in\Omega}} f(x)$存在的充要条件：

(1) 对 Ω 中任一满足 $x_n\neq x_0$ 且对$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 的点列 x_n，均有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$存在且相等.

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 x'，$x''\in\Omega$ 且 $x'\in B_0(x_0;\delta)$，$x''\in B_0(x_0;\delta)$时，就有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

定理 7.3.5 设 x_0 是 Ω 的聚点，$f(x)$，$g(x)$在 $\Omega\backslash x_0$ 上有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=AB$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

7.3.2 二元函数的累次极限

定义 7.3.6 设 $f(x,y)$在 $\Omega=\{(x,y)\ |0<|x-x_0|<a$，$0<|y-y_0|<b\}$上有定义．对任意固定的 $y\in(0<|y-y_0|<b)$，若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在，记作 $\varphi(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，再考虑$\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$，记作$\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，称右端为 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)先对 x 后对 y 的**累次极限**(repeated limits)，类似地，称$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$为 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)先对 y 后对 x 的**累次极限**.

定理 7.3.7 设：(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$；(2)对任意 $y\in$

$(0<|y-y_0|<b)$存在$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，则累次极限$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$.

推论 7.3.8 设：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$；

(2) 对任意 $y\in(0<|y-y_0|<b)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在，对任意 $x\in(0<|x-x_0|<a)$，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$存在. 则

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A.$$

此推论给出极限次序可交换的充分条件.

推论 7.3.9 若$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$与$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$存在但不相等，则$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$必不存在.

7.3.3 多元函数的连续性

定义 7.3.10 设 $f(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^1$，$\boldsymbol{x}_0\in\Omega$，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap\Omega$ 就有 $|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$，则称 $f(\boldsymbol{x})$**在点 $\boldsymbol{x}_0$ 连续**(continuity). 若 $f(\boldsymbol{x})$在区域 Ω 上任一点均连续，则称 $f(\boldsymbol{x})$**在 Ω 上连续**. 记作 $f(\boldsymbol{x})\in C(\Omega,\mathscr{E}^1)$.

特殊情形：设(x_0,y_0)为二元函数 $f(x,y)$的定义域 $D\in\mathscr{E}^2$的一个内点，若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续. 若 $z=f(x,y)$在区域 $D\in\mathscr{E}^2$上各点均连续，则称其在 D 上连续，其图形是在 $\mathscr{E}^3$中无裂缝的曲面.

定义 7.3.11 与定义 7.3.10 等价的定义：设 $u=f(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^1$，$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}\in\Omega$，若

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to 0}\Delta u=\lim_{\Delta\boldsymbol{x}\to 0}(f(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}))=0,$$

其中 $\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$，则称 $f(\boldsymbol{x})$**在点 $\boldsymbol{x}_0$ 连续**.

定理 7.3.12 设 $f(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^1$，$g(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^1$，且

$f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ 处连续，则 $f(\boldsymbol{x})\pm g(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{x})\cdot g(\boldsymbol{x}),\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$ $(g(\boldsymbol{x}_0)\neq 0)$也在 $\boldsymbol{x}_0$ 处连续.

定理 7.3.13 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ 连续，$u=f(\boldsymbol{y})$在 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)$连续，则复合函数 $u=f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$在 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ 也连续.

定义 7.3.14 称 $f(\boldsymbol{x})$的不连续点为**间断点**(point of discontinuity). 若 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$的间断点，但$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})$存在，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为**可去间断点**(point of removable discontinuity).

定理 7.3.15 若 $f(\boldsymbol{x})$在有界闭区域 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$上连续，即 $f(\boldsymbol{x})\in C(\Omega,\mathscr{E}^1)$，则 $f(\boldsymbol{x})$在 Ω 上有界，即 $\exists M>0$，使得$|f(\boldsymbol{x})|\leqslant M$，$\boldsymbol{x}\in\Omega$.

定义 7.3.16 设 $f(\boldsymbol{x})$是点集 S 上的函数，S 的每个点均为 S 的聚点，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，使任意两点 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in S'$，当 $\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|<\delta(\varepsilon)$时，均有$|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon$，则称 $f(\boldsymbol{x})$在 S 上**一致连续**(uniformly continuous).

定理 7.3.17 若 $f(\boldsymbol{x})$在有界闭区域 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$上连续，则 $f(\boldsymbol{x})$在 Ω 上一致连续.

定理 7.3.18 若 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$是有界闭区域(或有界闭集)，$f(\boldsymbol{x})\in C(\Omega,\mathscr{E}^1)$，则 $f(\boldsymbol{x})$在 Ω 上可取到最小值和最大值，即 $\exists\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^{**}\in\Omega$，$\forall\boldsymbol{x}\in\Omega$，有 $f(\boldsymbol{x}^*)\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{x}^{**})$，其中 $f(\boldsymbol{x}^*)=\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega}f(\boldsymbol{x})$，$f(\boldsymbol{x}^{**})=\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega}f(\boldsymbol{x})$.

7.4 多元向量函数及其极限、连续性

7.4.1 概念

定义 7.4.1 设有以 $x_1,\cdots,x_n$ 为自变量的一组函数

$$f_1(x_1,\cdots,x_n)=f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_m)=f_m(\boldsymbol{x}),$$

其中向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega\subset\mathscr{E}^n$，$\boldsymbol{x}$ 有惟一确定与之对应的向量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{E}^m$，即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}.$$

称 $\boldsymbol{f}$ 为从 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$ 到 $\mathscr{E}^m$ 的一个**向量函数**(vector function)，Ω 为函数的定义域，$\boldsymbol{f}(\Omega)$ 为定值域，记作

$$\boldsymbol{f}:\Omega\subset\mathscr{E}^n\longrightarrow\boldsymbol{f}(\Omega)\subset\mathscr{E}^m,\qquad \boldsymbol{x}\longmapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\tag{7.1}$$

注 7.4.2 在定义 7.4.1 中

(1) 当 $n=1,m=1$ 时，f 是一元数值函数.

(2) 当 $n=1,m>1$ 时，$\boldsymbol{f}$ 是一元向量函数，表示一元 m 个函数组.

(3) 当 $n>1,m=1$ 时，f 是 n 元数值函数.

(4) 当 $n>1,m>1$ 时，$\boldsymbol{f}$ 是 n 元向量函数，表示 n 元 m 个函数组.

后两类情形有时统称为多元函数.

例 7.4.3 设有以 x,y 为自变量的 3 个函数：

$$f_1(x,y)=x\mathrm{e}^y-\sin y,$$
$$f_2(x,y)=xy,$$
$$f_3(x,y)=x+\mathrm{e}^y.$$

可用向量表达这一组函数如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}&=(f_1(x,y),f_2(x,y),f_3(x,y))\\&=(x\mathrm{e}^y-\sin y,xy,x+\mathrm{e}^y),\end{aligned}$$

也可用列向量表为

$$\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\mathrm{e}^y-\sin y \\ xy \\ x+\mathrm{e}^y \end{pmatrix}.$$

若用 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y)$，则此例为 $\boldsymbol{f}:\mathscr{E}^2\to\mathscr{E}^3,\boldsymbol{\alpha}\longmapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha})$.

定义 7.4.4 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$.

(1) 定义和函数(summation)

$$\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}:\Omega\subset\mathscr{E}^n\longrightarrow\mathscr{E}^m,\qquad \boldsymbol{x}\longmapsto(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$$

为$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.

(2) 定义实数 c 乘函数(multiplied by a constant)

$$c\boldsymbol{f}:\Omega\subset\mathscr{E}^n\longrightarrow\mathscr{E}^m,\qquad \boldsymbol{x}\longmapsto(c\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$$

为$(c\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

(3) 定义复合函数(composition)如下:设

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_l\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix},$$

并设

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\longrightarrow\pi\subset\mathscr{E}^l,$$
$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}):\pi\subset\mathscr{E}^l\longrightarrow\mathscr{E}^m,$$

即有

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_l\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ g_l(x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(y_1,\cdots,y_l)\\ \vdots\\ f_m(y_1,\cdots,y_l)\end{pmatrix}.$$

复合函数为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$,即

$$\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_l(x_1,\cdots,x_n))\\ \vdots\\ f_m(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_l(x_1,\cdots,x_n))\end{pmatrix}.$$

7.4.2 向量函数的极限及连续性

考察向量函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})&=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))\\&=(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n)),\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1\cdots,\mathring{x}_n)$的极限问题，即考察函数组 $f_i(\boldsymbol{x})$整体的极限$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1,\cdots,m)$.

定义 7.4.5　向量函数的极限(limits of vector functions)

设(1) $\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)$是 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$ 的聚点；

(2) 向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))$定义在 $\Omega\backslash\boldsymbol{x}_0$ 上；

(3) $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_m)\in\mathscr{E}^m$. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $\boldsymbol{x}\in\Omega$, $0<\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\delta$　就有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{a}\|=\Big[\sum_{i=1}^{m}(f_i(\boldsymbol{x})-a_i)^2\Big]^{1/2}<\varepsilon,$$

则称在 Ω 上，当 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ 时，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$以 $\boldsymbol{a}$ 为**极限**，记作 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0\\ \boldsymbol{x}\in\Omega}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}$ 或简记$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}$.

注　此定义表明$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}$ 的充要条件是

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f_i(\boldsymbol{x})=a_i,\qquad i=1,\cdots,m.$$

下面各条件是等价的，均可作为连续性的定义.

定义 7.4.6　(1) 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$定义在点集 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$ 上，$\boldsymbol{x}_0\in\Omega$，若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$，当 $\boldsymbol{x}\in\Omega\cap B(\boldsymbol{x}_0;\delta)$时，就有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\|<\varepsilon,$$

则称 **$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 Ω 上的 $\boldsymbol{x}_0$ 连续**，记作 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C(\Omega,\mathscr{E}^m)$并表示值域属于 $\mathscr{E}^m$.

(2) 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$, $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$，若对任意点列 $\boldsymbol{x}_n\in\Omega$, $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，则称 **$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续**(continuity).

(3) 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$, $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x}\in\Omega$，若$\lim\limits_{\Delta\boldsymbol{x}\to 0}\Delta\boldsymbol{u}=\lim\limits_{\Delta\boldsymbol{x}\to 0}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{0}$，其中 $\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$，则称 **$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续**.

定理 7.4.7　连续函数将有界闭集映射为有界闭集(即设有

界闭集$\Omega\subset\mathscr{E}^n$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C(\Omega,\mathscr{E}^m)$，则$\boldsymbol{f}(\Omega)$是$\mathscr{E}^m$中的有界闭集)，且存在$\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^{**}\in\Omega$使得

$$\sup_{x',x''\in\Omega}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|=\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{**})\|.$$

推论 7.4.8 设$\Omega\subset\mathscr{E}^n$是有界闭集，$f(\boldsymbol{x})\in C(\Omega,\mathscr{E}^m)$，则$f(\boldsymbol{x})$在$\Omega$上取到最小值和最大值，即$\exists\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}^{**}\in\Omega$，$\forall\boldsymbol{x}\in\Omega$，有

$$f(\boldsymbol{x}^*)\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{x}^{**}),$$

其中$f(\boldsymbol{x}^*)=\min\limits_{x\in\Omega}f(\boldsymbol{x})$，$f(\boldsymbol{x}^{**})=\max\limits_{x\in\Omega}f(\boldsymbol{x})$.

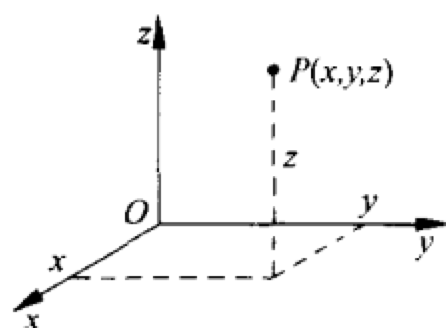
定理 7.4.9 设$\Omega\subset\mathscr{E}^n$是有界闭集(或有界闭区域)，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C(\Omega,\mathscr{E}^m)$，则$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\Omega$上一致连续. 即$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\Omega$，$\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|<\delta(\varepsilon)$，就有$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)\|<\varepsilon$.

7.5 附录 $\mathscr{V}^3$中的几何图形及公式

(1) 一些名词与基本公式

点与直角坐标

空间直角坐标系中一点P与坐标(x,y,z)一一对应



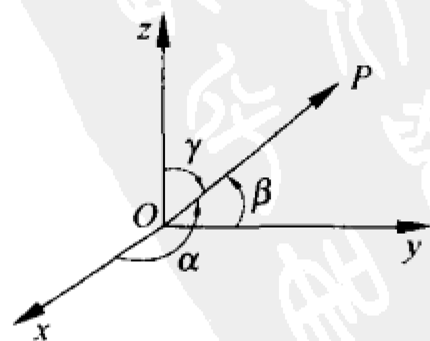
距离

两点$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$间的距离

$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

方向角

起点为原点O的直线OP与三个坐标轴的夹角α,β,γ称为OP的方向角

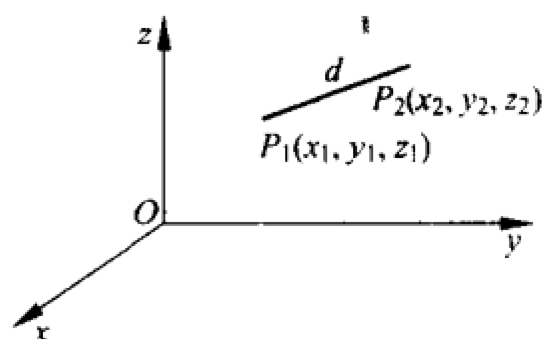


续表

方向余弦

方向角的余弦称为方向余弦：$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$，过两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{d},\ \cos\beta=\frac{y_2-y_1}{d},\ \cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{d}$$



方向数

与直线 L 的方向余弦成比例的任一组数 l, m, n，即

$$l : m : n=\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

定比分点公式

设点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 连成的直线 P_1P_2 上有任一点 P，且 $P\neq P_2$

分比 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$

当 $\lambda\neq-1$，定比分点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

线段 P_1P_2 的中点 $M(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$：

$$\bar{x}=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\quad \bar{y}=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad \bar{z}=\frac{1}{2}(z_1+z_2)$$

(2) 直角坐标系中的平面方程

定理 7.5.1 平面的方程必是 x, y, z 的一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 A, B, C 不同时为零. 反之，上面的一次方程的图形必是 $\mathscr{E}^3$ 中的平面，其中的系数 A, B, C 为该平面的法线方向数，即法向量可取 $\boldsymbol{n}=A\,\boldsymbol{i}+B\,\boldsymbol{j}+C\,\boldsymbol{k}$. 称此方程为平面的一般式.

平面方程与图形	说　明
截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(a,b,c\neq 0)$	a,b,c 分别称为平面在三个坐标轴上的截距
三点式 $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$	平面过三点：$M_1(x_1,y_1,z_1)$ $M_2(x_2,y_2,z_2)$ $M_3(x_3,y_3,z_3)$
点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (A,B,C 不同时为零)	平面过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，且法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向数为 A,B,C
法线式 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	α,β,γ 为平面的法线的方向角，$p\geqslant 0$ 为原点到平面的距离
向量式 $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}=0$	平面过 $\boldsymbol{r}_0$ 的端点且与 $\boldsymbol{n}$ 垂直

(3) 直线方程

定义 7.5.2　空间直线 L 是由两个平面相交而成.

① 直线一般式

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

L 的方向数为

$$l:m:n=\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}.$$

② 直线的标准式

$$L:\quad \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

设直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向数为 l,m,n.

③ 直线的参数式

$$L:\begin{cases}x=x_0+lt,\\y=y_0+mt,\\z=z_0+nt,\end{cases}\qquad -\infty<t<+\infty.$$

④ 直线的两点式

设直线 L 过两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$

$$L:\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

⑤ 直线的向量式

设直线过 $\boldsymbol{r}_0$ 的端点且与已知 $\boldsymbol{a}$ 平行（见图 7.1）

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\,\boldsymbol{a}.$$

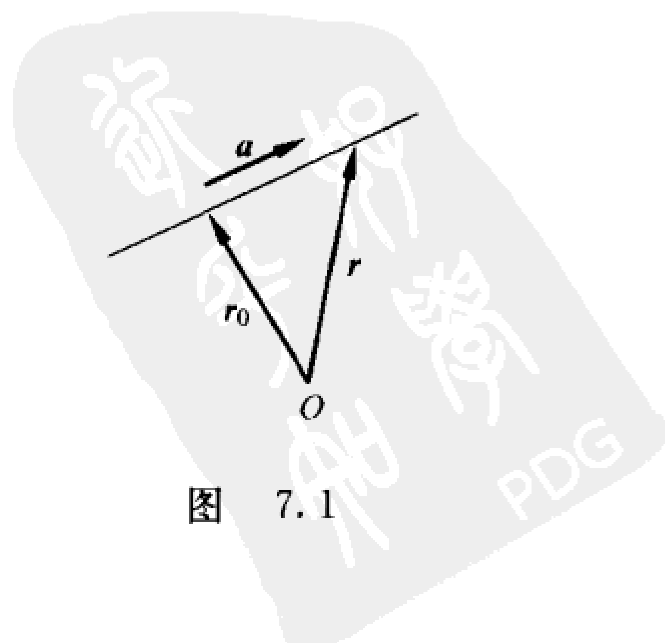


图 7.1

(4) 点、直线、平面间的关系

方程与图形	公　　式
二直线的夹角 φ $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$	作 $s_1 /\!/ L_1$，$s_2 /\!/ L_2$ $\varphi=(s_1,s_2)=L_1$ 与 L_2 的夹角 $\cos\varphi=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$ $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$
二不平行直线的最短距离 d $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$	$d=\left\|\dfrac{\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}n_1 & l_1\\ n_2 & l_2\end{vmatrix}^2}}\right\|$ 最外面的符号"|　|"表示绝对值
二直线共面的条件 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ $L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$	$d=0$，即 $\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0$
直线 L 与平面 Π 的夹角 φ $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ $\Pi:Ax+By+Cz+D=0$	$\sin\varphi=\dfrac{\|Al+Bm+Cn\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

续表

方程与图形	公　　式
二平面的夹角 φ $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\varphi=(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)$ $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
平面束 Π 的方程 过二不平行平面 Π_1,Π_2 之交线 L 的全体平面的集合，称为平面束 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\Pi: \lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+$ $\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ (λ,μ 为参数，$-\infty<\lambda<+\infty,-\infty<\mu<+\infty$)
三个平面 Π_1,Π_2,Π_3 共线的条件 $\Pi_1.\Pi_2$ 同上 $\Pi_3: A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$	矩阵 $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix}$ 的秩等于 2
点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 Π 的距离 d $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

(5) 直线与平面平行与正交条件

	平行条件	正交条件
线与线	$\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$	$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$
面与面	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
线与面	$Al+Bm+Cn=0$	$\dfrac{l}{A}=\dfrac{m}{B}=\dfrac{n}{C}$

(6) 二次曲面

方　　程	图　　形
球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 球心(0,0,0) 半径 R	z R R R O y x
球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 球心(a,b,c) 半径 R	z C(a, b, c) c O y a b x
椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $a,b,c\neq0$	z c O b a y x
单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	z O b a y x

续表

方　　程	图　　形
双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	
旋转抛物面 $z=a^2(x^2+y^2)$ 由 Oxz 平面上的曲线 $z=a^2x^2$ 绕 z 轴旋转而得	
双曲抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$	

续表

方　程	图　形
双曲抛物面 $z=xy$	
椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 当 $a=b$ 时为圆锥面	
椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 当 $a=b$ 时为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$	
双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	

续表

方　　程	图　　形
抛物柱面 $x^2=2py,\quad p>0$	

注　准线在坐标面上(如 Oxy 面),母线平行于坐标轴(如 z 轴)的柱面,其方程必缺一变量(如 z).

(7) 柱坐标(cylindrical coordinates),球坐标(spherical coordinates)

① 柱坐标是用下列三个正交曲面族:

圆柱面族　$x^2+y^2=r^2$;

平面族　　$z=c$;

平面族　　$ax+by=0$

来表示空间的位置,以 θ 表示 $ax+by=0$ 与坐标面 Oxz 的夹角,则空间一点 P 与 (r,θ,z) 一一对应,称为点 P 的柱坐标,记作 $P(r,\theta,z)$,如图 7.2所示,一点的柱坐标与直角坐标间的关系为

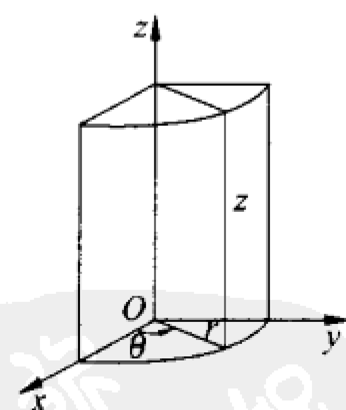


图　7.2

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z.\end{cases}$$

此处 $0\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $-\infty<z<+\infty$.

例如,柱坐标中 $r=a$ 表示底半径为 a,对称轴为 z 轴的圆

柱面.

② 球坐标是用下列三个正交曲面族：

球面族　　$x^2+y^2+z^2=R^2$；

平面族　　$ax+by=0$；

圆锥面族　$x^2+y^2=cz^2$

来表示空间点的位置．以 φ 表示圆锥面 $x^2+y^2=cz^2$ 与 z 轴间的夹角，以 θ 表示平面 $ax+by=0$ 与坐标面 Oxz 的夹角，则空间一点 P 与 (ρ,φ,θ) 一一对应，称为 P 的球坐标，记作 $P(\rho,\varphi,\theta)$，如图 7.3所示.

一点的球坐标 (ρ,φ,θ) 与直角坐标 (x,y,z) 间的关系为

$$\begin{cases}x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\rho\cos\varphi.\end{cases}$$

其中 $\rho\geqslant0$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta<2\pi$.

例如，球坐标中 $\rho=R$ 表示球心在原点，半径为 R 的球面.

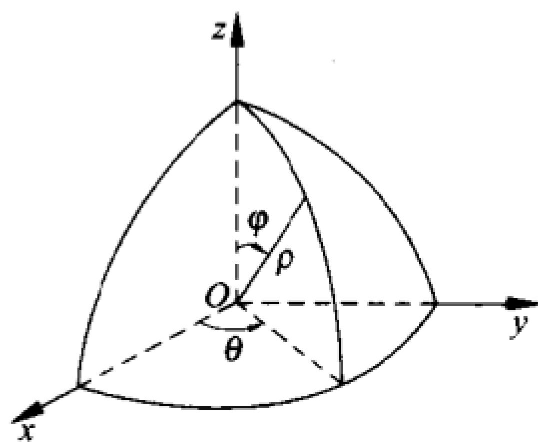


图　7.3

8 多元函数的微分学

本章涉及自变量是$(x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{E}^n$，函数值是实数的函数$f(x_1,\cdots,x_n)$，可用向量表为$f(\boldsymbol{x})$，其中$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，即

$$f:\Omega\subset\mathscr{E}^n\longrightarrow\mathscr{E}^1,\qquad \boldsymbol{x}\longmapsto f(\boldsymbol{x}).$$

8.1 偏导数

定义 8.1.1 设$f(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_i,\cdots,\mathring{x}_n)$的某个邻域有定义，若对$i=1,2,\cdots,n$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}_0+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{x}_0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_{i-1},\mathring{x}_i+h,\mathring{x}_{i+1},\cdots,\mathring{x}_n)-f(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_i,\cdots,\mathring{x}_n)}{h}$$

存在，则称这极限为$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$对x_i的**一阶偏导数**，记作$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$或$\dfrac{\partial f(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)}{\partial x_i}$或$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$，或$f'_{x_i}(\boldsymbol{x}_0)$，或$f'_{x_i}(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)$，或$f'_{x_i}|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$，并称$f(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$对$x_i$的偏导数存在.

求偏导数的运算实质上是对一元函数求导数，故有

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}f(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_{i-1},x_i,\mathring{x}_{i+1},\cdots,\mathring{x}_n)\bigg|_{x_i=\mathring{x}_i}.$$

例如，二元函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)的一阶偏导数为

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\bigg|_{x=x_0},$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\bigg|_{y=y_0}.$$

二元函数 $z=f(x,y)$ 偏导数的几何解释(见图 8.1):
$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$是曲面$z=f(x,y)$与平面 $y=y_0$ 的交线

$$\gamma_1:\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0\end{cases}$$

在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$(其中$z_0=f(x_0,y_0)$)处的切线 T_1 对Ox 轴的斜率:$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\tan\alpha$. 类似地,有$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\tan\beta$.

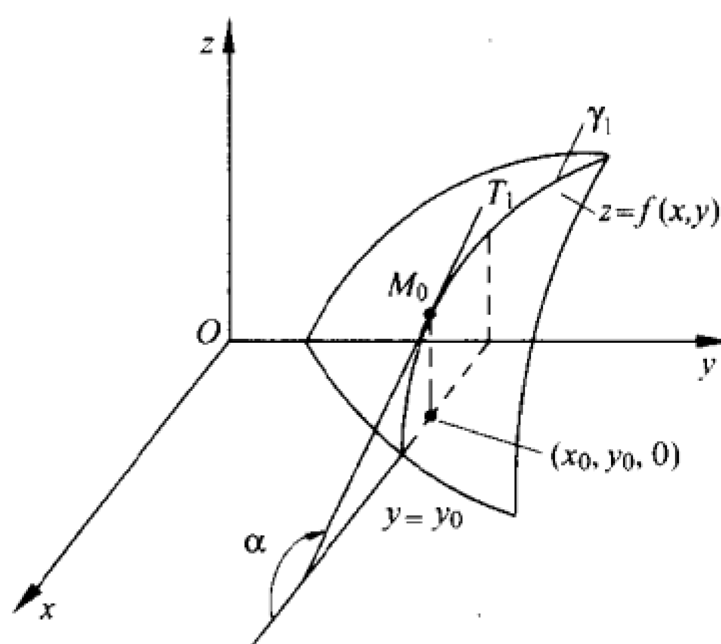


图 8.1

定义 8.1.2 若 $f(\boldsymbol{x})$在每一点 $\boldsymbol{x}\in\Omega\subset\mathscr{E}^n$都有对 x_i 的偏导数,则在任意点 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 处 $f(\boldsymbol{x})$对 x_i 的偏导数仍是 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$的函数,称作 f 对 x_i 的**偏导函数**,简称**偏导数**(partial derivative),记作$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$,或$\frac{\partial f}{\partial x_i}$,或 $f'_{x_i}(\boldsymbol{x})$,或 f'_{x_i}.

定理 8.1.3 设 $f(x,y)$在开区域 $D\subset\mathscr{E}^2$内处处存在有界偏导数 f'_x和 f'_y,即

$$|f'_x(x,y)|<M,\quad |f'_y(x,y)|<M,\qquad (x,y)\in D,$$

其中 M 与 x,y 无关,则 $f(x,y)$在 D 内处处连续.

定理 8.1.4　微分中值定理　若 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)$ 的某邻域 $B(\boldsymbol{x}_0)$ 存在偏导数，则对任意 $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0)$，至少存在一组点 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 使得

$$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{a}_i)}{\partial x_i}(x_i-\mathring{x}_i)$$

8.2　全微分

定义 8.2.1　设 $u=f(\boldsymbol{x})$ 定义在开区域 Ω 上，$\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)$ 为 Ω 的内点．若存在一个线性函数 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{h}=L_1h_1+\cdots+L_nh_n$，其中

$$\boldsymbol{L}=(L_1,\cdots,L_n),$$

$$\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-\mathring{x}_1\\ \vdots\\ x_n-\mathring{x}_n\end{pmatrix},$$

使得 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 x_0 的全增量可表为

$$\Delta u=f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{h}+o(\rho),$$

此处 $\rho=\sqrt{h_1{}^2+\cdots+h_n{}^2}$，$\boldsymbol{L}$ 只与 $\boldsymbol{x}_0$ 有关，与 $h_1,\cdots,h_n$ 无关，则称 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ **可微**(differentiable)，称一次式 $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{h}$ 为 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的**全微分**(total differential)，记作 $\mathrm{d}u\big|_{x=x_0}$ 或 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$.

若 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 内处处可微，则称 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 可微，此函数在任意点 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 的全微分记作 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{h}$.

由于 $\Delta u-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=o(\rho)$，故称全微分 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{h}$ 为 Δu 的**线性主部**.

若规定自变量 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 的全微分为 $\mathrm{d}x_i(i=1,\cdots,n)$，则有

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{h}=\boldsymbol{L}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(L_1,\cdots,L_n)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}.$$

定理 8.2.2 函数 $u=f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微的充要条件是 Δu 可表示为

$$\Delta u=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{h}+\alpha(\boldsymbol{h})\rho,$$

其中$\lim\limits_{\rho\to 0}\alpha(\boldsymbol{h})=0$.

定理 8.2.3 若函数 $u=f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,则必在该点连续.

定理 8.2.4 若 $u=f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,则必有:

(1) $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$存在 $(i=1,\cdots,n)$;

(2) $L_i(\boldsymbol{x}_0)=\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$.

于是必有

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)=\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i.$$

定理8.2.5 若 $u=f(\boldsymbol{x})$ 的偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某邻域上存在且在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续,则 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

定义 8.2.6 设点 P_0 是曲面 S 上一点,Π 为过 P_0 的一个平面.记 S 上动点 Q 到 P_0 的距离为 $d=|QP_0|$,Q 到 Π 的距离为 h(如图 8.2).当 $Q\to P_0$ 若有 $\dfrac{h}{d}\to 0$,则称平面 Π 为曲面 S 在

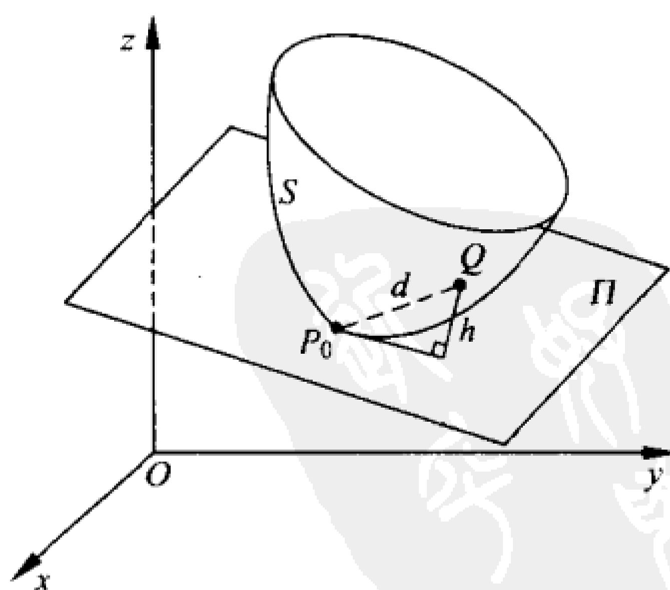


图 8.2

点 P_0 的**切平面**(tangent plane)，称 P_0 为**切点**.

二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}$ 的几何意义：

$$\mathrm{d}z|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)h_1+f'_y(x_0,y_0)h_2$$

是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切平面 Π 在自变量 x,y 分别由 x_0,y_0 增至 x_0+h_1,y_0+h_2 时，z 的增量(见图 8.3).

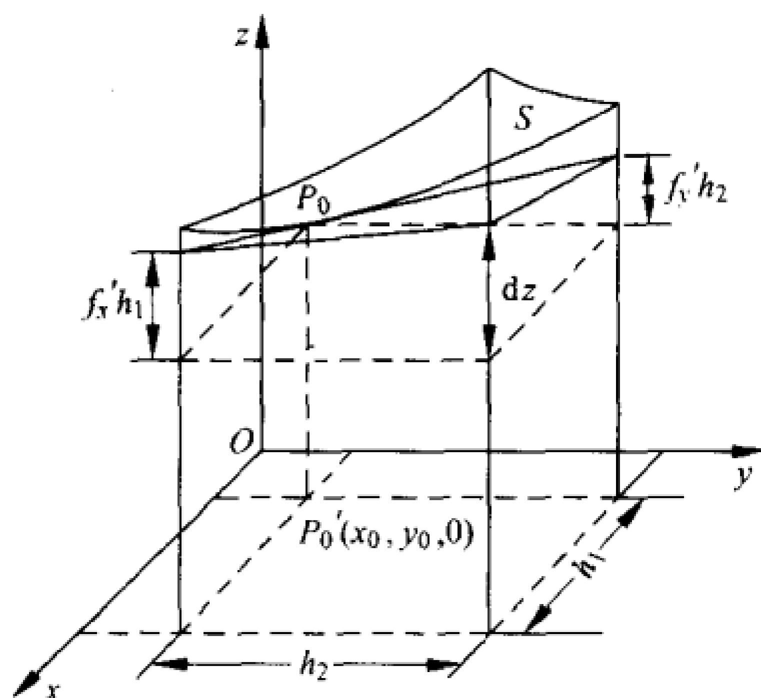


图 8.3

定理 8.2.7 全微分的运算法则：设 $f(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})$ 在 x_0 可微，则

(1) $\mathrm{d}(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}))_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)+\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)$；

(2) $\mathrm{d}(f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}))_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)+\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)g(\boldsymbol{x}_0)$；

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\right)\Bigg|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=\dfrac{g(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)}{g^2(\boldsymbol{x}_0)}\ (g(\boldsymbol{x}_0)\neq 0)$.

8.3 复合函数的偏导数与全微分

定理 8.3.1 链式法则(chain rule) 设：

(1) $\boldsymbol{t}=(t_1,\cdots,t_n)$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$；

(2) $\boldsymbol{g}:\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$，$\boldsymbol{t}\mapsto\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})=(g_1(\boldsymbol{t}),\cdots,g_m(\boldsymbol{t}))$，

$f:\tau\subset\mathscr{E}^m\to\mathscr{E}^1$，$\boldsymbol{x}\mapsto u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_m)$，

其中 Ω 及 τ 都是开区域．此处复合函数 $u=f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))$ 是以 $\boldsymbol{t}$ 为自变量，$\boldsymbol{x}$ 为中间变量．

若 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ 在 $\boldsymbol{t}$ 存在偏导数，$f(\boldsymbol{x})$ 在相应的 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ 可微，则复合函数

$$u=f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))=f(g_1(\boldsymbol{t}),\cdots,g_m(\boldsymbol{t}))$$

在 $\boldsymbol{t}$ 存在偏导数，且

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g_j(\boldsymbol{t})}{\partial t_i}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

写成矩阵形式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial t_n}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial x_m}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m}{\partial t_n}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial t_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial g_m}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial t_n}\end{pmatrix}.$$

例 8.3.2 设 $u=f(x,y,z)$ 及 $x=\alpha(s,t)$，$y=\beta(s,t)$，$z=\gamma(s,t)$ 满足定理的条件，则复合函数 $u=f(x,y,z)=f(\alpha(s,t),\beta(s,t),\gamma(s,t))$. 有下列偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

推论 8.3.3 设 t 取实数，于是定理中相应条件改为

$$f:(a,b)\subset\mathscr{E}^1\to\mathscr{E}^m,$$

$x_1=g_1(t)$，$\cdots$，$x_m=g_m(t)$ 在 t 可导．其余条件不变，则 $u=$

$f(g_1(t),\cdots,g_m(t))$在 t 可导,且

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}.$$

推论 8.3.4 设 x 取实数,定理中相应的条件改为

$$g:\Omega\subset\mathscr{E}^n\longrightarrow\mathscr{E}^1,\qquad \boldsymbol{t}=(t_1,\cdots,t_n)\longmapsto x=g(\boldsymbol{t}),$$

$$f:(a,b)\subset\mathscr{E}^1\longrightarrow\mathscr{E}^1,\qquad x\longmapsto u=f(x),$$

$u=f(x)$在相应的 $x=g(\boldsymbol{t})$可微.其余条件不变,则 $u=f(\boldsymbol{t})=f(g(\boldsymbol{t}))$在 $\boldsymbol{t}$ 存在偏导数,且

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial t_i},\qquad i=1,\cdots,n.$$

定义 8.3.5 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$满足恒等式

$$f(tx_1,\cdots,tx_n)=t^k f(x_1,\cdots,x_n),$$

其中 k 为实数,则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$是一个 k 次的**齐次函数**(homogeneous function).

定理 8.3.6 Euler 公式 设可微函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$是 k 次齐次函数,则

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=kf.$$

定理 8.3.7 复合函数的可微性 假设条件及符号与定理 8.3.1 相同.若 $x_k=g_k(\boldsymbol{t})$ $(k=1,\cdots,m)$均在点 $\boldsymbol{t}$ 可微,$u=f(\boldsymbol{x})$在相应的点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$可微,则复合函数 $u=f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))$在 $\boldsymbol{t}$ 可微,且

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)\mathrm{d}t_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial t_i}\mathrm{d}t_i,$$

或

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g_m}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial t_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}t_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}t_n\end{pmatrix},$$

或

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}))=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_m}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_m}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial t_n}\end{pmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{t},$$

其中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}t_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}t_n\end{pmatrix}\in\mathscr{E}^n.$$

定理 8.3.8 一阶全微分形式的不变性 无论 $x_1,\cdots,x_m$ 为自变量或中间变量,全微分公式

$$\mathrm{d}f(x_1,\cdots,x_m)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m$$

恒成立.此处假定 f 可微,且假定 $x_1,\cdots,x_m$ 为中间变量时,$\{x_i\}$ 也可微.

8.4 方向导数与梯度

8.4.1 方向导数

定义 8.4.1 设 $f(\boldsymbol{x})$ 定义在开区域 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$ 上,$\boldsymbol{x}_0=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$,单位向量 $\boldsymbol{l}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)\in\mathscr{E}^n$. 若 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{l})-f(\boldsymbol{x}_0)}{t}$ 存在,则称此极限数值为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**(directional derivative),记作 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial\boldsymbol{l}}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}$. $f(\boldsymbol{x})$ 在任意点 $\boldsymbol{x}$ 处沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数记作 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{l}}$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{l}}$.

方向导数也可定义为

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1+t\cos\theta_1,\cdots,x_n+t\cos\theta_n)-f(x_1,\cdots,x_n)}{t}.$$

方向导数的几何解释 连续函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数是曲面 $z=f(x,y)$ 与平面

$$\Pi:\ \begin{cases}x=x_0+k\cos\alpha,\\ y=y_0+k\sin\alpha\end{cases}$$

的交线 L 上点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处在平面 Π 内的切线 $\boldsymbol{t}$ 与向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,0)$ 的夹角 τ 的正切 $\tan\tau$，参见图 8.4.

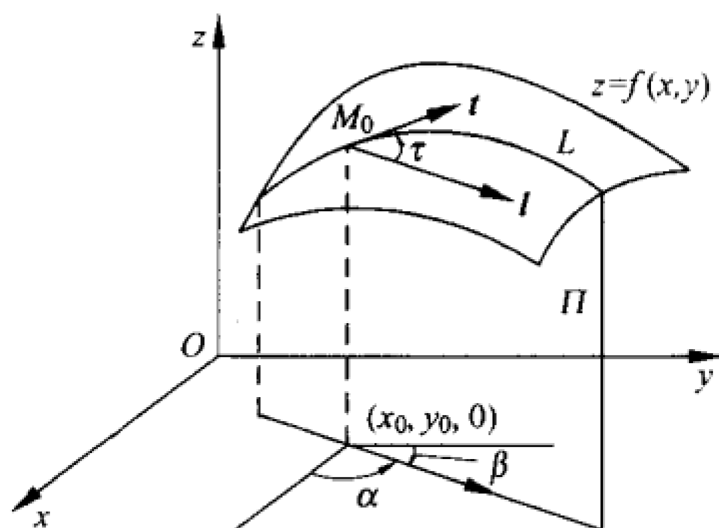


图 8.4

定理 8.4.2 设 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，则沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)$ 的方向导数 $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{l}}$ 存在，且

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{l}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\cos\theta_i.$$

8.4.2 梯度

定义 8.4.3 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 存在偏导数，则称向量 $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1+\cdots+\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\boldsymbol{e}_n$ 为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 的**梯度向量**，简称**梯度**(gradient)，其中偏导数算子向量 $\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\boldsymbol{e}_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ 称为

Hamilton(哈密顿)**算子**(Hamilton operator),或 **Nabla 算子**,记作 grad 或∇,即

$$\mathrm{grad}=\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\boldsymbol{e}_n\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

$f(\boldsymbol{x})$在点 $\boldsymbol{x}$ 的梯度记作

$$\mathrm{grad}\ f=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

梯度是向量 $\boldsymbol{x}$ 的向量函数,即对每一组自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 对应一个梯度向量(n 个值).例如,$u=f(x,y,z)$在(x,y,z)的梯度为

$$\mathrm{grad}\ u=\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为标准向量基

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

设 $u=f(x,y,z)=xy+yz$,则

$$\nabla u=y\boldsymbol{i}+(x+z)\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}=(y,x+z,y).$$

定理 8.4.2 可改写为如下定理.

定理 8.4.4 设 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}$ 可微,则 grad f 存在,且 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathrm{grad}\ f\cdot\boldsymbol{l}=|\mathrm{grad}\ f|\cos\langle\mathrm{grad}\ f,\boldsymbol{l}\rangle$.

推论:

(1)若 grad $f=\boldsymbol{0}$,则沿任何方向 $\boldsymbol{l}$,$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=0$.

(2)若 grad $f\neq\boldsymbol{0}$,则当 $\boldsymbol{l}=\frac{\mathrm{grad}\ f}{|\mathrm{grad}\ f|}$时,$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$最大,且$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=|\mathrm{grad}\ f|$,即梯度向量 grad f 指向函数值 $f(\boldsymbol{x})$变化最快的方向,它的长度$|\mathrm{grad}\ f|$等于 f 在这个方向上的变化率.

性质 8.4.5 梯度有下列性质:

(1) $\nabla(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\nabla u_1+c_2\nabla u_2$,其中 c_1,c_2 是常数;

(2) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$;

(3) $\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\nabla u-u\nabla v}{v^2}$ $(v\neq 0)$;

(4) $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$.

8.5 高阶偏导数与高阶全微分

8.5.1 高阶偏导数

定义 8.5.1 设$u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$的偏导数$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$在 $\boldsymbol{x}$ 处对 $x_j(1\leqslant j\leqslant m)$的偏导数$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$存在,则称它为 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}$ 处的**二阶偏导数**,记作

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right),\quad 或\ f''_{x_ix_j},\quad 或\ f^{(2)}_{x_ix_j}.$$

例如,二元函数 $z=f(x,y)$可有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

类似地可定义三阶,四阶,…,n 阶偏导数.

设 $u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_m)$的 $n-1$(n 为大于 1 的正整数)阶偏导数$\frac{\partial^{n-1} f(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k_{n-1}}\cdots\partial x_{k_2}\partial x_{k_1}}$在 x 处对 x_{k_n} 的偏导数$\frac{\partial}{\partial x_{k_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k_{n-1}}\cdots\partial x_{k_2}\partial x_{k_1}}\right)$存在,则称它为 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}$ 处的 n **阶偏导数**(n-order partial derivative),记作

$$\frac{\partial^n f(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k_n}\cdots\partial x_{k_2}\partial x_{k_1}}=\frac{\partial}{\partial x_{k_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f(\boldsymbol{x})}{\partial x_{k_{n-1}}\cdots\partial x_{k_2}\partial x_{k_1}}\right).$$

定义 8.5.2 对不同自变量的高阶偏导数称为**混合偏导数**(mixed partial derivative).

定理 8.5.3 若 $u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$ 的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(i\neq j)$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 处连续，则在点 $\boldsymbol{x}$ 必有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$.

推论 8.5.4 若所有的 n 阶混合偏导数在某点连续，则在该点处的 n 阶混合偏导数与求导次序无关.

例 8.5.5 若二元函数 $z=f(x,y)$ 的 n 阶偏导数均连续，则它共有 $n+1$ 个 n 阶偏导数

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-k}\partial x^k},\qquad k=0,1,\cdots,n.$$

例 8.5.6 设二元函数 $z=f(x,y)\in C^n(B(x,y))$，$x=x_0+th_1$，$y=y_0+th_2$. 复合函数 $u=f(x_0+th_1,y_0+th_2)$ 对 t 的二阶和 n 阶导数如下：

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1+\frac{\partial f}{\partial y}h_2\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_2^2.$$

可记成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}&=\left(h_1^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2h_1h_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+h_2^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f\\&=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\\&=\sum_{k=0}^{2}\left(\mathrm{C}_2^k\frac{\partial^2}{\partial x^{2-k}\partial y^k}h_1^{2-k}h_2^k\right)f\\&=\sum_{k=0}^{2}\mathrm{C}_2^k\frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-k}\partial y^k}h_1^{2-k}h_2^k.\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}h_1^{n-k}h_2^k\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n}=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f.$$

例 8.5.7 设 m 元函数 $f(\boldsymbol{x})\in C^n$，$u=f(\boldsymbol{x}+t\,\boldsymbol{h})$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)$，$\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_m)$，则有 $\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^n}=\left(\sum_{k=1}^{m}h_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^n f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})$，

或$\frac{\mathrm{d}^n u}{\mathrm{d}t^2}=(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^n f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})$.

定义 8.5.8 设 $f:\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^1$, $f\in C^2(B(\boldsymbol{x}_0))$, $B(\boldsymbol{x}_0)\subset\Omega$，称 $n\times n$ 矩阵

$$H_f(\boldsymbol{x}_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

为 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 **Hessian**（黑塞）**矩阵**（Hessian matrix).

8.5.2 高阶全微分

定义 8.5.9 函数 $u=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_m)\in C^n$ 的全微分 $\mathrm{d}u=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$ 的全微分称为 $f(\boldsymbol{x})$ 的**二阶全微分**，记作

$$\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}(\mathrm{d}u)\quad 或\quad \mathrm{d}^2 f,$$

称 $f(\boldsymbol{x})$ 的 $n-1$ 阶全微分的全微分为 $f(\boldsymbol{x})$ 的 ***n* 阶全微分**（n-order total differentials)，记作

$$\mathrm{d}^n u=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}u)\quad 或\quad \mathrm{d}^n f.$$

例 8.5.10 $z=f(x,y)$ 的二阶和 n 阶全微分如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 z&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2\\&=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\\&=\sum_{k=0}^{2}\mathrm{C}_2^k\frac{\partial^2 f}{\partial x^{2-k}\partial y^k}\mathrm{d}x^{2-k}\mathrm{d}y^k,\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}^n z=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\mathrm{d}x^{n-k}\mathrm{d}y^k,$$

其中在求偏导数时，自变量的微分 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ 应视为常量，记 $\mathrm{d}x^k=$

$(\mathrm{d}x)^k$, $\mathrm{d}x^{n-k} = (\mathrm{d}x)^{n-k}$.

例如，m 元函数 $u = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_m)$ 的二阶微分为

$$\mathrm{d}^2 u = \left(\sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f.$$

对复合函数，没有高阶（$n \geqslant 2$）全微分形式的不变性.

8.6 Taylor 公式

定理 8.6.1 设 $f(\boldsymbol{x}) = C^{n+1}(B(\boldsymbol{x}_0))$，$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in B(\boldsymbol{x}_0)$，$\boldsymbol{h} = (h_1, \cdots, h_m)$，则有 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 n 阶 Taylor 公式：

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0) + R_n,$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{n+1} f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}\theta),$$

称为 Lagrange 余项，$0<\theta<1$.

注 1 将 $B(\boldsymbol{x}_0)$ 改为凸开域 Ω，Taylor 公式仍成立.

注 2 此定理又可用梯度表达如下：设 $f(\boldsymbol{x}) \in C^{n+1}(\Omega)$，$\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h} \in \Omega$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$，则存在数 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \nabla) f(\boldsymbol{x}_0)}{1!} + \cdots + \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \nabla)^n f(\boldsymbol{x}_0)}{n!} + \frac{(\boldsymbol{h} \cdot \nabla)^{n+1} f(\boldsymbol{x}_0 + \theta \boldsymbol{h})}{(n+1)!}.$$

定理 8.6.2 设 $f(\boldsymbol{x}) \in C^p(B(\boldsymbol{x}_0))$，则有 Taylor 公式：

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(\boldsymbol{x}_0) + R_p,$$

其中 $R_p = o(|\boldsymbol{h}|^p)$，$|\boldsymbol{h}| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_m^2} \to 0$. 当 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0} = (0, \cdots, 0)$ 时的 Taylor 公式称为 Maclaurin 公式.

例 8.6.3 设 $\boldsymbol{x}_0 = (\mathring{x}_1, \cdots, \mathring{x}_n)$，$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) = (\mathring{x}_1 + h_1, \cdots,$

$\mathring{x}_n+h_n)$，$f(\boldsymbol{x}):\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^1$，$f(\boldsymbol{x})\in C^2(B(\boldsymbol{x}_0))$，则 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 的二阶 Taylor 公式为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}+\frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(\boldsymbol{x}_0) \\
&\quad +o(|\boldsymbol{h}|^2)\qquad(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}) \\
&= f(\boldsymbol{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}+\frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j \\
&\quad +o(|\boldsymbol{h}|^2).
\end{aligned}
$$

还可利用矩阵将 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的二阶 Taylor 公式表示为

$$
f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)+(\nabla\cdot h)f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+o(|\boldsymbol{h}|^2)
$$

$$
(\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}),
$$

其中 $\boldsymbol{h}$ 的上指标 T 是转置记号，$H_f(\boldsymbol{x}_0)$是 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 Hessian 矩阵，

$$
\boldsymbol{h}=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-\mathring{x}_1\\ \vdots\\ x_n-\mathring{x}_n\end{pmatrix}.
$$

推论 8.6.4 设 $f(\boldsymbol{x})\in C^\infty(B(\boldsymbol{x}_0))$，$\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\in B(\boldsymbol{x}_0)$. $\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_m)$，则有 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 Taylor 级数展开式：

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})&=f(\boldsymbol{x}_0)+\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)f(\boldsymbol{x}_0)}{1!}+\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{2!} \\
&\quad+\cdots+\frac{(h\cdot\nabla)^k f(\boldsymbol{x}_0)}{k!}+\cdots.
\end{aligned}
$$

8.7 隐函数及其微分法

定理 8.7.1 隐函数的存在与惟一性 对于

$$
F(x_1,\cdots,x_n,y)=0,
$$

设：

(1) $F(\boldsymbol{x},y)=F(x_1,\cdots,x_n,y)$ 在以点 $(\boldsymbol{x}_0,y_0)=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n,y_0)$ 为中心的长方体 $\Omega=[\mathring{x}_1-h_1,\mathring{x}_1+h_1;\cdots;\mathring{x}_n-h_n,\mathring{x}_n+h_n;y_0-h',y_0+h']\subset E^{n+1}$ 内连续；

(2) $F(\boldsymbol{x}_0,y_0)=0$；

(3) $\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x},y)}{\partial y}$ 在 Ω 上连续，且 $\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$.

则存在 $B(\boldsymbol{x}_0)\subset B(\boldsymbol{x}_0,y_0)\subset\Omega$，在其上方程式 $F(\boldsymbol{x},y)=0$ 惟一地确定 y 为 $\boldsymbol{x}$ 的单值函数 $y=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\cdots,x_n)$，它满足：

(1) 当 $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0)$ 时，$(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))\in B(\boldsymbol{x}_0,y_0)$，且 $F(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))\equiv 0$；

(2) $f(\boldsymbol{x}_0)=y_0$；

(3) $f(\boldsymbol{x})$ 在 $B(\boldsymbol{x}_0)\subset\mathscr{E}^n$ 内连续.

推论 8.7.2 对于方程 $F(x,y)=0$，设二元函数 $F(x,y)$ 满足：

(1) $F(x,y)$ 在以 (x_0,y_0) 为中心的某矩形域 $R=\{(x,y)\mid |x-x_0|<a,|y-y_0|<b\}$ 上连续；

(2) $F(x_0,y_0)=0$；

(3) $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ 在 R 上连续，且 $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\neq 0$. 则存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset R$，在其上方程 $F(x,y)=0$ 惟一地确定 $y=f(x)$，它满足：

(1) $F(x,f(x))\equiv 0\quad (x\in(x_0-\delta,x_0+\delta))$；

(2) $f(x_0)=y_0$；

(3) $f(x)$ 在 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上连续.

例 8.7.3 方程 $y^3-x=0$. 在点 $(x_0,y_0)=(8,2)$ 的邻域内惟一地确定了连续函数 $y=\sqrt[3]{x}$（参见图 8.5）. 因为 $F(x,y)=y^3-x$ 及 $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=3y^2$，$\dfrac{\partial F(8,2)}{\partial y}=12\neq 0$ 满足推论的条件. 但定理

8.7.1(及推论 8.7.2)中的条件是充分的而并非必要的．如在点$(x_0, y_0)=(0,0)$，$\dfrac{\partial F(0,0)}{\partial y}=0$ 不满足条件(3)，但方程 $y^3-x=0$ 在原点(0,0)仍能确定惟一的连续函数 $y=\sqrt[3]{x}$.

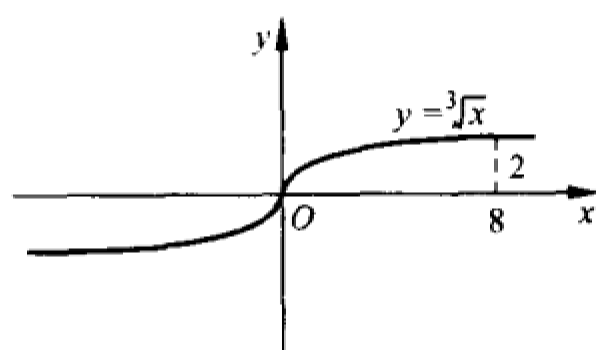


图 8.5

定理 8.7.4 隐函数的可微性 设定理 8.7.1 中的条件都满足，且 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=F(\boldsymbol{x},y)\in C^1(\Omega)$；则由 $F(\boldsymbol{x},y)=0$ 及初值 $(\boldsymbol{x}_0,y_0)$ 所确定的隐函数为 C^1 级连续函数，即 $y=f(x_1,\cdots,x_n)\in C^1(B(\boldsymbol{x}_0))$，且

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}\bigg/\frac{\partial F}{\partial y},\qquad i=1,\cdots,n.$$

8.8 空间曲线及其切线

定义 8.8.1 设 $\boldsymbol{x}(t)\in C([a,b],\mathscr{E}^n)$ 在半开区间 $(a,b]$ 或 $[a,b)$ 上是一一对应的，即在此区间上当 $t_1\neq t_2$ 有 $\boldsymbol{x}(t_1)\neq\boldsymbol{x}(t_2)$，即曲线连续且不自身相交，则称此函数值的集合

$$\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t),t\in(a,b]\quad\text{或}\quad t\in[a,b)\}$$

为 $\mathscr{E}^{n+1}$ 中的**简单曲线**(simple curve)．$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 称为该简单曲线的参数方程. 又若 $\boldsymbol{x}(a)=\boldsymbol{x}(b)$，则称它为**简单闭曲线**(simple closed curve)．又若 $\boldsymbol{x}(t)\in C^1[a,b]$，且 $\boldsymbol{x}'(t)\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}'(a)=\boldsymbol{x}'(b)$，即曲线既无尖点又无角点，则称该曲线是**光滑曲线**(smooth curve)(参见图 8.6).

定义 8.8.2 满足 $\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{0}$，即 $x_1'^2(t)+\cdots+x_n'^2(t)=0$ 的点称为曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 的**奇点**(singular point)，否则称为**常点**(regular point)(非奇点)；特别是满足

$$\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)^2+\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right)^2+\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right)^2=0$$

的点称为曲线

$$L:F(x,y,z)=0,\qquad G(x,y,z)=0$$

的**奇点**,否则称为**常点**(非奇点).

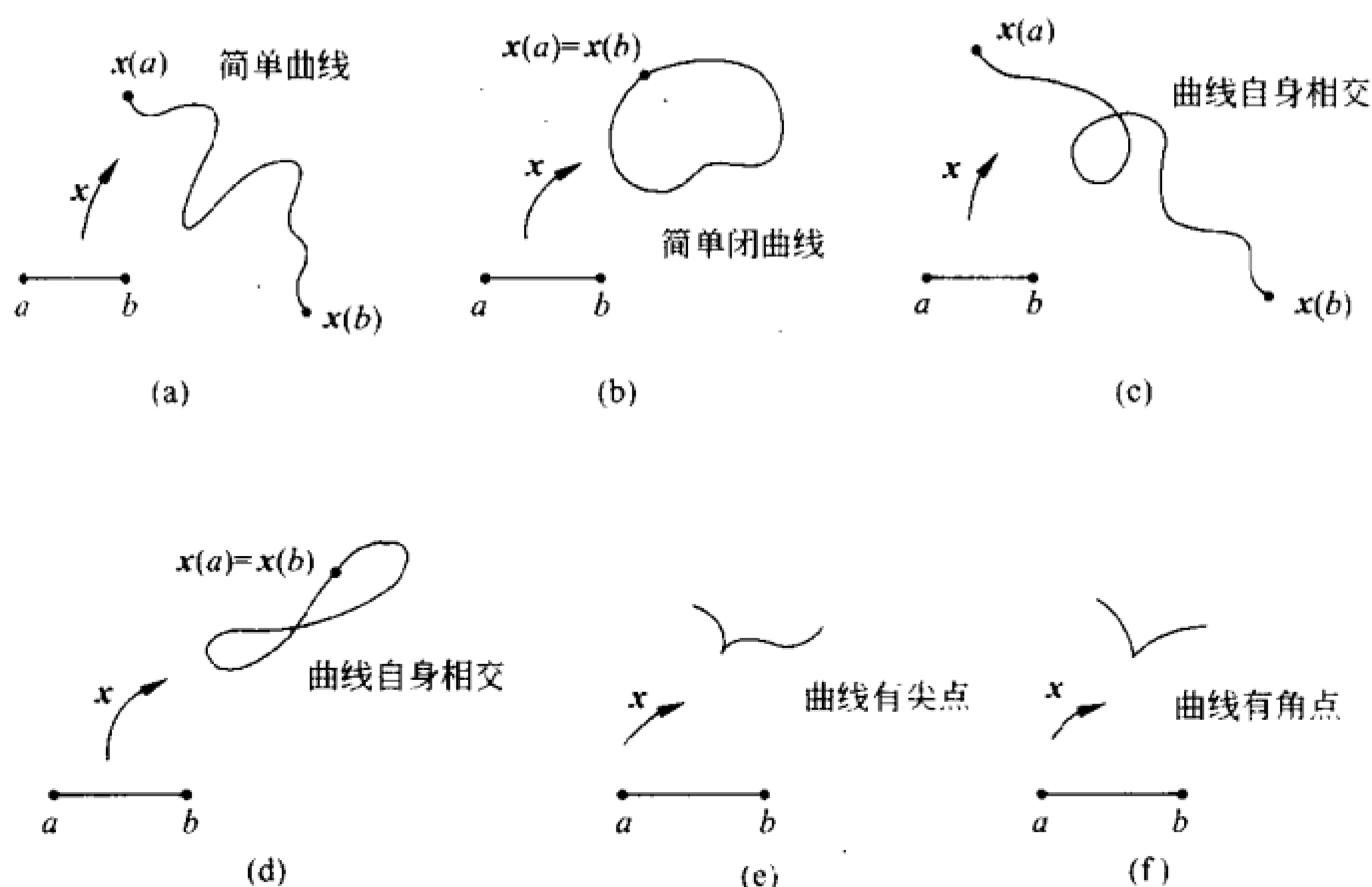


图 8.6

注 (1) 在常点附近的曲线是简单光滑的,在其上任一点附近切线方向连续变化.

(2) $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}F_x' & F_y'\\ G_x' & G_y'\end{vmatrix}$, $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}F_y' & F_z'\\ G_y' & G_z'\end{vmatrix}$,

$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}=\begin{vmatrix}F_z' & F_x'\\ G_z' & G_x'\end{vmatrix}$.

简单曲线方程及切线方程

简单曲线 L 的方程	曲线 L 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的切线方程
(1) $L\subset\mathscr{E}^n$ 参数方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)\in C^1([a,b],\mathscr{E}^n)$ 即 $x_1=x_1(t),\cdots,x_n=x_n(t)$ $t\in[a,b]$ $\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)\in L$ 为 L 上的常点	$\dfrac{x_1-\mathring{x}_1}{x_1'(t_0)}=\cdots=\dfrac{x_n-\mathring{x}_n}{x_n'(t_0)}$ 或 $\boldsymbol{x}-\mathring{\boldsymbol{x}}=\lambda\boldsymbol{x}'(t_0)$ 其中 $\boldsymbol{x}'(t_0)=(x_1'(t_0),\cdots,x_n'(t_0))$ 为 L 在点 $\mathring{\boldsymbol{x}}$ 的切向量，λ 为参数
(2) $L\subset\mathscr{E}^3$ 参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ $t\in[a,b]$ 点 $(x_0,y_0,z_0)=(x(t_0),y(t_0),z(t_0))\in L$ 为 L 上的常点	$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$ 在点 (x_0,y_0,z_0)，曲线 L 的法平面为 $x_0'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$
(3) $L\subset\mathscr{E}^3$ $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 L 上的常点	$\dfrac{x-x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right\rvert_{P_0}}=\dfrac{y-y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right\rvert_{P_0}}=\dfrac{z-z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right\rvert_{P_0}}$

8.9 光滑曲面与切平面

简单曲面的方程	光滑曲面应满足的条件	曲面上 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面 Π 的方程及法向量 $\boldsymbol{n}$
(1) 显式方程 设 $z=f(x,y)$ $(x,y)\in D\subset\mathscr{E}^2\mapsto\mathscr{E}^1$ D 为闭区域	$f(x,y)\in C^1(D)$ $(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2+1\neq 0$ $(x,y)\in D$	$\Pi: z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ 其中 $z_0=f(x_0,y_0)$，且 $(x_0,y_0)\in D$ $\boldsymbol{n}=f'_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f'_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$
(2) 隐式方程 设 $F(x,y,z)=0$ Ω 为闭区域	$F(x,y,z)\in C^1(\Omega,R)$ $(F'_x(P))^2+(F'_y(P))^2+(F'_z(P))^2\neq 0$ 其中点 $P=(x,y,z)\in\Omega\subset\mathscr{E}^3$	$\Pi: F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$ $+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$ 其中 $F(x_0,y_0,z_0)=0$ $\boldsymbol{n}=F'_x\mid_{P_0}\boldsymbol{i}+F'_y\mid_{P_0}\boldsymbol{j}+F'_z\mid_{P_0}\boldsymbol{k}$， $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega\subset\mathscr{E}^3$
(3) 参数方程 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$ $(u,v)\in D\subset\mathscr{E}^2$	$x(u,v)\subset C^1(D)$ $y(u,v)\subset C^1(D)$ $z(u,v)\subset C^1(D)$ $\rho=\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\neq 0$ $(u,v)\in D$	$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)$ $+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0$ 其中 $x_0=x(u_0,v_0)$，$y_0=y(u_0,v_0)$，$z_0=z(u_0,v_0)$ $(u_0,v_0)\in D$ $\boldsymbol{n}=\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{i}+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{j}$ $+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{k}$

续表

简单曲面的方程	光滑曲面应满足的条件	曲面上 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处切平面 Π 的方程及法向量 $\boldsymbol{n}$
(4) 向量方程 $\boldsymbol{r}=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k}$ $(u,v)\in D\subset\mathscr{E}^2$	$\boldsymbol{r}(u,v)\subset C^1(D)$ $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\neq\boldsymbol{0}$	$\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0$ 其中 $x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0),z_0=z(u_0,v_0)$ $(u_0,v_0)\in D$ $\boldsymbol{n}=\left.\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{i}+\left.\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{j}+\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|_{(u_0,v_0)}\boldsymbol{k}$
(5) $\mathscr{E}^n$中的一般隐式方程 曲面 $F(x_1,\cdots,x_n)=0$	$F(\boldsymbol{x})\in C^1(\mathscr{E}^n,\mathbb{R})$ $\mathrm{grad}\,F\neq\boldsymbol{0}$	Π:$\mathrm{grad}\,F(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=0$ 其中 $\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)$在曲面 S 上法向量 $\boldsymbol{n}=\mathrm{grad}\,F(\boldsymbol{x}_0)$

注 (1) 光滑曲面是无角点，无尖点，且处处有切平面，又有边界的连续简单曲面，如球面无边界，锥面顶点(为角点)处不存在切平面，它们都不是光滑曲面．附图 8.7 以示尖点.

(2) 表中(4)不过是用向量形式表达(3)：$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}$，$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}$，

$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{k}$.

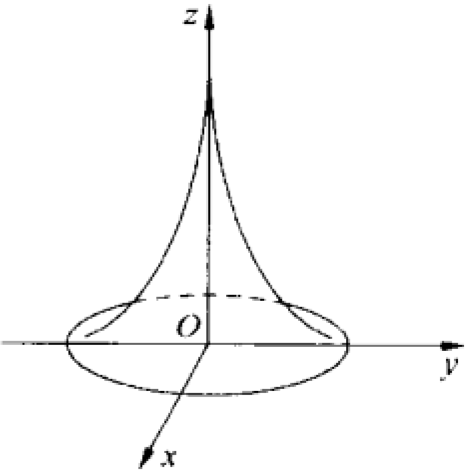


图 8.7

定义 8.9.1

(1) 曲面 $S: z=f(x,y)$上满足 $f_x'^2+f_y'^2=0$ 的点称为 S 的**奇点**(singular point).

(2) 曲面 $S: F(x,y,z)=0$ 上满足 $F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2=0$ 的点称为 S 的**奇点**.

(3) 曲面 $S: x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$上满足

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}=0$$

的点称为 S 的**奇点**.

(4) 曲面 $S: \boldsymbol{r}=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k}$ 上满足$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=\boldsymbol{0}$ 的点称为 S 的**奇点**.

注 这四种定义是统一的,根据曲面方程的形式不同,定义的表达方式不同.

8.10 极值

8.10.1 极值

定义 8.10.1 对于 $f(\boldsymbol{x})$及定点 $\boldsymbol{x}_0$,若存在 $B(\boldsymbol{x}_0)$使得对一切 $\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{x}_0)$有 $f(\boldsymbol{x}_0)\geqslant f(\boldsymbol{x})$(或 $f(\boldsymbol{x}_0)\leqslant f(\boldsymbol{x})$),则称 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 处有**极大值**(或**极小值**)$f(\boldsymbol{x}_0)$. 点 $\boldsymbol{x}_0$ 称为**极大值点**(或**极小值点**). 极大值、极小值统称为**极值**(extremum),极大值点与极小值点统称为**极值点**(extreme point).

定理 8.10.2 极值的必要条件 设 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)$有极值,并存在偏导数$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$,则必有

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\cdots,n \quad 或 \quad \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}.$$

定义 8.10.3 设 $u=f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 存在偏导数，且

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0, \qquad i=1,\cdots,n,$$

则称点 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$ 的**平稳点**(stationary point)或**驻点**.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $z=f(x,y)$ 的一个平稳点，则过 P_0 的切平面是 $z=f(x_0,y_0)$，它与坐标面 Oxy 平行.

定理 8.10.4 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{x}_0=(\overset{\circ}{x}_1,\cdots\overset{\circ}{x}_n)$，设 $f(\boldsymbol{x})\in C^2(B(\boldsymbol{x}_0))$ 且 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 有极小值(或极大值)，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的 Hessian 矩阵 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是正定的或半正定的(负定的或半负定的).(又，正定的或半正定的以及负定的或半负定的统称为**有定的**.)

推论 8.10.5 设 $f(\boldsymbol{x})\in C^2(B(\boldsymbol{x}_0))$，$f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 有极小值(或极大值)，记

$$d_i(\boldsymbol{x}_0)=\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & f''_{x_1x_i}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_ix_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & f''_{x_ix_i}(\boldsymbol{x}_0) \end{vmatrix},$$

则 $d_i(\boldsymbol{x}_0)\geqslant 0$ (或 $(-1)^i d_i(\boldsymbol{x}_0)\geqslant 0$) $(i=1,\cdots,n)$.

推论 8.10.6 设 $f(\boldsymbol{x})\in C^2(B(\boldsymbol{x}_0))$，若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 不是有定的，则 $\boldsymbol{x}_0$ 不是 $f(\boldsymbol{x})$ 的极值点.

定理 8.10.7 极值的充分条件 设 $f(\boldsymbol{x})\in C^2(B(\boldsymbol{x}_0))$，若 $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0(i=1,\cdots,n)$，且 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是正定的(或负定的)，则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 有极小值(或极大值).

推论 8.10.8 设 $f(\boldsymbol{x})\in C^2(B(\boldsymbol{x}_0))$，$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

(1) 若 $d_i(\boldsymbol{x}_0)>0$ $(i=1,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的极小点.

(2) 若 $(-1)^i d_i(\boldsymbol{x}_0)>0$ $(i=1,\cdots,n)$，则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$ 的极大点.

推论 8.10.9 设二元函数 $z=f(x,y)\in C^2(B(P_0))$，$P_0=$

$(x_0, y_0) \subset \mathscr{E}^2$，且有 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$，记 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$，$B = f''_{xy}(x_0, y_0)$，$C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

(1) 若 $d_1(x_0, y_0) = A > 0$，$d_2(x_0, y_0) = AC - B^2 > 0$，则 $P_0(x_0, y_0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小点.

(2) 若 $d_1(x_0, y_0) = A < 0$，$d_2(x_0, y_0) = AC - B^2 > 0$，则 $P_0(x_0, y_0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大点.

(3) 若 $d_2(x_0, y_0) = AC - B^2 < 0$，则 $P_0(x_0, y_0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点.

8.10.2 条件极值

定义 8.10.10 函数 $f(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathscr{E}^n)$ 在条件 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ 下的极值称之为**条件极值**(constrained extremum)，其中

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \cdots, g_s(\boldsymbol{x})), \qquad s < n,$$

称之为**约束条件**(constrained conditions).

定理 8.10.11 设 $\boldsymbol{x}_0 = (\mathring{x}_1, \cdots, \mathring{x}_n)$，$u = f(x_1, \cdots, x_n) \subset C^1(B(\boldsymbol{x}_0))$，$g_k(\boldsymbol{x}) = g_k(x_1, \cdots, x_n) \subset C^1(B(\boldsymbol{x}_0))(k = 1, \cdots, s)$，此处 $s < n$. 若

(1) 变量 $x_1, \cdots, x_n$ 之间有约束条件

$$g_k(\boldsymbol{x}) = g_k(x_1, \cdots, x_n) = 0, \qquad k = 1, \cdots, s; \qquad (*)$$

(2) 矩阵

$$\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right)_{\substack{k=1,\cdots,s \\ i=1,\cdots,n}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_s}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_s}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

在 $\boldsymbol{x}_0 = (\mathring{x}_1, \cdots, \mathring{x}_n)$ 处的秩为 s，则 $\boldsymbol{x}_0 = (\mathring{x}_1, \cdots, \mathring{x}_n)$ 是 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$ 在条件 $(*)$ 下的极值点的必要条件为：存在常数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 使得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ 时

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{k=1}^{s}\lambda_k\dfrac{\partial g_k}{\partial x_i}=0, & i=1,\cdots,n,\\ g_k=0, & k=1,\cdots,s.\end{cases}$$

此必要条件等价于:存在 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)\in\mathscr{E}^s$ 使得$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda})$是函数

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

或

$$L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_s)=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k g_k(x_1,\cdots,x_n)$$

的平稳点(驻点).

定义 8.10.12 定理 8.10.11 中所述的求函数$f(x)$在条件 $g_k(\boldsymbol{x})=0$ $(k=1,\cdots,s,\ s<n)$下的求极值方法称为 Lagrange **乘数法**. 函数

$$L=f(x_1,\cdots,x_n)+\sum_{k=1}^{s}\lambda_k g_k(x_1,\cdots,x_n)$$

称为(Lagrange)**函数**, λ_k $(k=1,\cdots,s)$称为 **Lagrange 乘数** (Lagrange multipliers).

推论 8.10.13 设Ω有内点$P_0(x_0,y_0,z_0)\subset\Omega$, $f(x,y,z)$, $g_1(x,y,z)$, $g_2(x,y,z)\in C^1(\Omega)$,且

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,y)}\right)^2+\left(\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(y,z)}\right)^2+\left(\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(z,x)}\right)^2}\neq 0.$$

若 $P_0(x_0,y_0,z_0)$是 $u=f(x,y,z)$在曲线

$$\gamma:\ \begin{cases}g_1(x,y,z)=0,\\ g_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

上的极值点,则必存在λ,μ使得点$P_0(x_0,y_0,z_0)$是

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+\mu g_2(x,y,z)$$

的平稳点(驻点),即点 P_0 是方程组

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \mu}=0$$

的解.

9 向量函数的微分学

9.1 一元向量函数的微分学

在定义 7.4.1 中已对多元向量函数下过定义，一元向量函数是其中最简单的特殊情形，即 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m$，$t\mapsto\boldsymbol{f}(t)$，其分量形式为

$$\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),\cdots,f_m(t))=f_i(t)\boldsymbol{e}_i,\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

这类向量函数有丰富的物理背景：质点、刚体及有限多自由度系统的位形(con-figuration)，速度，加速度；几何背景则有：$\mathscr{E}^3$ 中的曲线、曲面的几何性质，$\mathscr{E}^m$ 中的曲线等.

定义 9.1.1 若极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t+h)-\boldsymbol{f}(t)}{h},\qquad h\in\Omega\backslash\{0\}$$

在 $\mathscr{E}$ 中存在，则称向量函数 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m$ 在 $t\subset\Omega$ 中**可微**(differentiable)，此极限称为 $\boldsymbol{f}$ 对 t 之**导数**(derivative)，并记作 $\boldsymbol{f}'(t)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t}$（当 t 表示时间变量时，常记作 $\dot{\boldsymbol{f}}(t)$）. 注意：$\boldsymbol{f}(t)$ 的导数仍为 $\mathscr{E}^m$ 中的向量，但为不同于 $\boldsymbol{f}(t)$ 的一个新向量.

定理 9.1.2 函数 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m$ 在 $t\subset\Omega$ 可微的充要条件是 $\boldsymbol{f}(t)$ 的每个分量函数 $f_i:\Omega\subset\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ 在 $t\subset\Omega$ 可微. 若 $\boldsymbol{f}$ 在 t 可微，其导数可表为下列各种形式：

$$\boldsymbol{f}'(t)=(f'_1(t),\cdots,f'_m(t)),$$
$$\boldsymbol{f}'(t)=f'_i(t)\boldsymbol{e}_i,\qquad i=1,2,\cdots,m,$$

$$\dot{\boldsymbol{f}}(t)=(\dot{\boldsymbol{f}}_1(t),\cdots,\dot{\boldsymbol{f}}_m(t)),\quad t\text{ 是时间},$$

$$\dot{\boldsymbol{f}}(t)=\dot{\boldsymbol{f}}_i(t)\boldsymbol{e}_i,\quad i=1,2,\cdots,m,\quad t\text{ 是时间},$$

其中 $f_i'(t)$ 或 $\dot{\boldsymbol{f}}_i(t)$ 为分量函数的导数，$\boldsymbol{e}_i$ 为 $\mathscr{E}^m$ 中的标准基向量.

定理 9.1.3 若 $\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{g}(t),\varphi(t)$ 为可微向量函数及函数，则 $\forall\, \boldsymbol{f}:\Omega\subset\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m, \boldsymbol{g}:\Omega\subset\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m, \varphi:\Omega\subset\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ 有以下求导公式：

(1) $(\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{g}(t))'=\boldsymbol{f}'(t)+\boldsymbol{g}'(t)$；

(2) $(\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t))'=\boldsymbol{f}'(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}'(t)$；

(3) 在 $\mathscr{E}^3$ 中有

$$(\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t))'=\boldsymbol{f}'(t)\times\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}'(t);$$

(4) $(\varphi(t)\boldsymbol{f}(t))'=\varphi'(t)\boldsymbol{f}(t)+\varphi(t)\boldsymbol{f}'(t)$；

(5) $(\boldsymbol{f}\circ\varphi)'(t)=\boldsymbol{f}'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

定义 9.1.4 若函数 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m$ 可微，且 $\boldsymbol{f}':\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m$ 连续，则称 $\boldsymbol{f}$ **连续可微**(continuous differentiable)，或称 $\boldsymbol{f}$ 属于 C^1 类函数，记作 $\boldsymbol{f}(\cdot)\in C^1(\Omega)$；若 $\boldsymbol{f}$ 的 k 阶导数存在且连续，则称 $\boldsymbol{f}$ **属于 C^k 类函数**，记作 $\boldsymbol{f}(\cdot)\in C^k(\Omega)$.

定义 9.1.5 **$\mathscr{E}^m$ 中的曲线** C^1 类函数 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m$ 在 $\mathscr{E}^m$ 中所形成的子集 $G=\boldsymbol{f}(\Omega)$ 称为 **$\boldsymbol{f}$ 在 $\mathscr{E}^m$ 中的曲线**. 当 $m=3$ 时，$\mathscr{E}^3$ 中的曲线又称为 $\boldsymbol{f}$ 的**向量端图**(hodograph).

定义 9.1.6 若函数 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\boldsymbol{f}\subset\mathscr{E}^m$ 属于 C^1 类(连续可微)，且对于所有的 $t\in\Omega$，$\boldsymbol{f}'(t)\neq\boldsymbol{0}$，则称**函数 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 为光滑**(smooth)的.

例如，$\boldsymbol{f}(t)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t))$ 不是光滑函数，这是因为 $t=2n\pi$(n 为任何正整数)时，$f_1'(2n\pi)=f_2'(2n\pi)=0$，因而在这些点 $\dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}f_1}$ 不存在，曲线出现了尖点，破坏了连续可微性(见图 9.1).

定义 9.1.7 若 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m$ 在 $t\in\Omega$ 内可微，则导数 $\boldsymbol{f}'(t)$ 称为曲线 $C=\boldsymbol{f}(\Omega)$ 在 t 处的**切向量**(tangent vector).

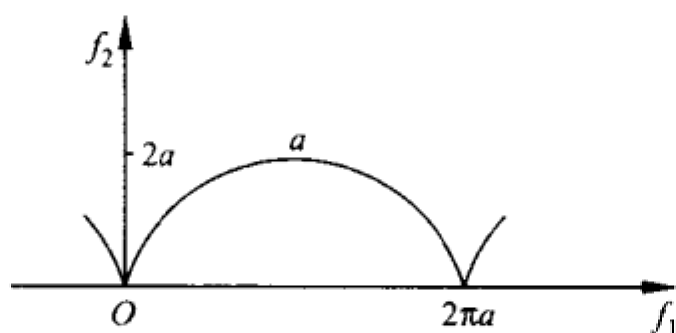


图 9.1

对于 $\mathscr{E}^3$ 中的函数 $\boldsymbol{f}(t)$，切向量 $\boldsymbol{f}'(t)$沿向量端图的切线方向，指向 t 的增加方向，如图 9.2 所示.

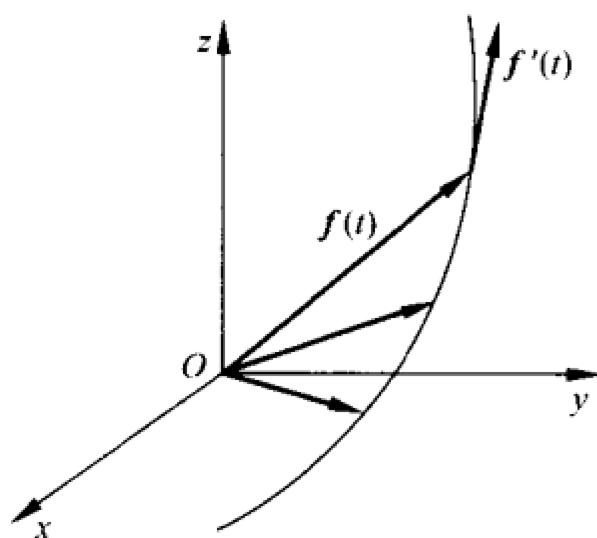


图 9.2

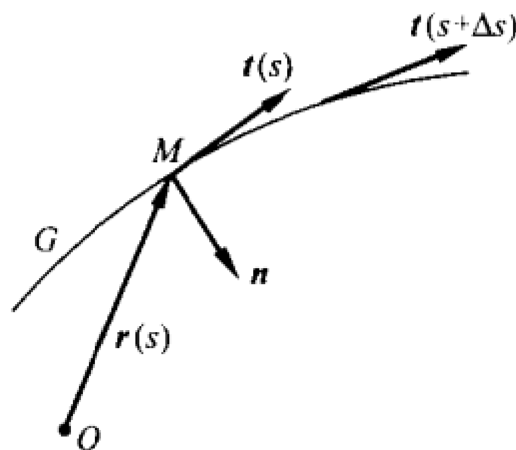


图 9.3

定理 9.1.8 当 $\boldsymbol{f}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^m$的长度或模不变时，$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{f}'$保持正交；特别是当 $\boldsymbol{f}(t)$为单位向量时（长度为 1），$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{f}'$保持正交；类似地有 $\boldsymbol{f}'$与 $\boldsymbol{f}''$正交等.

应用 9.1.9 $\mathscr{E}^3$ 中的曲线理论 设 $\mathscr{E}^3$ 中的位置向量 $\boldsymbol{r}:\Omega\subset\mathscr{E}\to\mathscr{E}^3$，$s\mapsto\boldsymbol{r}(s)$是以弧长 s 为自变量的向量函数，并设 $\boldsymbol{r}$ 在 $s\in\Omega$ 内对 s 三阶可微，则有曲线的内蕴性质（即曲线本身所固有的性质，与坐标选择无关）如下（如图 9.3）：

(1) $\boldsymbol{t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$是曲线 G 上 M 点的切向量，又因 $\left\|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right\|=1$，故 $\boldsymbol{t}$ 是曲线 G 上 M 点的**单位切向量**(unit tangent vector).

(2) 非负实数 $\kappa(s)=\left\|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right\|=\left\|\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2}\right\|$ 是曲线弯曲程度的度量，

称为曲线 G 上 M 点的**曲率**(curvature). $\rho(s)=\dfrac{1}{\kappa(s)}$称为 M 点的**曲率半径**(radius of curvature).

(3) 当 $\kappa(s)\neq 0$ 时,$\boldsymbol{n}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\Big/\left\|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\right\|=\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}=\rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}$是恒指向曲线内凹方向的单位向量,称为**单位主法向量**(principal normal vector).

(4) $\boldsymbol{t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 构成之平面称为 M 点的**密切面**(osculating plane). 定义单位向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$ 为**单位副法向量**(binormal). $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 构成曲线 G 上 M 点的**自然标架**(intrinsic frame)(如图 9.4).

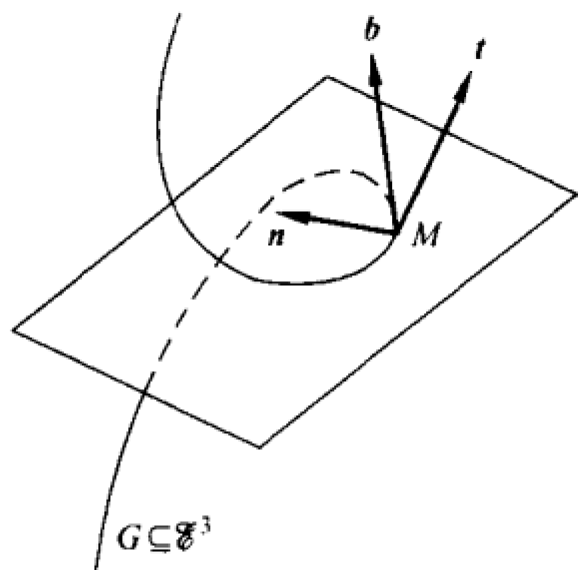


图 9.4

(5) 向量 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ 对 s 的导数公式由著名的 Seret-Frénet 定理表达:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}=\kappa\,\boldsymbol{n},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=-\kappa\,\boldsymbol{t}+\tau\,\boldsymbol{b},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}=-\tau\,\boldsymbol{n},\end{cases}$$

其中曲率 $\kappa=\dfrac{\|\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)\|}{\|\boldsymbol{r}'(s)\|^3}$;$\tau$ 称为**扭率**(torsion),$\tau=\dfrac{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)\cdot\boldsymbol{r}'''(s)}{\boldsymbol{r}'(s)\times\boldsymbol{r}''(s)}$. 曲率是曲线在密切面的弯曲度量,扭率是曲线脱离密切面的扭曲度量.

应用 9.1.10 质点运动学 设 $\mathscr{E}^3$中的位置向量 $\boldsymbol{r}:\Omega\subseteq\mathscr{E}\to\mathscr{E}^3$ 是以弧长 s 为自变量的向量函数,并设 $\boldsymbol{r}$ 在 $s\in\Omega$ 内三阶可微;此外设 $s:\sigma\subset\mathscr{E}\to\mathscr{E}$ 在 $t\in\sigma$ 内二阶可微,则有:

(1) $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s(t))$表示质点 M 沿 $\mathscr{E}^3$中的轨道 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$运动的规

律，称为**运动方程**(equation of motion).

(2) $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\dot{s}$，或 $\boldsymbol{v}=\dot{s}\boldsymbol{t}$，向量 $\boldsymbol{v}$ 称为质点的速度(velocity)，其分量 $\dot{s}$ 即速率(speed)，方向沿 $\boldsymbol{r}(s)$ 上 M 点的切线方向.

(3) 定义 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 为质点的加速度(acceleration). 加速度在自然标架上的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{s}\boldsymbol{t})=\ddot{s}\boldsymbol{t}+\dot{s}^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s}\\&=\ddot{s}\boldsymbol{t}+\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a}_t=\ddot{s}\boldsymbol{t}$ 是加速度的切线分量，称为**切线加速度**(tangential accerlation)，$\boldsymbol{a}_n=\frac{\dot{s}^2}{\rho}\boldsymbol{n}$ 是加速度的主法线分量，称为**法线加速度**(normal accerlation). 切线加速度可度量速度数值的变化率，法线加速度可度量速度方向的变化率.

9.2 多元向量函数的可微性与导数

9.2.1 基本概念

我们用列向量(column vector)表示向量函数(vector function)：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(x_1,\cdots,x_n)\\\vdots\\f_m(x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}:\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m,$$

也可写成

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\longmapsto\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})),$$

括号内 $f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})$ 表示向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的分量.

若要用行向量(row vector),则用列向量的转置(transpose)表达,例如行向量函数

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

或 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))$.

矩阵用圆括号表示,列向量即列矩阵(column matrix).

研究多元向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$ 时,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$既可按列向量函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$$

研究,也可以按行向量函数进行研究.

定义 9.2.1 以下变换 $\mathbf{L}(\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m)$为**线性变换**(linear transform)

$$\mathbf{L}:\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n, \\ \vdots \\ y_m=a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n. \end{cases}$$

其中 a_{ij} 为常数. 上式可缩写成矩阵形式

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

线性变换 $\mathbf{L}$ 与矩阵 $\mathbf{A}$ 在运算上是一一对应的,即和:$\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2\leftrightarrow\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$;乘积(复合)$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\leftrightarrow\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$;实数乘 $\alpha\mathbf{L}\leftrightarrow\alpha\boldsymbol{A}$;逆:$\mathbf{L}^{-1}\leftrightarrow\boldsymbol{A}^{-1}$,故有时称矩阵 $\mathbf{A}$ 为线性变换 $\mathbf{A}$.

定义 9.2.2 设有向量函数

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}
$$

及点 $\boldsymbol{x}_0=(\mathring{x}_1,\cdots,\mathring{x}_n)\in\Omega\subset\mathscr{E}^n$. 若存在线性变换 $\boldsymbol{A}:\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$ 使得

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),\qquad \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0,
$$

则称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ **可微**(differentiable),称 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的**导数**(derivative),记作

$$
\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}.
$$

若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在开区域 Ω 内每一点可微,则称 **$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{\Omega}$ 内可微**. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 内的导数记作

$$
\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).
$$

定理 9.2.3 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续.

定理 9.2.4 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微的充要条件是:$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的每个分量 $f_i(\boldsymbol{x})\ (i=1,\cdots,m)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,这时 $\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}\right)_{m\times n}$,即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的导数为

$$
\mathrm{D}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.
$$

于是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+o(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\ \ (\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0)$ 式成为

$$
\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}\Delta x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}\Delta x_j \end{pmatrix}+o(\rho),
$$

其中 $\Delta x_j=x_j-\mathring{x}_j$, $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+\cdots+(\Delta x_n)^2}$.

例 9.2.5 (1) $m=1$,即多元数值函数

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \cdots, x_n), \qquad f: \mathscr{E}^n \to \mathscr{E}^1,$$

$$\mathrm{D}f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right).$$

(2) $f: \mathscr{E}^3 \to \mathscr{E}^2, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - y + \mathrm{e}^z \\ xy^2 \end{pmatrix}$,

$$\mathrm{D}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(x^2-y+\mathrm{e}^z)}{\partial x} & \dfrac{\partial(x^2-y+\mathrm{e}^z)}{\partial y} & \dfrac{\partial(x^2-y+\mathrm{e}^z)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(xy^2)}{\partial x} & \dfrac{\partial(xy^2)}{\partial y} & \dfrac{\partial(xy^2)}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x & -1 & \mathrm{e}^z \\ y^2 & 2xy & 0 \end{pmatrix}.$$

推论 9.2.6 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的所有偏导数$\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\begin{pmatrix} i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n \end{pmatrix}$都在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续,则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

定理 9.2.7 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,则所有$\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\begin{pmatrix} i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n \end{pmatrix}$都存在,且

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_i} \end{bmatrix}, \qquad i=1,\cdots,n.$$

定义 9.2.8 设有可微函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}): \mathscr{E}^n \to \mathscr{E}^m$,称下式右端为 f 在 $\boldsymbol{x}$ 的 **Jacobi 矩阵**(Jacobi matrix),记作

$$J_f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

若 $m=n$，称 Jacobi 方阵的行列式为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 的 Jacobi **行列式**(Jacobi deferminant)，记作

$$\det J_f(\boldsymbol{x})=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}.$$

可见 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=D(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))=J_f(\boldsymbol{x}_0)$.

对向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x}))$，若每个 $f_i(\boldsymbol{x})\in C^p(\Omega)$ $(i=1,\cdots,m)$，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^p(\Omega,\mathscr{E}^m)$，其中 $\mathscr{E}^m$ 是说明 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的值域属于 $\mathscr{E}^m$，也简记为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^p(\Omega)$，又 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C(\Omega)$ 表示 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上连续.

定理 9.2.9 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^1(\Omega)$ 的充要条件是：矩阵函数

$$\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

在 Ω 上连续，它又等价于每一个 $\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}\in C(\Omega)$ $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$.

定理 9.2.10 设列向量函数

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ f_m(x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}$$

在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，则行向量函数 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的导数为 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)=(\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))^{\mathrm{T}}$，即

$$\mathrm{D}(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$$
$$=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

9.2.2 求导法则

命题 9.2.11 Leibniz 法则 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$, $\varphi(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}$. 皆在 $\boldsymbol{x}$ 可微,则有:

(1) $\mathrm{D}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$,

(2) $\mathrm{D}[\varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]=\mathrm{D}\varphi(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,

(3) $\mathrm{D}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$,

(4) 当 $m=3$ 时, $\mathrm{D}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\times\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$.

定理 9.2.12 链式法则 设

(1) $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m)$.

(2) $\boldsymbol{g}:\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$; $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} g_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}:S\subset\mathscr{E}^m\to\mathscr{E}^p;\quad \boldsymbol{y}\mapsto\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}),$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} f_1(y_1,\cdots,y_m) \\ \vdots \\ f_p(y_1,\cdots,y_m) \end{pmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ 可微, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$在 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\in S$ 可微.

则复合函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,且

$$\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0).$$

将 $\boldsymbol{x}_0$ 换成 $\boldsymbol{x}$,本定理又可表示为矩阵形式

$$
\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\cdot\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})
=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_p(\boldsymbol{y})}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_p(\boldsymbol{y})}{\partial y_m}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}.
$$

推论 9.2.13 若 $n=m=p$,则复合函数

$$
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}u_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ u_n(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\\ \vdots\\ f_n(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\end{pmatrix}
$$

在 $\boldsymbol{x}$ 可微,且

$$
\frac{\partial(u_1,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\cdot\frac{\partial(g_1,\cdots,g_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)},
$$

即 $\det J_f(\boldsymbol{x})=\det J_f(\boldsymbol{y})\cdot\det J_y(\boldsymbol{x})$.

推论 9.2.14 若 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\in C^p$,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\in C^p$,则

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))\in C^p.
$$

定义 9.2.15 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathscr{E}^n$,$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_l)\in\mathscr{E}^l$,向量函数 $\boldsymbol{f}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathscr{E}^m$. 若固定向量 $\boldsymbol{y}$,$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$作为 $\boldsymbol{x}$ 的函数是可微的,则称这导数为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$对向量 $\boldsymbol{x}$ 的**偏导数**(partial derivative),记作

$$
\mathrm{D}_x\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_n}\end{pmatrix}.
$$

类似地有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$对向量 $\boldsymbol{y}$ 的偏导数 $\mathrm{D}_y f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

9.2.3 方向导数

定义 9.2.16 设 $\boldsymbol{l}=\cos\theta_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\cos\theta_n\boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}):\Omega\subset\mathscr{E}^n\to\mathscr{E}^m$，其中 $\cos\theta_i(i=1,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦，若

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+t\boldsymbol{l})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{t}$$

存在，则称它为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**(directional derivative).

特殊情形：

(1) 当 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_i$，这时方向导数就是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 对 x_i 的偏导数 $\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$.

(2) 当 $m=1$，方向导数就是数量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的方向导数 $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{l}}$，$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}$即为 $f(\boldsymbol{x})$的偏导数$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}$.

定理 9.2.17 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，则对任意 $\boldsymbol{l}=(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 存在方向导数$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{l}}$，且

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{l}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\cos\theta_i\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_i}\cos\theta_i\end{pmatrix}.$$

9.2.4 Taylor 公式

定理 9.2.18 微分中值不等式 设 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$是凸开集，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{E}^m$在 Ω 可微，则对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\Omega$，必存在 $\boldsymbol{\xi}\in\Omega$ 使得

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\|\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi})\|\,\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|.$$

定理 9.2.19 Taylor 公式 设 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$是凸开集，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in$

$C^k(\Omega,\mathscr{E}^m)$，则对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\in\Omega$，必存在 $\tau_i\in[0,1]$ $(i=1,\cdots,m)$，使得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^j f_1(\boldsymbol{a})}{j!}+\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k}{k!}f_1(\boldsymbol{a}+\tau_1\boldsymbol{h})\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^j f_m(\boldsymbol{a})}{j!}+\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k}{k!}f_m(\boldsymbol{a}+\tau_m\boldsymbol{h})\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{h}=(h_1,\cdots,h_n)$，$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$，此公式又称 Taylor 公式.

推论 9.2.20 设 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$ 是凸开集，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^\infty(\Omega,\mathscr{E}^m)$，则对任意 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}\in\Omega$，有 Taylor 级数展开式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})+\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{2!}+\cdots+\frac{(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\nabla})^k\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})}{k!}+\cdots.$$

9.3 向量函数的反函数

定义 9.3.1 设向量函数

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}f_1(x_1,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ f_n(x_1,\cdots,x_n)\end{pmatrix}$$

定义在 Ω 上. 若对任意 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(\Omega)$ 都有一确定的 $\boldsymbol{x}\in\Omega$ 与之对应，使它满足

$$\begin{cases}f_1(x_1,\cdots,x_n)=y_1,\\ \qquad\vdots\\ f_n(x_1,\cdots,x_n)=y_n,\end{cases}\quad 或\quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y},$$

则由此确定的 $\boldsymbol{y}$ 为自变量的函数 $\boldsymbol{x}$，称为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的**反函数**(inverse function)，记作 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$. 此反函数的定义域是 $\boldsymbol{f}(\Omega)$，值域是 Ω. $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的反函数常记作 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x})$.

定义 9.3.2 若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\Omega$，当 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$ 时，必有 $f(\boldsymbol{x}_1)\neq f(\boldsymbol{x}_2)$，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是**一一对应的**(one-to-one functions)，记成 1 - 1.

注 (1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上存在反函数的充要条件是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是 1 - 1 的.

(2) 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 Ω 上是 1 - 1 的，则

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega,$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y},\qquad \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{f}(\Omega).$$

定理 9.3.3 反函数的存在性与可微性(inverse function theorem) 设：(1) $\Omega\subset\mathscr{E}^n$ 是开集，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^1(\Omega,\mathscr{E}^n)$；(2) $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$，$\det \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0$，则存在一开球 $B=B(\boldsymbol{x}_0,\delta)\subset\Omega$，使得：

(1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 B 上是 1 - 1 的，因而存在反函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$，$\boldsymbol{y}\in V$.

(2) $V=\boldsymbol{f}(B)\subset\mathscr{E}^n$ 是开集.

(3) $\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})\in C^1(V)$，且 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})=\dfrac{1}{[\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})}}$.

推论 9.3.4 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(\boldsymbol{x}))\subset\mathscr{E}^n$，则在定理 9.3.3 的条件下，有

$$\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}=\frac{1}{\left.\dfrac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}},$$

其中 $\boldsymbol{x}\in B$，$\boldsymbol{y}\in V$.

推论 9.3.5 在定理 9.3.3 的条件下，若又设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^k(\Omega,\mathscr{E}^n)$ $(k>1)$，则

$$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})\in C^k(V).$$

例 9.3.6 直角坐标 (x,y,z) 与球坐标 (ρ,φ,θ) 间的变换公式

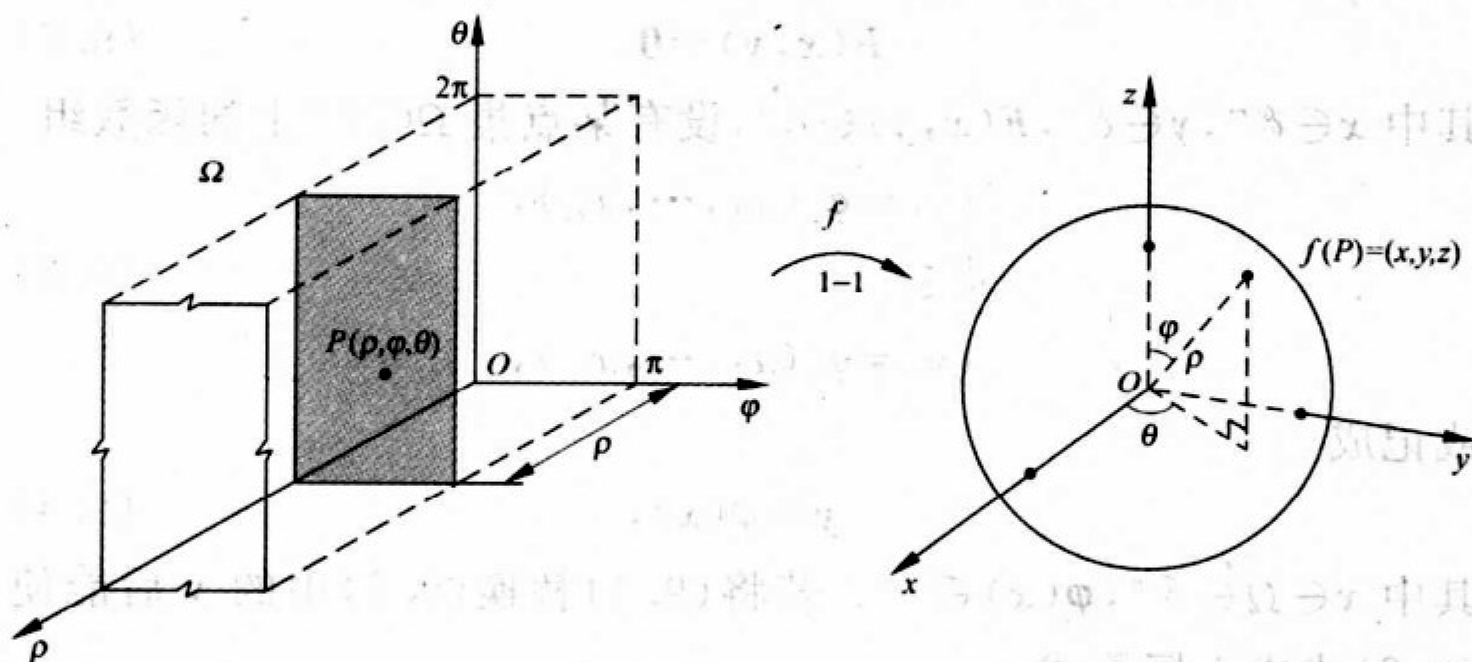
是方程组

$$
\begin{cases}
x=\rho\sin\varphi\cos\theta,\\
y=\rho\sin\varphi\sin\theta,\\
z=\rho\cos\varphi,
\end{cases}
$$

$$
\Omega:\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3 \mid \rho>0,0<\varphi<\pi,0<\theta<2\pi\}.
$$

由于

$$
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=\rho^2\sin\varphi,
$$



$\Omega:\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathbb{R}^3 \mid \rho>0,0<\varphi<\pi,$ $0<\theta<2\pi\}$

V 含一切点 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ 且半平面 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geqslant 0,y=0\}$ 除外

图 9.5

所以在 Ω 上 $\rho^2\sin\varphi\neq 0$，又方程组在 Ω 上是 1-1 的(见图 9.5)，故方程组在 $\mathbb{R}^3$ 中除去半平面 $x\geqslant 0,y=0$ 可惟一确定出 ρ,φ,θ 为 $x,y,z(x>0)$ 的函数如下：

$$
\begin{cases}
\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
\varphi=\arccos\dfrac{z}{\rho},\\
\theta=\arctan\dfrac{y}{x},
\end{cases}
\qquad V:\{\mathscr{E}^3\setminus(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geqslant 0,y=0\}.
$$

9.4 由方程组确定的隐函数组

定义 9.4.1 设有方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)=0, \\ \quad\quad\vdots \\ F_n(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)=0, \end{cases} \tag{9.1}$$

在其中取定 $x_1,\cdots,x_m$，则(9.1)成为含有 n 个未知数 y_i 与 n 个方程式的方程组，可记作向量函数如下：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}, \tag{9.2}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^m,\boldsymbol{y}\in\mathscr{E}^n,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathscr{E}^n$，设有某点集 $\Omega\subset\mathscr{E}^m$ 上的函数组

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x_1,\cdots,x_m), \\ \vdots \\ y_n=\varphi_n(x_1,\cdots,x_m), \end{cases} \tag{9.3}$$

或记成

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}), \tag{9.4}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\Omega\in\mathscr{E}^m,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{E}^n$. 若将(9.4)替换(9.2)中的 $\boldsymbol{y}$ 后能使(9.2)式成为恒等式：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))\equiv\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{x}\in\Omega\subset\mathscr{E}^m,$$

则称函数组(9.3)或(9.4)为方程组(9.1)或(9.2)在 Ω 上的解，也称(9.3)或(9.4)是由方程组(9.1)或(9.2)确定的隐函数组.

定理 9.4.2 隐函数存在与惟一性 设 $\lambda\subset\mathscr{E}^m\times\mathscr{E}^n$ 是一开集，$\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^m,\boldsymbol{y}\in\mathscr{E}^n$，若 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足：

(1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in C(\lambda,\mathscr{E}^n),\mathrm{D}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in C(\lambda)$；

(2) $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in\lambda,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{0}$；

(3) $\det\mathrm{D}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\left.\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\right|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)}\neq0.$

则存在 $B(\boldsymbol{x}_0)$ 及惟一函数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 使得：

(1) $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \in C(B(\boldsymbol{x}_0))$;

(2) $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0)$时,$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \in \lambda$ 且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \equiv \boldsymbol{0}$;

(3) $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$.

定理 9.4.3　隐函数存在、惟一及可微　在定理(9.4.2)中,将条件(1)改为:$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in C^1(\lambda, \mathscr{E}^n)$,其余条件不变,则存在$B(\boldsymbol{x}_0)$及惟一函数 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$使得:

(1) $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \in C^1(B(\boldsymbol{x}_0), \mathscr{E}^n)$.

(2) $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0)$时,$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \in \lambda$,且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})) \equiv \boldsymbol{0}$.

(3) $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$.

推论 9.4.4　在定理(9.4.3)的条件下,又设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in C^k(\lambda, \mathscr{E}^n)$,则 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \in C^k(B(\boldsymbol{x}_0))$,其中 $k \geqslant 1$.

10 含参量积分

10.1 含参量积分

定义 10.1.1 设:(1) $f(x,y)$ 定义在矩形闭域 $D:\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y\leqslant\beta\}$ 上.(2)对任意的 $x\in[a,b]$,$f(x,y)$ 在$[\alpha,\beta]$上对 y 可积,则称积分 $\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y$ 为**含参量积分**(integral with parameters),它确定了一个 x 的函数,记作

$$I(x)=\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y,\qquad x\in[a,b].$$

称 x 为参变量.类似地,可定义含参量积分

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x,\qquad y\in[\alpha,\beta].$$

定义 10.1.2 设条件(1)、(2) 同定义 10.1.1,再设(3) $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 定义在$[a,b]$ 上,且满足 $\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta$, $\alpha\leqslant\psi(x)\leqslant\beta$,则也称积分$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 为**含参量积分**,它也确定了一个 x 的函数,记作

$$J(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y,\qquad x\in[a,b].$$

此处积分限含有参变量 x.

定理 10.1.3 设 $f(x,y)\in C(D)$,则 $I(x)\in C[a,b]$,即被积函数若连续,则含参量积分 $I(x)$ 也连续,故结论为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y&=\int_\alpha^\beta f(x_0,y)\mathrm{d}y\\&=\int_\alpha^\beta\lim_{x\to x_0}f(x,y)\mathrm{d}y,\qquad x_0\in[a,b]\end{aligned}$$

(即取极限与积分的顺序可交换).

定理 10.1.4 设 $f(x,y)\in C(D)$,则

$$\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

定理 10.1.5 设 $f(x,y),\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\in C(D)$,则 $I(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,且有

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y$$

(即求导与积分的运算顺序可交换).

定理 10.1.6 设:(1) $f(x,y)\in C(D)$;(2) $\varphi(x),\psi(x)\in C[a,b]$,并满足

$$\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta,\quad \alpha\leqslant\psi(x)\leqslant\beta,\qquad x\in[a,b].$$

则 $J(x)\in C[a,b]$.

定理 10.1.7 设:(1) $f(x,y),\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\in C(D)$;(2) $\alpha\leqslant\varphi(x)\leqslant\beta,\alpha\leqslant\psi(x)\leqslant\beta,\ x\in[a,b]$,且 $\varphi(x),\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 可微,则 $J(x)$ 在 $[a,b]$ 可微,且

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y+f(x,\psi(x))\psi'(x)-f(x,\varphi(x))\varphi'(x).$$

本定理的几种特殊情形:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\alpha^{\psi(t)}f(y)\mathrm{d}y=f(\psi(t))\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}$,

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\mathrm{d}y$,

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_\alpha^{\beta(t)}f(t,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^{\beta(t)}\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}\mathrm{d}y+f(t,\beta(t))\beta'(t)$.

10.2 含参量广义积分

定义 10.2.1 设:(1) 函数 $f(x,y)$ 定义在 $G=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y<\infty\}$ 上;(2) 对任意固定的 $x\in[a,b]$, $\int_{\alpha}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 均收敛. 则称由此广义积分所确定的函数

$$K(x)=\int_{\alpha}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b]$$

为在 $[a,b]$ 上的**含参量 x 的无穷限广义积分.**

定义 10.2.2 若:(1) 函数 $f(x,y)$ 定义在 $Q=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha\leqslant y<\beta\}$ 上;(2) 对某些 x 值, $y=\beta$ 是 $f(x,y)$ 的瑕点, 若对一切 $x\in[a,b]$, 积分 $\int_{\alpha}^{\beta}f(x,y)\mathrm{d}y$ 均收敛. 则称 $\lambda(x)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x,y)\mathrm{d}y$ 为**含参量 x 的无界函数的广义积分**,简称含参量广义积分. 含参量无穷限广义积分与含参量无界函数广义积分之间可互相转化.

10.2.1 一致收敛性

定义 10.2.3 设 $f(x,y)\in C(G)$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)>\alpha$, 当 $B>N(\varepsilon)$ 时, 对一切 $x\in[a,b]$ 均有 $\left|\int_{\alpha}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\alpha}^{B}f(x,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\int_{B}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$, 则称含参量广义积分 $K(x)=\int_{\alpha}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上**一致收敛**(uniform convergent).

此定义表明: 当 $B\to+\infty$ 时, 对 $[a,b]$ 上的一切 x 值, 积分 $F(x,B)=\int_{\alpha}^{B}f(x,y)\mathrm{d}y$ 一致地趋向于 $I(x)=\int_{\alpha}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$.

定理 10.2.4 含参量无穷限广义积分一致收敛的 Cauchy 准

则　设 $f(x,y)\in C(G)$，积分 $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，当 $B_2>B_1>N(\varepsilon)$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 有

$$\left|\int_{B_1}^{B_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

定理 10.2.5　Weierstrass M 检验法（Weierstrass M test）　设 $f(x,y)\in C(G)$，若有 $g(y)$ 使得

$$|f(x,y)|\leqslant g(y),\qquad a\leqslant x\leqslant b,\quad \alpha\leqslant y,$$

且 $\int_{\alpha}^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ 收敛，则 $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

定理 10.2.6　Dirichlet 检验法（Dirichlet test）　设 $f(x,y)\in C(G)$，若：(1) 对一切 $B>\alpha$，含参量积分 $\int_{\alpha}^{B} f(x,y)\mathrm{d}y$ 对参量 x 在 $[a,b]$ 上一致有界（即 $\exists M>0$，$\forall B>\alpha$ 及 $\forall x\in[a,b]$，有 $\left|\int_{\alpha}^{B} f(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant M$）；(2) 有 $g(x,y)$ 满足：① $\forall x\in[a,b]$，$g(x,y)$ 是 y 的单调下降函数；② 当 $y\to\infty$，对参量 $x\in[a,b]$，$g(x,y)$ 一致地趋于零（即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 与 x 无关，当 $y>N$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 有 $|g(x,y)|<\varepsilon$）. 则含参量广义积分 $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛.

定理 10.2.7　Abel 检验法（Abel test）　设 $f(x,y)\in C(G)$，若：(1) $\int_{\alpha}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；(2) $\forall x\in[a,b]$，$g(x,y)$ 是 y 的单调函数，且 $\forall y\geqslant\alpha$，$\forall x\in[a,b]$，$g(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界. 则含参量广义积分 $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛.

定义 10.2.8　设对某些 x 值，$y=\beta$ 是瑕点，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta<\beta-\alpha$，当 $0<\eta<\delta$ 时，对一切 $x\in[a,b]$ 均有

$$\left|\int_{\beta-\eta}^{\beta} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon,$$

则称含参量广义积分 $\lambda(x)=\int_{a}^{\beta} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛.

10.2.2 含参量广义积分的性质

定理 10.2.9 设 $f(x,y)\in C(G)$,若 $K(x)=\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则 $K(x)\in C[a,b]$,即取极限与积分运算的顺序可以交换,设 $x_0\in[a,b]$,则

$$\lim_{x\to x_0}\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{a}^{+\infty} f(x_0,y)\mathrm{d}y=\int_{a}^{+\infty}\lim_{x\to x_0} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理 10.2.10 积分顺序的交换性 假设条件同定理 10.2.9,则 $K(x)=\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\int_{a}^{b}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\left[\int_{a}^{b} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y(=\text{有限数}).$$

定理 10.2.11 积分顺序的交换性 若 $f(x,y)$ 在 $x\geqslant a$, $y\geqslant\alpha$ 连续,且:(1) $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在任何区间 $\alpha\leqslant y\leqslant B$ 上一致收敛;(2) $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在任何区间 $a\leqslant x\leqslant A$ 上一致收敛;(3) 积分 $\int_{a}^{+\infty}\left[\int_{a}^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ 与 $\int_{a}^{+\infty}\left[\int_{a}^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ 中至少有一个收敛.则

$$\int_{a}^{+\infty}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\left[\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y(=\text{有限数}).$$

推论 10.2.12 积分顺序的可交换性 若非负函数 $f(x,y)$ 在 $x\geqslant a$, $y\geqslant\alpha$ 连续,且:(1) $\int_{a}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\geqslant\alpha$ 连续;

(2)$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x \geqslant a$ 连续；(3) 积分 $\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ 中至少有一个收敛．则

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

定理 10.2.13　含参量积分的求导　若：(1)$f(x,y)$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 在 $x \in [a,b]$，$y \geqslant \alpha$ 连续；(2)$\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 收敛；(3)$\int_\alpha^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上一致收敛．则 $K(x) = \int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上有连续的导数，且

$$K'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

(即在此定理条件下，求导与积分运算的顺序可以交换.)

11 重积分

11.1 $\mathscr{E}^n$中的 Jordan 可测集

定义 11.1.1 $\mathscr{E}^n$中的点集 $R=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,\cdots,n\}=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 称为一个 **n 维闭矩形**(*n*-dimensional closed rectangle),其容积定义为 $v(R)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$.

记有限个 n 维闭矩形的并集为 Q. 组成 Q 的有限个 n 维闭矩形两两无公共内点(或说两两没有重叠的部分),称这些闭矩形的容积之和为 Q 的**容积**(content),记作 $V(Q)$. 约定空集的容积为零.

定义 11.1.2 设有有界集合 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$,令

$$V^-(\Omega)=\sup\{V(Q)\mid Q\subset\Omega^0\},$$
$$V^+(\Omega)=\inf\{V(Q)\mid\bar{\Omega}\subset Q^0\},$$

其中 Ω^0 为 Ω 的内部,Q^0 为 Q 之内部(见定义 7.1.11),$\bar{\Omega}$ 为 Ω 之闭包(见定义 7.1.20),称 $V^-(\Omega)$ 及 $V^+(\Omega)$ 为 Ω 的**内容积**(inner content)及**外容积**(outer content). 当 $V^-(\Omega)=V^+(\Omega)$时,称此公共值

$$V(\Omega)=V^-(\Omega)=V^+(\Omega)$$

为 Ω 的 **Jordan 测度**(Jordan measure),并称 Ω 为 Jordan **可测集**(Jordan measurable set).

例如,任何由有限个点构成的集合的 Jordan 测度为零.

定理 11.1.3 若 $\Omega_1,\cdots,\Omega_k$ 为可测集,且两两无公共内点,

则有

$$V\left(\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i\right) = \sum_{i=1}^{k} V(\Omega_i).$$

定理 11.1.4 有界集合 $\Omega \subset \mathscr{E}^n$ 为 Jordan 可测的充要条件是边界 $\partial\Omega$ 的测度为零，即 $\forall \varepsilon > 0$，存在有限个 n 维闭矩形的并集 Q，使得 $\partial\Omega \subset Q^0$，$V(Q) < \varepsilon$.

例如，平面上的点集 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x, y < 1,\ x, y$ 为有理数$\}$，由于 Ω 的边界 $\partial\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 它的容积为 1，故集合 Ω 是不可测的.

定理 11.1.5 设有限个集合 $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$ 是可测的，则：

(1) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \Omega_i$ 是可测的；

(2) $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \Omega_i$ 是可测的；

(3) $\Omega_1 \backslash \Omega_2$ 是可测的，特别地，$\Omega_1^0 = \Omega_1 \backslash \partial\Omega_1$ 是可测的.

定理 11.1.6 设有一可求长曲线 $\Gamma \in \mathscr{E}^2$（见定义 12.1.4），则 Γ 的测度为零．特别地，可求长曲线所围区域 D 为一平面可测集.

定理 11.1.7 设 S 是由显式 $x_i = f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ 所表示的曲面，其中 f 在有界闭集 $D \subset \mathscr{E}^{n-1}$ 上连续，则 S 的测度为零．特别地，由有限个连续显函数表示的曲面所围的区域是 $\mathscr{E}^n$ 中的可测集.

11.2 $\mathscr{E}^n$ 上的 Riemann 积分

定义 11.2.1 设可测集 $\Omega \subset \mathscr{E}^n$，若将 Ω 划分为有限个可测集 $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$ 之和，它具有下列性质：

(1) $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{m} \Omega_i$；

(2) 当 $i \neq j$ 时，Ω_i 与 Ω_j 无公共内点，即 $\Omega_i^0 \cap \Omega_j^0 = \varnothing$ $(i \neq j,$

$i,j=1,\cdots,m$)，则称这种划分为 Ω 的一种**划分**(partition)，记作 Δ，即

$$\Delta=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_m\}.$$

记 $\Omega_1,\cdots,\Omega_m$ 的最大直径为 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{d(\Omega_i)\}$，$\|\Delta\|$ 的大小刻画了此分法的精细程度.

记 Ω 的测度为 V，$\Omega_1,\cdots,\Omega_m$ 的测度分别为 $\Delta V_1,\cdots,\Delta V_m$，或 $V(\Omega_1),\cdots,V(\Omega_m)$，则由定理 11.1.3 得：$V=\sum\limits_{i=1}^{m}\Delta V_i$.

定义 11.2.2 设有可测集 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$ 及数值函数 $f:\Omega\to\mathscr{E}^1$，若存在一实数 I，具有下列性质：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 Ω 的任一分法 $\Delta=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_m\}$，只要 $\|\Delta\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i)\Delta V_i-I\right|<\varepsilon,$$

其中 ξ_i 是 $\Omega_i(i=1,\cdots,m)$ 的任一点，则称 f 在 Ω 上 **Riemann 可积**，称 I 是 f 在 Ω 上的**重积分**(multiple integral)，记作

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}V=\int_\Omega f\mathrm{d}V=I=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i)\Delta V_i.$$

和式 $\sum\limits_{i=1}^{m}f(\xi_i)\Delta V_i$ 称为**积分和**或 **Riemann 和**.

当 $n=2$，记二重积分

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i,\eta_i)\Delta V_i,$$

其中 (ξ_i,η_i) 为 $\Omega_i\subset\mathscr{E}^2(i=1,\cdots,m)$ 中的任一点.

当 $n=3$，记三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i,$$

其中 (ξ_i,η_i,ζ_i) 为 $\Omega_i\subset\mathscr{E}^3(i=1,\cdots,m)$ 的任一点.

定理 11.2.3 设有可测闭区域 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$，且函数 $f:\Omega\to\mathscr{E}^1$ 在 Ω

上可积，则 f 在 Ω 上有界.

定义 11.2.4 设有可测集 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$，且函数 $f:\Omega\to\mathscr{E}^1$ 有界. 设有 Ω 的一划分 $\Delta=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_m\}$，记 $M_i=\sup\limits_{x\in\Omega_i}\{f(x)\}$，$m_i=\inf\limits_{x\in\Omega_i}\{f(x)\}$，则称

$$S^+(f,\Delta)=\sum_{i=1}^m M_iV(\Omega_i),\qquad S_-(f,\Delta)=\sum_{i=1}^m m_iV(\Omega_i),$$

分别为 f 关于划分 Δ 的**大和**(upper sum)及**小和**(lower sum).

定理 11.2.5 设有可测集 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$，且函数 $f:\Omega\to\mathscr{E}^1$ 有界，则对任一划分 $\Delta=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_m\}$ 有

$$\sup_{\substack{\xi_i\in\Omega_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\sum_{i=1}^m f(\xi_i)V(\Omega_i)=S^+(f,\Delta),$$

$$\inf_{\substack{\xi_i\in\Omega_i\\1\leqslant i\leqslant m}}\sum_{i=1}^m f(\xi_i)V(\Omega_i)=S_-(f,\Delta).$$

定义 11.2.6 称集合 $\{S^+(f,\Delta)\}$ 的下确界为 f 在 Ω 的**上积分**(upper integral)，记作

$$\overline{\int}_\Omega f(x)\mathrm{d}V=\inf_{\{\Delta\}}\{S^+(f,\Delta)\}.$$

称集合 $\{S^-(f,\Delta)\}$ 的上确界为 f 在 Ω 的**下积分**(lower integral)，记作 $\underline{\int}_\Omega f\mathrm{d}V=\sup\limits_{\{\Delta\}}\{S_-(f,\Delta)\}$.

定理 11.2.7 Darboux 定理 设有可测集 Ω，且函数 $f:\Omega\to\mathscr{E}^1$ 有界，则

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}S^+(f,\Delta)=\overline{\int}_\Omega f\mathrm{d}V,\qquad \lim_{\|\Delta\|\to 0}S_-(f,\Delta)=\underline{\int}_\Omega f\mathrm{d}V.$$

Darboux 定理说明上(下)积分不仅是大(小)和的下(上)确界，也是当划分满足 $\|\Delta\|\to 0$ 时大(小)和的极限.

定理 11.2.8 设 $\Omega\subset\mathscr{E}^n$ 是可测集，$f:\Omega\to\mathscr{E}^1$ 有界，则 f 在 Ω 上 Riemann 可积的充要条件为下列任一等价条件：

(1) $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}[S^+(f,\Delta)-S_-(f,\Delta)]=\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{m}\omega_i V(\Omega_i)=0$;

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists\Omega$的一个划分，使得$S^+(f,\Delta)-S_-(f,\Delta)<\varepsilon$；

(3) $\overline{\int_\Omega} f\mathrm{d}V=\underline{\int_\Omega} f\mathrm{d}V$.

其中$\omega_i=M_i-m_i$称为f在Ω_i上的振幅(amplitude). 显然，若在可测集$\Omega\subset\mathscr{E}^n$上$f$可积，则$\overline{\int_\Omega} f\mathrm{d}V=\underline{\int_\Omega} f\mathrm{d}V=\int_\Omega f\mathrm{d}V$.

定理 11.2.9 设有闭可测集$\Omega\subset\mathscr{E}^n$，$f$在$\Omega$上连续，则$f$在$\Omega$上可积. 特别地，若$f$在闭区域$D\subset\mathscr{E}^2$上连续，此处$D$是由可求长曲线所围，则$f$在$D$上的二重积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$存在. 又若$f$在闭区域$\Omega\subset\mathscr{E}^3$上连续，此处$\Omega$是由有限个连续显函数表示的曲面所围，则$f$在$\Omega$上的三重积分$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$存在.

定理 11.2.10 设有闭可测集$\Omega\subset\mathscr{E}^n$，$G\subset\Omega$，且$G$的测度$V(G)$为零，$f$在$\Omega$上有界且在$\Omega\backslash G$上连续，则$f$在$\Omega$上可积.

定理 11.2.11 设可测集$\Omega\subset\mathscr{E}^n$，$f,g$在$\Omega$上可积，则有下列性质：

(1) $f+g$在Ω上可积，且

$$\int_\Omega(f+g)\mathrm{d}V=\int_\Omega f\mathrm{d}V+\int_\Omega g\mathrm{d}V.$$

(2) kf在Ω上可积(k为常数)，且

$$\int_\Omega kf\mathrm{d}V=k\int_\Omega f\mathrm{d}V.$$

(3) 若在Ω上$f\leqslant g$，则

$$\int_\Omega f\mathrm{d}V\leqslant\int_\Omega g\mathrm{d}V.$$

(4) $|f|$在Ω上可积，且

$$\left|\int_\Omega f\mathrm{d}V\right|\leqslant\int_\Omega|f|\mathrm{d}V.$$

(5) $f\cdot g$ 在 Ω 上可积.

(6) 若存在常数 $\alpha>0$,使得 $|g(x)|\geqslant\alpha(x\in\Omega)$,则 f/g 在 Ω 上可积.

(7) 若 Ω 是闭可测区域,f 在 Ω 上连续,则存在 $\xi\in\Omega$,使

$$\int_\Omega f\mathrm{d}V=f(\xi)V(\Omega).$$

(8) 设 $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathscr{E}^n$ 为可测集,$\Omega_1^0\cap\Omega_2^0=\varnothing$,设 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$,则 f 在 Ω 上可积的充要条件是 f 在 Ω_1 及 Ω_2 上可积,且

$$\int_\Omega f\mathrm{d}V=\int_{\Omega_1}f\mathrm{d}V+\int_{\Omega_2}f\mathrm{d}V.$$

推论 11.2.12 设 f 在可测集 Ω 上有界且可积,$G\subset\Omega$ 且 $V(G)=0$,若在 G 上改变 f 的值,但保持它的有界性,记改变后的函数为 g,则 $\int_\Omega g\mathrm{d}V=\int_\Omega f\mathrm{d}V$.

推论 11.2.13 设 f 在闭可测集 Ω 上可积,作 Ω 的一类特殊划分 $\Delta=\{\Omega_1,\cdots,\Omega_m;\Omega_{m+1},\cdots,\Omega_{m+p}\}$,其中闭区域 $\Omega_1,\cdots,\Omega_m$ 在 Δ 中,且含于 Ω^0,$\Omega_{m+1},\cdots,\Omega_{m+p}$ 是含有 $\partial\Omega$ 的点的集合,则

$$\int_\Omega f\mathrm{d}V=\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^m\int_{\Omega_i}f\mathrm{d}V,$$

即 f 在 Ω 上的积分可看成是含于 Ω 内部的小区域上的积分和的极限.

11.3 重积分的计算

设 R_1,R_2 分别为 m 维及 l 维闭矩形:

$$R_1=\{\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,\cdots,m\},$$
$$R_2=\{\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_l)\mid c_i\leqslant y_i\leqslant d_i,\ i=1,\cdots,l\}.$$

则

$$R_1\times R_2=[a_1,b_1]\cdots[a_m,b_m][c_1,d_1]\cdots[c_l,d_l]$$

为 $m+l$ 维闭矩形.

定理 11.3.1 设 $f(x,y)$ 在 $R_1\times R_2$ 上可积,积分记作 $\int_{R_1\times R_2} f(x,y)\mathrm{d}V^{(m+l)}$;固定 $y\in R_2$,若函数 $f(x,y)$ 在 R_1 上可积,积分记作 $\int_{R_1} f(x,y)\mathrm{d}V^{(m)}$,则后者作为 y 的函数在 R_2 上可积,且

$$\int_{R_2}\left[\int_{R_1} f(x,y)\mathrm{d}V^{(m)}\right]\mathrm{d}V^{(l)} = \int_{R_1\times R_2} f(x,y)\mathrm{d}V^{(m+l)}.$$

定理 11.3.2 设:

(1) $\mathscr{E}^2$ 中闭区域 D 可表示为

$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}\subset\mathscr{E}^2$,

其中 φ_1,φ_2 是$[a,b]$上的连续函数,显然 D 是可测的.

(2) $f(x,y)$在 D 上可积.

(3) 对任一 $x\in[a,b]$,$f(x,y)$在区间$[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$上对 y 可积.

则二重积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

特别地,若 $f(x,y)$在 D 上连续,(2)及(3)就保证满足,上面的公式必成立.

定理 11.3.3 设:

(1) $\mathscr{E}^2$中闭区域可表示为

$D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,\ \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}\subset\mathscr{E}^2$,

其中 ψ_1,ψ_2 是$[c,d]$上的连续函数,显然 D 是可测的.

(2) $f(x,y)$在 D 上可积.

(3) 对任一 $y\in[c,d]$,$f(x,y)$在区间$[\psi_1(y),\psi_2(y)]$上对 x 可积.

则二重积分等于

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

特别地，若 $f(x,y)$ 在 D 上连续，(2)及(3)就保证满足，上面的公式必成立.

定理 11.3.4 设:

(1) $\mathscr{E}^3$ 中闭区域可表为

$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,\ \varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y)\}\subset\mathscr{E}^3$，
其中 $D\subset\mathscr{E}^2$ 是可测的，$\varphi_1(x,y)$，$\varphi_2(x,y)$ 在 D 上连续，

(2) $f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积.

(3) 对任一 $(x,y)\in D$，$f(x,y,z)$ 作为 z 的函数 $[\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)]$ 上可积.

则三重积分

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

特别地，若 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，(2)及(3)就保证满足，上面的公式必成立.

注 n 重积分常记作

$$\int_\Omega f\mathrm{d}V^{(n)}=\overbrace{\int_\Omega\cdots\int}^{n个}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

例 11.3.5 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 n 维闭矩形 $\Omega=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 上连续，则 n 重积分

$$\int_\Omega f\mathrm{d}V^{(n)}=\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

例 11.3.6 ***n* 维球**(*n*-dimensional sphere)**体积** 点集 $B_n(R)=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n,|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\leqslant R\}$ 表示中心在原点，半径为 R 的 n 维球体. 试证其体积为 $V(B_n(R))=\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}R^n$.

证明 先证 $V(B_n(R))$ 与其半径 R 的 n 次方成正比，即 $V(B_n(R))=a_nR^n$，其中 a_n 为比例常数. 为此，用数学归纳法论

证：当 $n=1, B_1(R)=\{x \mid x\in \mathscr{E}^1, |x|\leqslant R\}=-R\leqslant x\leqslant R$，其容积为 $V(B_1(R))=2R$.

设 $n=k-1$ 时，$V(B_{k-1}(R))=a_{k-1}R^{k-1}$，今欲证此式当 $n=k$ 亦成立，由 $V(B_k(R))=\int_{B_k(R)} 1\mathrm{d}V^{(k)}$ 且对任一 $x_k\in[-R,R]$，k 维球被超平面 $x_k=c$ 截出的图形是半径为 $\lambda=(R^2-x_k^2)^{\frac{1}{2}}$ 的 $k-1$ 维球，其体积为 $V(B_{k-1}(\lambda))=a_{k-1}\lambda^{k-1}=a_{k-1}(R^2-x_k^2)^{\frac{k-1}{2}}$，于是有

$$
\begin{aligned}
V(B_k(R)) &= \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x_k \overbrace{\int_{B_{k-1}(\lambda)}\cdots\int}^{k-1} 1\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{k-1} \\
&= \int_{-R}^{R} a_{k-1}(R^2-x_k^2)^{\frac{k-1}{2}}\mathrm{d}x_k \\
&= 2a_{k-1}\int_0^R (R^2-x_k^2)^{\frac{k-1}{2}}\mathrm{d}x_k,
\end{aligned}
$$

取变换 $x_k=R\sin\theta$，则

$$
V(B_k(R)) = 2a_{k-1}R^k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k\theta\mathrm{d}\theta = a_kR^k.
$$

于是按数学归纳法，第一部分得证. 其次是求 a_k. 由于 $a_k = 2a_{k-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k\theta\mathrm{d}\theta$，但

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}, \qquad k>-1 \text{（见(3.4 节式(172))）}.
$$

故有

$$
V(B_n(R)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},
$$

或

$$
V(B_n(R))=\frac{R^{2m}\pi^m}{m!}, \qquad n=2m, n \text{ 为偶数},
$$

$$V(B_n(R))=\frac{2R^{2m+1}(2\pi)^m}{(2m+1)!!},\qquad n=2m+1, n \text{ 为奇数}.$$

特别地，$V(B_2(R))=\pi R^2$，$V(B_3(R))=\frac{4}{3}\pi R^3$.

11.4 重积分的变量代换

11.4.1 正则变换

定义 11.4.1 设有开集 $G\subset\mathscr{E}^n$ 及变换 $\mathbf{T}:G\to\mathscr{E}^n$，$(u_1,\cdots,u_n)\mapsto \boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，即 $\boldsymbol{x}=\mathbf{T}(\boldsymbol{u})$：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(u_1,\cdots,u_n)\\x_2(u_1,\cdots,u_n)\\\vdots\\x_n(u_1,\cdots,u_n)\end{pmatrix}.$$

若变换 $\mathbf{T}$ 满足：

(1) $\mathbf{T}\in C^1(G)$，即 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在 G 上有连续一阶偏导数.

(2) $\mathbf{T}$ 在 G 上是一一变换.

(3) 对任一 $\boldsymbol{u}\in G$，Jacobi 行列式 $\det D\mathbf{T}(\boldsymbol{u})\neq 0$.

则称 $\mathbf{T}$ 是 G 内的一个**正则变换**(regular transformation).

例 11.4.2 变换(如图 11.1)$\mathbf{T}$：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix},\qquad G=\left\{(r,\varphi)\,|\,1<r<2,\quad 0<\varphi<\frac{\pi}{3}\right\}.$$

显然变换 $\mathbf{T}$ 满足条件(1)及(2). 又由于

$$\det D\mathbf{T}(r,\varphi)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right|=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r>0,$$

故 $\mathbf{T}$ 在 G 内是正则变换.

例 11.4.3 变换 $\mathbf{T}$：

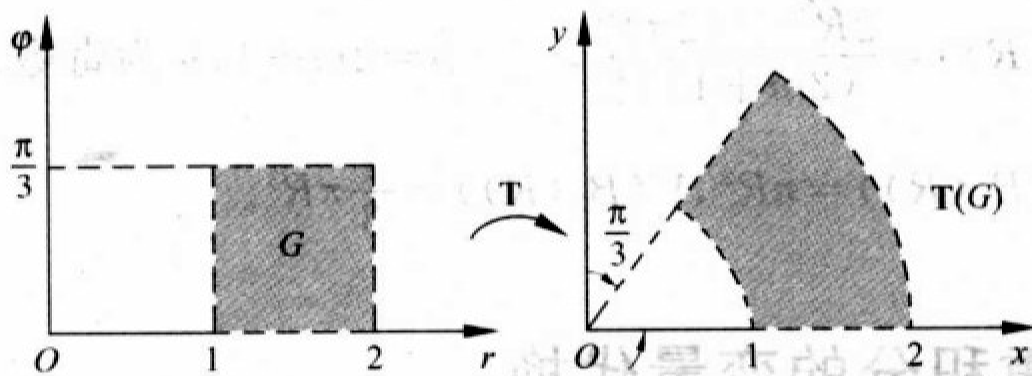


图 11.1

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad G=\{(r,\varphi)\mid 1<r<2, 0<\varphi<4\pi\}.$$

此变换满足条件(1)及(3)，但 **T** 在 G 内不是一一的，不满足(2)，故 **T** 在 G 内不是正则变换.

例 11.4.4 变换 **T**：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^3 \\ v \end{pmatrix}, \qquad G=\{(u,v)\mid -2<u<2, -2<v<2\}.$$

显然此变换满足条件(1)及(2)，但由于

$$\det D\mathbf{T}(u,v)=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3u^2$$

在 $u=0$ 时为零，不满足(3)，故 **T** 在 G 内不是正则变换.

定理 11.4.5 正则变换的性质：

(1) 正则变换 **T** 将开集 G 变为开集 $\mathbf{T}(G)$.

(2) 存在 **T** 的逆变换 $\mathbf{T}^{-1}:\mathbf{T}(G)\to G$，$\mathbf{T}^{-1}$ 也是正则变换.

(3) 若 **T** 能分解成 C^1 类变换的复合：$\mathbf{T}=\mathbf{T}_2\circ\mathbf{T}_1$，则 $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2$ 也是正则变换.

(4) 设 $A\subset G$，$\mathbf{T}(A)\subset\mathbf{T}(G)$，则 **T** 将 A 的内点、外点及边界点分别变为 $\mathbf{T}(A)$ 的内点、外点及边界点.

(5) 变换 **T** 将 G 内的区域及闭区域分别变为 $\mathbf{T}(G)$ 内的区域及闭区域.

定理 11.4.6 设有开集 $G\subset\mathscr{E}^n$，$\mathbf{T}\in C^1(G)$，$\mathbf{T}(G)\subset\mathscr{E}^n$，又设

有点集 $\sigma \subset G$,且闭包$\bar{\sigma}\subset G$,容积 $V(\sigma)=0$,则 $V(\mathbf{T}(\sigma))=0$.

定理 11.4.7 设开集 $G\subset\mathscr{E}^n$,$\mathbf{T}:G\to\mathbf{T}(G)$是正则变换,Jordan可测集 $\Omega\subset G$,且闭包 $\bar{\Omega}\subset G$,则 $\mathbf{T}(\Omega)$也是可测集.

定理 11.4.8 设有开集 $G\subset\mathscr{E}^n$及正则变换 $\mathbf{T}:G\to\mathbf{T}(G)$,若 Ω 是 G 内的闭 Jordan 可测集,f 是定义在 $\mathbf{T}(\Omega)$上的连续函数,则有

$$\int_{\mathbf{T}(\Omega)}\cdots\int f(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{\Omega}\cdots\int f(\mathbf{T}(u))\mid\det D\mathbf{T}(u)\mid\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n$$

或写成

$$\int_{\mathbf{T}(\Omega)}f\mathrm{d}V=\int_{\Omega}f\circ\mathbf{T}\mid\det D\mathbf{T}\mid\mathrm{d}V.$$

定理 11.4.9 设有开集 $G\subset\mathscr{E}^n$,$\mathbf{T}\in C^1(G)$,Jordan 可测闭区域 $\Omega\subset G$,若 $\mathbf{T}$ 是内集 Ω^0 的正则变换,f 是定义在 $\mathbf{T}(\Omega)$上的连续函数,则有

$$\int_{\mathbf{T}(\Omega)}f\mathrm{d}V=\int_{\Omega}f\circ\mathbf{T}\,|\det D\mathbf{T}|\,\mathrm{d}V.$$

注 定理 11.4.6 指出,若 $\mathbf{T}$ 在 Ω 上,除测度为零的集合外都是正则变换,上述公式仍成立.

定义 11.4.10 若在区域 $G\subset\mathscr{E}^2$内任一封闭曲线均可不经过 G 以外的点而连续收缩于属于 G 的某一点,则称 G 为**单连通域**(simply connected domain),否则称为**多连通域**(multiply connected domain).

定理 11.4.11 设

(1) $G\subset\mathscr{E}^2$是单连通的开区域,有正则变换

$$\mathbf{T}:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\end{cases}\qquad(u,v)\in G.$$

(2) $L\subset G$ 是任一可求长的简单闭曲线(见 12.1 节),则 L 经 $\mathbf{T}$ 变换为可求长的简单闭曲线 $C=\mathbf{T}(L)$,且:

① 若 $\det D\mathbf{T}(u,v)>0$,则 $\mathbf{T}(L^+)=C^+$;

② 若 $\det D\mathbf{T}(u,v)<0$,则 $\mathbf{T}(L^+)=C^-$.

11.4.2 特殊情形

(1) 二重积分的变量代换

定理 11.4.12 若 G 是 $\mathscr{E}^2$ 中的开集:$G\subset\mathscr{E}^2$;设

(1) $\mathbf{T}:D^*\subset G\to\mathbf{T}(D^*)=D$,

$$\mathbf{T}(u,v):\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\end{cases}\quad (u,v)\in D^*\mapsto(x,y)\in D,$$

其中 $D^*\subset G$ 是 uv 平面上由可求长曲线(见 12.1 节)所围成的闭区域,D 是 xy 平面上的闭区域.

(2) $\mathbf{T}\in C^1(G)$,$\mathbf{T}$ 是在内集 $(D^*)^0$ 上的正则变换.

(3) 函数 $f(x,y)\in C(D,\mathscr{E}^1)$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D^*}f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例 11.4.13 二重积分的极坐标代换 计算 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\text{变换 }\mathbf{T}:\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\end{cases}\quad (r,\theta)\in D^*\subset G\subset\mathscr{E}^2\longmapsto(x,y)\in D\subset\mathscr{E}^2,$$

$$G=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)<r<r_2(\theta),\alpha<\theta<\beta\}.$$

设 $f=C(D)$,由于 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r>0$,则(见图 11.2)

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D^*}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_\alpha^\beta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

上式中的 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 称为极坐标下的面积微元(area element in polar coordinates).

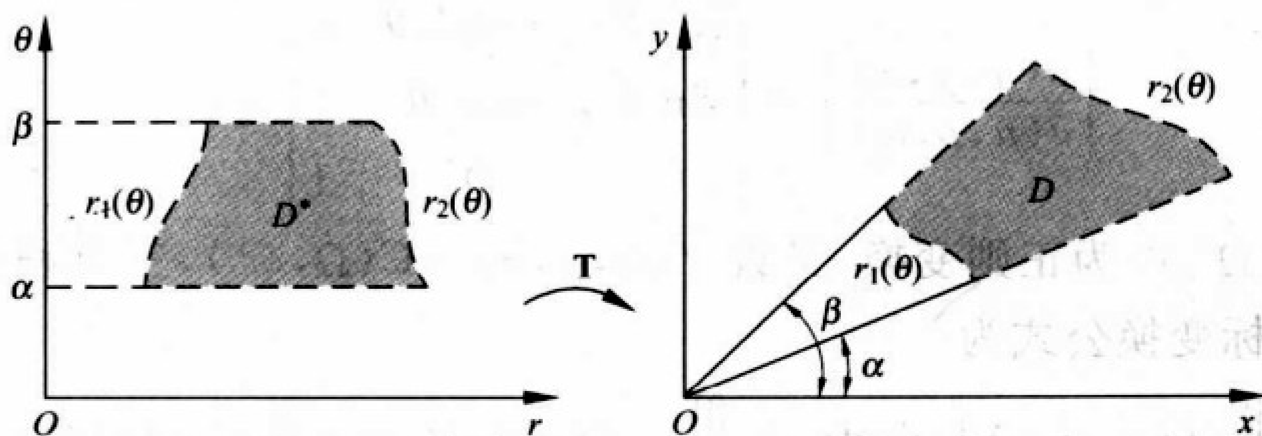


图 11.2

(2) 三重积分的变量代换

定理 11.4.14 若 G 是 $\mathscr{E}^3$ 中的开集:$G\subset\mathscr{E}^3$. 设

(1) $\mathbf{T}:\Omega^*\subset G\to\mathbf{T}(\Omega^*)=\Omega$,

$$\text{变换 }\mathbf{T}(u,v,w):\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w),\end{cases}$$

$$(u,v,w)\in\Omega^*\longmapsto(x,y,z)\in\mathbf{T}(\Omega^*)=\Omega,$$

其中 $\Omega^*\subset G$ 是 uvw 空间中由有限个连续显函数表示的曲面所围成的闭区域,Ω 是 xyz 空间中的闭区域.

(2) $\mathbf{T}\in C^1(G)$,$\mathbf{T}$ 是在内集$(\Omega^*)^0$ 上的正则变换.

(3) 函数 $f(x,y,z)\in C(\Omega,\mathscr{E}^1)$经变换后为 $f^*(u,v,w)\in C(\Omega^*,\mathscr{E}^1)$,则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*}f^*(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

例 11.4.15 三重积分的柱坐标(cylindrical coordinates)变换

$$\text{变换 }\mathbf{T}:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}\quad(r,\theta,z)\in\Omega^*\subset G\subset\mathscr{E}^3\longmapsto(x,y,z)\in\Omega\subset\mathscr{E}^3,$$

$$G=\{(r,\theta,z)\mid r>0,0<\theta<2\pi,-\infty<z<+\infty\}.$$

由于

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

T 在 $(\Omega^*)^0$ 为正则变换. 又设 $f(x,y,z)=C(\Omega,\mathscr{E}^1)$，三重积分的柱坐标变换公式为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

上式中的 $r\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}z$ 称为柱坐标下的体积微元(volume element in cylindrical coordinates)，见图 11.3.

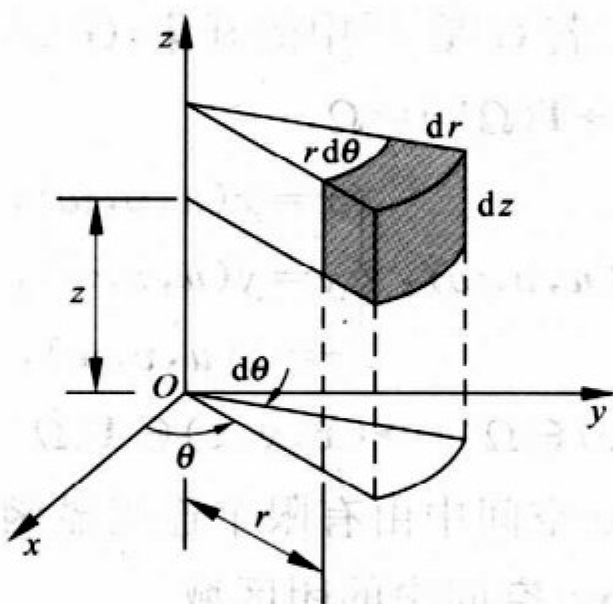


图 11.3

例 11.4.16 三重积分的球坐标变换

$$\text{变换 }\mathbf{T}:\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z=\rho\cos\varphi, \end{cases}$$

$$(\rho,\varphi,\theta)\in\Omega^*\subset G\subset\mathscr{E}^3\longmapsto(x,y,z)\in\Omega\subset\mathscr{E}^3,$$

$$G=\{(\rho,\varphi,\theta)\in\mathscr{E}^3 \mid r>0, 0<\varphi<\pi, 0<\theta<2\pi\}.$$

$$\det D\mathbf{T}(\rho,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\rho^2\sin\varphi,$$

可知 $\mathbf{T}$ 在$(\Omega^*)^0$ 上为正则变换，又设 $f=C(\Omega,\mathscr{E}^1)$，则三重积分的球坐标变换公式为

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_{\Omega^*} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

上式中的因子 $\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$ 称为**球坐标下的体积微元**(volume element in spherical coordinates)，见图 11.4.

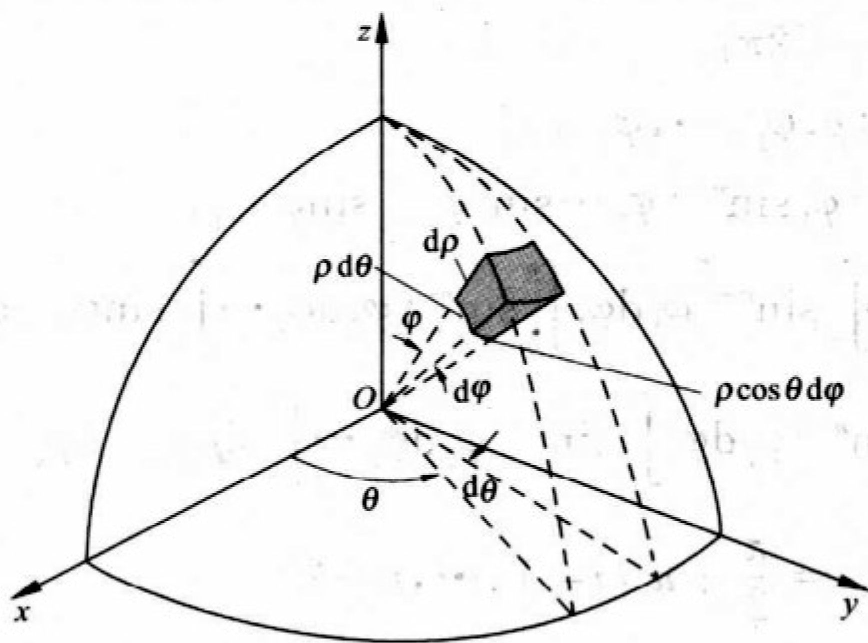


图 11.4

若 $\Omega^*=\{(\rho,\varphi,\theta)\mid\rho_1(\varphi,\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\varphi,\theta),\varphi_1(\theta)<\varphi<\varphi_2(\theta),\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}\subset G$，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)}f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\rho^2\mathrm{d}\rho.$$

例 11.4.17 n 维球的体积

定义 $\Omega:x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$ 为 n 维球，其体积应表示为

$$V=\int_\Omega \mathrm{d}V^{(n)}=\overbrace{\int_\Omega\cdots\int}^{n\text{个}}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

用 n 维球坐标变换 $\mathbf{T}:\Omega^*\to\Omega$ 如下：

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\varphi_1, \\ x_2 = \rho\sin\varphi_1\ \cos\varphi_2, \\ x_3 = \rho\sin\varphi_1\ \sin\varphi_2\ \cos\varphi_3, \\ \vdots \\ x_{n-1} = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}. \end{cases}$$

$$\Omega^* = \{(\rho,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}) \mid 0\leqslant\rho\leqslant R, 0\leqslant\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-2}\leqslant\pi, 0\leqslant \varphi_{n-1}\leqslant 2\pi\}.$$

$$\begin{aligned} &|\det D\mathbf{T}(\rho,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})| \\ &= \rho^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin^2\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R \rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2\cdots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_{n-1} \\ &= \frac{R^n}{n}\left[\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2\cdots\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\right]2\pi. \end{aligned}$$

作变量代换：$\varphi_i = \dfrac{\pi}{2} + u_i (i=1,\cdots,n-2)$

$$\begin{aligned} V &= \frac{2R^n\pi}{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}u_1\mathrm{d}u_1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-3}u_2\mathrm{d}u_2\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u_{n-2}\mathrm{d}u_{n-2} \\ &= \frac{2R^n\pi}{n}\cdot 2^{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}u_1\mathrm{d}u_1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-3}u_2\mathrm{d}u_2\cdots\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u_{n-2}\mathrm{d}u_{n-2} \end{aligned}$$

利用 Γ 函数，可得与例 11.3.9 同样的结果：

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}R^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

12 曲线积分与曲面积分

12.1 可求长曲线

本章 12.1 节至 12.5 节研究简单曲线(见 8.8 节)$L\subset\mathscr{E}^3$ 上的积分,它们易于推广至 $\mathscr{E}^n$ 中.设有

$$L: x=x(t), y=y(t), z=z(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b$$

或写成

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+x(t)\boldsymbol{j}+x(t)\boldsymbol{k},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为 $\mathscr{E}^3$ 中之基向量,且 $x(t), y(t), z(t)\in C[a,b]$. 若 $\boldsymbol{r}(a)\neq\boldsymbol{r}(b)$,则简单曲线是开的,否则是闭的.

定义 12.1.1 设点 A,B 为曲线的端点,存在从 A 至 B 及从 B 至 A 两个方向,规定其中之一为正方向,记作 L^+,反方向则记作 L^-. 这一规定称之为**定向简单曲线**(oriented simple curve)(见图 12.1).

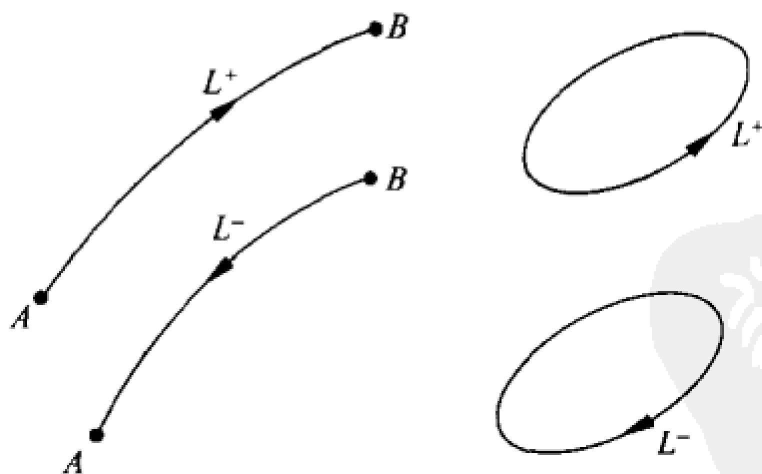


图 12.1

定义 12.1.2 **弧的直径**(diameter of an arc) 弧$\overset{\frown}{AB}$上任意

两点 M_1, M_2 的弦长 $\overline{M_1M_2}$ 的最大值称为弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的直径，记作 $d(\overset{\frown}{AB})$.

定理 12.1.3 若曲线 $\overset{\frown}{AB}$: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 可开可闭，$d(\overset{\frown}{AB})\to 0$ 的充要条件是 $t_2-t_1\to 0$. 其中点 A 对应 $\boldsymbol{r}(t_1)$，点 B 对应 $\boldsymbol{r}(t_2)$.

定义 12.1.4 设有曲线 L: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，从端点 A 到端点 B 方向依次任取分点 $A=A_0, A_1, \cdots, A_n=B$，它们对应于递增的参数 $a=t_0, t_1, \cdots, t_n=b$，于是得一折线 $P_n=\overline{A_0A_1\cdots A_n}$. 当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i = \max d_i(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i})\to 0$ 时，若折线 P_n 的长趋向 l（此定值与分法无关），则称 $\overset{\frown}{AB}$ 为**可求长曲线**（rectifiable curve），其长度为 l.

定理 12.1.5 设点 M 为可求长曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 上任一点，则 $\overset{\frown}{AM}$，$\overset{\frown}{MB}$ 均可求长，且 $l=l_1+l_2$. 其中 l, l_1, l_2 分别为 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AM}$，$\overset{\frown}{MB}$ 的长度.

定理 12.1.6 设简单曲线 L: $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ 是连续可微的，即 $x(t), y(t), z(t)\in C^1[a,b]$，则 L 是可求长的，其长度为

$$l=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

由此定理及 8.8 节的内容可知，光滑曲线必可求长.

12.2 第一型曲线积分

定义 12.2.1 设 $f(x,y,z)$ 定义在可求长曲线 $L\subset\mathscr{E}^3$ 上，从端点 A 到端点 B 依次用分点 $A=A_0, A_1, \cdots, A_n=B$ 分成 n 小段，记每个小段 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 弧长为 $\Delta s_i\,(i=1,\cdots,n)$，在 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ 上任取一点 $P_i=(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. 若极限 $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta s_i=\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$

存在(它不依赖于 P_i 的选取及曲线$\overset{\frown}{AB}$ 的分法),其中 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$,则称此极限为 $f(x,y,z)$ 在曲线 L 上的**第一型曲线积分**(line integral of the first kind),记作

$$\int_L f(P)\mathrm{d}s=\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

当 L 为闭曲线时,常记作

$$\oint_L f(P)\mathrm{d}s=\oint_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

定理 12.2.2 设有可求长曲线 $L\subset\mathscr{E}^3$,且 $f(x,y,z)$及 $g(x,y,z)$在 L 上第一型曲线积分存在,则有以下性质:

(1) 若改变 L 的定向,积分值不变,即

$$\int_{L^+} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{L^-} f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

(2) 对任意常数 k_1,k_2

$$\int_L[k_1 f(x,y,z)+k_2 g(x,y,z)]\mathrm{d}s$$
$$=k_1\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s+k_2\int_L g(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

(3) 设曲线 L 是两条简单曲线 L_1 及 L_2(除连接点外,无公共点)的和集,则

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y,z)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

定理 12.2.3 若 $f(x,y,z)$在可求长曲线 L 上连续,则 f 在 L 上的第一型曲线积分存在,且有

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^l f(x(s),y(s),z(s))\mathrm{d}s,$$

其中 l 为 L 的弧长,L 的参数方程为

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad z=z(s),\quad s\in[0,l],$$

且 $x(s),y(s),z(s)$均为连续函数.

定理 12.2.4 设 L 是一光滑曲线，

$$L: \boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}, \qquad a\leqslant t\leqslant b,$$

且 $f(x,y,z)$ 在 L 上连续，则 $f(x,y,z)$ 在 L 上的第一型曲线积分存在，且

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

12.3 第二型曲线积分

定义 12.3.1 设有以 A 为起点，B 为终点的简单定向曲线 $\overset{\frown}{AB}\subset\mathscr{E}^3$：

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}, \qquad t\in[a,b] \quad 或 \quad t\in[b,a],$$

$\boldsymbol{r}(a),\boldsymbol{r}(b)$ 分别对应于 A,B 两点.

设向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

定义在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，在 $\overset{\frown}{AB}$ 上按指定方向依次取分点 $A=A_0,A_1,\cdots,A_n=B$ 将 $\overset{\frown}{AB}$ 分成 n 段弧：$\overset{\frown}{A_0A_1},\overset{\frown}{A_1A_2},\cdots,\overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$，相应地得到 n 个向量 $\overrightarrow{A_0A_1}=\Delta\boldsymbol{r}_1,\overrightarrow{A_1A_2}=\Delta\boldsymbol{r}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\Delta\boldsymbol{r}_n$，它们是向径 $\boldsymbol{r}$ 的增量，取和式

$$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(M_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i,$$

其中 $M_i=(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ $(i=1,\cdots,n)$，记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i})$，若

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(M_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$$

存在，它不依赖于 $\overset{\frown}{AB}$ 的分法及 M_i 的选法，则称此极限是 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 沿定向曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的**第二型曲线积分**(line integral of the

second kind)，记作

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i.$$

简称为 F 沿 $\overset{\frown}{AB}$ 的积分，又由于

$$\Delta \boldsymbol{r}_i = \Delta x_i \boldsymbol{i} + \Delta y_i \boldsymbol{j} + \Delta z_i \boldsymbol{k},$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta Z_i),$$

故也可用记号

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

这时

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{AB}} Q\mathrm{d}y + \int_{\overset{\frown}{AB}} R\mathrm{d}z,$$

其中 $\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\mathrm{d}x$ 称作 $P(x,y,z)\mathrm{d}x$ 沿 $\overset{\frown}{AB}$ 的第二型积分，其他类似.

定理 12.3.2 第二型曲线积分有下列性质：

(1) $\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\overset{\frown}{BA}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 或 $\int_{L^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{L^-} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

(2) 若 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ 沿 $\overset{\frown}{AB}$ 的积分均存在，则

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} (k_1 \boldsymbol{F} + k_2 \boldsymbol{G}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = k_1 \int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + k_2 \int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 k_1, k_2 为常数.

(3) 若 $\boldsymbol{F}$ 沿 $\overset{\frown}{A_0A_1}, \overset{\frown}{A_1A_2}, \cdots, \overset{\frown}{A_{n-1}A_n}$ 的积分均存在，则

$$\int_{\overset{\frown}{A_0A_n}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

定理 12.3.3 设 L 是可求长曲线，向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

是 L 上的连续函数(即 P,Q,R 是连续的),则 $\int_{L^+} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 存在.

定理 12.3.4 设有一光滑定向曲线$\overset{\frown}{AB}$:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \qquad t \in [a,b].$$

又设

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

在$\overset{\frown}{AB}$上连续,则 $\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 存在,且

$$\begin{aligned}\int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ &= \int_a^b [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t), \\ &\quad z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{r}(a),\boldsymbol{r}(b)$ 分别对应起点 A 及终点 B.

特别地,有

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\mathrm{d}t.$$

其余$\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y,z)\mathrm{d}y$,$\int_{\overset{\frown}{AB}} R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 也有类似的等式.

定理 12.3.5 设:(1)有开区域 $G\subset\mathscr{E}^3$ 及可求长曲线$\overset{\frown}{AB}\subset G$;(2)用分点 $A=A_0,A_1,\cdots,A_{n-1},A_n=B$ 将$\overset{\frown}{AB}$从 A 至 B 依次分为 n 段,相应地得到折线 $\Gamma_n = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_{i-1}A_i}$;(3)$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 是 G 内的连续函数,则 $\boldsymbol{F}$ 沿$\overset{\frown}{AB}$的积分可用 $\boldsymbol{F}$ 沿折线 Γ_n 的积分来逼近,即

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{\Gamma_n} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i})$.

12.4 第一型与第二型曲线积分的联系

定理 12.4.1 设:(1)光滑曲线$\overset{\frown}{AB}$以弧长 s 为参数的方程为

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad z=z(s),\qquad s\in[0,l],$$

其中 l 为$\overset{\frown}{AB}$的弧长,起点 A 对应 $s=0$. 于是在$\overset{\frown}{AB}$上点$(x(s), y(s), z(s))$处的切线单位向量(指向弧长增长方向)为

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}=\cos(\boldsymbol{\tau},x)\boldsymbol{i}+\cos(\boldsymbol{\tau},y)\boldsymbol{j}+\cos(\boldsymbol{\tau},z)\boldsymbol{k};$$

(2) $\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在$\overset{\frown}{AB}$上连续,则

$$\begin{aligned}&\int_{\overset{\frown}{AB}}P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\=&\int_{\overset{\frown}{AB}}[P\cos(\boldsymbol{\tau},x)+Q\cos(\boldsymbol{\tau},y)+R\cos(\boldsymbol{\tau},z)]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

即

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s.$$

12.5 Green 公式

定义 12.5.1 设区域 $D\subset\mathscr{E}^2$ 是由一条或有限条封闭曲线所围成,当人沿边界行走时,若 D 总在左手边,如图 12.2,则此时各

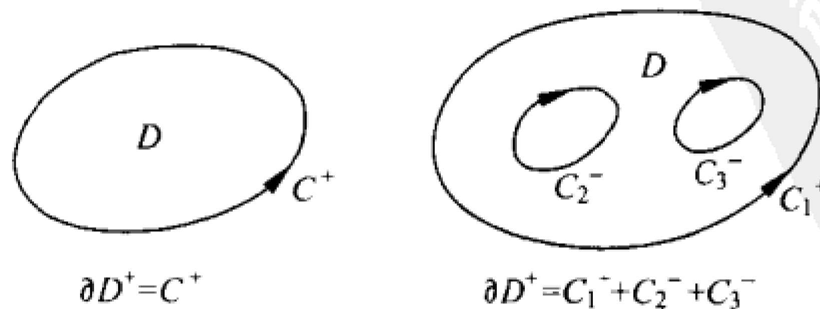


图 12.2

条边界线的方向规定为区域 D 的边界的正向，记作∂D^{+}，相反方向为负向. 此规定称为**区域边界的定向**(orientation of a domain's boundary).

定理 12.5.2 设:(1) $D\subset\mathscr{E}^2$ 是有界区域,∂D 是有限条封闭的彼此不相交的可求长曲线的并集;(2) $\boldsymbol{F}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}\in C^1(\overline{D})$,则

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

此公式称为 **Green(格林) 公式**(Green formula).

注 若∂D 是由有限条光滑的,彼此不相交的曲线组成,Green 公式当然也成立.

定理 12.5.3 设 $D\subset\mathscr{E}^2$ 是有界区域,∂D 是有限条封闭的彼此不相交的可求长曲线的并集,则区域 D 的面积为

$$V(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D^+}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

12.6 曲面面积

定义 12.6.1 设:(1)G 是 uv 平面的开区域,$D\subset G\subset\mathscr{E}^2$ 是由有限条逐段光滑的简单闭曲线围成的闭区域;(2)曲面 S 的方程为 $\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k}$,$(u,v)\in G$;(3)在 D 的内部 D^0 上,$\boldsymbol{r}(u,v)$是一一对应的,且 $\boldsymbol{r}(u,v)\in C^1(G)$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\neq\boldsymbol{0}$,则点集 $S=\boldsymbol{r}(D)$为 $Oxyz$ 空间的**内部光滑曲面**(interior smooth sarface).

注 (1) 本定义与 8.9 节之定义不同之处在于 $\boldsymbol{r}(u,v)$在边界∂D上可以不一一对应,也可以$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\boldsymbol{0}$.

(2) 球面、锥面都是内部光滑曲面.

定理 12.6.2 设 $G\subset\mathscr{E}^2$，$D\subset G$ 且 D 是由有限条逐段光滑的简单曲线所围成的闭区域，设光滑曲面 $S: z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 且 $f(x,y)\in C^1(G)$，则曲面 S 对应 D 上的面积(仍记作 S)等于

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

推论 12.6.3 设光滑曲面 $S:F(x,y,z)=0$，$(x,y,z)\in\Omega$，且 $F(x,y,z)\in C^1(\Omega)$，则曲面 S 对应 D 上的面积为

$$S=\iint_D\frac{\sqrt{F_x'^2+F_y'^2+F_z'^2}}{|F_z'|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

定理 12.6.4 设闭区域 D 同上定理之 D，S 是内部光滑曲面

$$\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\qquad (u,v)\in D,$$

且 $\boldsymbol{r}(u,v)\in C^1(D)$，$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\neq\boldsymbol{0}$，$(u,v)\in D^0$，则曲面面积 S 为

$$\begin{aligned}S&=\iint_D|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

其中

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\qquad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\qquad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

$$E=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

定义 12.6.5 称 $|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 为内部光滑曲面的**面积微元**(surface element)，记作

$$dS = |\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)|\,dudv = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$
$$= \sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

12.7 第一型曲面积分

定义 12.7.1 设：(1) $f(x,y,z)$ 定义在光滑曲面 S 上；(2) $\{\Delta S_1,\cdots,\Delta S_m\}$ 是 S 的一个划分(partition)，每一片 ΔS_i 为光滑曲面，$\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Delta S_i = S$，且其中 ΔS_k 与 ΔS_j $(k\neq j)$ 无公共内点，在每一片 ΔS_i 上任取一点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,\cdots,m)$；(3) 作和式 $\sum\limits_{i=1}^{m} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$，其中 ΔS_i 表示分片面积，若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(x,y,z)\Delta S_i = I \qquad \left(\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{d_i(\Delta S_i)\}\right)$$

存在且与划分法及 M_i 的取法无关，则称 I 是 $f(x,y,z)$ 在 S 上的**第一型曲面积分**(surface integral of the first kind)，记作

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i = I,$$

并称 f 在 S 上可积.

注 (1) 当 $f\equiv 1$，$\iint_S dS = S$ 为曲面面积. (2) 若 f 与 g 在内部光滑曲面 S 上的第一型曲面积分存在，则

$$\iint_S (k_1 f + k_2 g)\,dS = k_1\iint_S f\,dS + k_2\iint_S g\,dS,$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

定理 12.7.2 设：(1) 有光滑曲面 S：

$$\boldsymbol{r}(u,v) = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad (u,v)\in D,$$

其中 D 是有界闭区域；

(2) $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则 $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ 存在，且

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$$
$$=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},C=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

推论 12.7.3 设光滑曲面 S 由显函数给出：$S:z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，则有

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

推论 12.7.4 若 S 是内部光滑曲面 S，式(12.1)仍成立.

推论 12.7.5 设：(1) S_1,S_2 是两片内部光滑曲面，且 $(S_1\backslash\partial S_1)\cap(S_2\backslash\partial S_2)=\varnothing,S_1\cup S_2=S$；(2) $f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则规定

$$\iint_S f\mathrm{d}S=\iint_{S_1} f\mathrm{d}S+\iint_{S_2} f\mathrm{d}S.$$

12.8 第二型曲面积分

定义 12.8.1 设 S 是一内部光滑曲面，且假定 S 的边界上任一点都有法向量. 若对于 S 上的任一点 P，取定 P 的法向量的一个原始方向，令 P 沿 S 上过点 P 的闭曲线运动，在整个运动过程中法向量的方向相应地连续变化. 若动点回至原来位置时法向量也恢复至原始方向，则称此内部光滑曲面 S 是**双侧曲面**(orientable surface)，否则称为**单侧曲面**(nonorientable surface).

注 由 $z=f(x,y)$ 给出的曲面是双侧的.

定义 12.8.2 设 S 是双侧曲面，如果指定了 S 的法向量的方向，则称曲面 S 的全部点连同指定的法向量为曲面的一个**定侧**(orientation).

定义 12.8.3 设 S 是双侧曲面，确定侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$，S 的边

界是有限条分段光滑的封闭曲线 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_m$，一人依 $\boldsymbol{n}$ 的方向站在 S 的边界 $\Gamma_i(i=1,\cdots,m)$ 上行进，若曲面 S 位于左手边，规定此方向为 $\Gamma_i(i=1,\cdots,m)$ 的**正方向**，并将 S 连同按上述规则指定的 $\Gamma_i(i=1,\cdots,m)$ 的正向称为 S 的一个**定向**. 此规定称为**双侧曲面 S 的边界的正方向**(oriented edge of a smooth simple surface).

定义 12.8.4 设 S 是由 $S_i(i=1,\cdots,k)$ 构成的分块光滑曲面，对每一个 $S_i(i=1,\cdots,k)$ 都有两个定向可供选择，若存在一种选择方法，使任意两个有公共边界的光滑曲面，它们在公共部分边界的方向正好相反，则称此分块光滑曲面 S 是分块光滑**双侧曲面**(piecewise smooth oriented surface)，否则是**单侧的**.

例如，多面体的边界面都是分块光滑曲面，而且都是双侧曲面，见图 12.3.

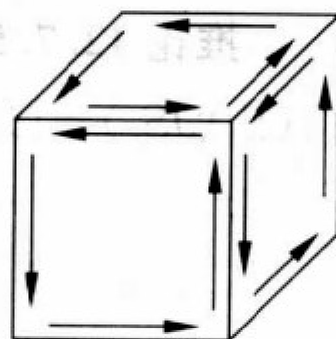


图 12.3

定义 12.8.5 对于双侧曲面 S，若选择其法向量正方向与 z 轴正方向的夹角 $\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的一侧，就称为 S 的**上侧**(oriented upward)，记作 S^+，另一侧 $\left(\gamma\geqslant\frac{\pi}{2}\text{时}\right)$ 就称为 S 的**下侧**(oriented downward)，记作 S^-. 对分块光滑封闭双侧曲面 S，将法向量指向曲面外部(内部)的一侧，称为**外侧**(oriented outward)(**内侧**(oriented inward))，记作 $S^+(S^-)$，如图 12.4.

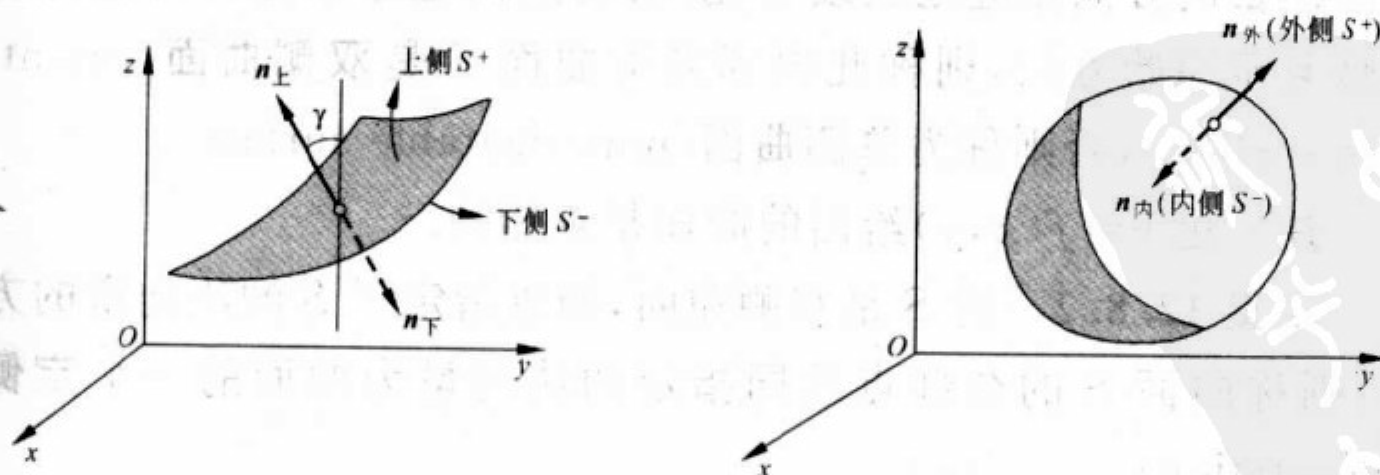


图 12.4

定义 12.8.6 设 $f(x,y,z)$ 定义在双侧的内部光滑曲面 S 上，选定 S 的一侧，对 S 这一侧作划分 $\{\Delta S_1,\cdots,\Delta S_m\}$，记 $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq m}\{d_i(\Delta S_i)\}$，在每一小片曲面 $\Delta S_i(i=1,\cdots,m)$ 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，得函数值 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，并乘以 ΔS_i 在 xy 平面上的投影的面积 $\Delta\sigma_{i_{xy}}$，$\Delta\sigma_{i_{xy}}$ 所带的符号由 ΔS_i 的侧来确定（如 ΔS_i 的法向量与 z 轴正向夹角为锐角，就取正号，否则取负号），若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{m}f(x,y,z)\Delta\sigma_{i_{xy}}$ 存在，它与对曲面 S 的划分及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 在 ΔS_i 上的取法无关，则称此极限为 $f(x,y,z)$ 在 S 被指定的一侧上的**第二型曲面积分**（surface integral of the second kind），记作

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m}f(x,y,z)\Delta\sigma_{i_{xy}}.$$

定理 12.8.7 设 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 S：$z=z(x,y)$，$(x,y)\in D$ 上连续，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D f[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此处之正、负号由 S 所指定之侧为上侧或下侧而定，右端为 D 上的二重积分.

类似地，有另两个第二型曲面积分：

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

此外还常遇到三者相加的情形，可写成

$$\begin{aligned}&\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

定理 12.8.8 设 S 是双侧的分块光滑曲面:$S=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$,指定 S 的一侧,若 $\iint_{S_i}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (i=1,2,\cdots,m)$ 存在,则

$$\begin{aligned}&\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\sum_{i=1}^{m}\iint_{S_i}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

定理 12.8.9 设:(1)曲面 S 为双侧按片内部光滑的,指定 S 的一侧,$\boldsymbol{n}^0=\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\cos\beta\,\boldsymbol{j}+\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$ 为 S 的单位法向量;(2)函数 $\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在 S 上连续,则 F 在 S 上的第二型曲面积分为

$$\begin{aligned}\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^0\mathrm{d}S.\end{aligned}$$

例 12.8.10 设:(1) 内部光滑的双侧曲面

$$S:\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},\qquad (u,v)\in D,$$

曲面 S 的单位法向量为(见 8.9 节及 12.1 式)

$$\boldsymbol{n}^0=\pm\frac{A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(2) $\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在 S 上连续,则 F 在 S 上的第二型曲面积分存在,且有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_D(PA+QB+RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

上式右端的正负号由 S 所指定之侧来确定,右端为 D 上的二重积分.

例 12.8.11 设有曲面

$$S:z=f(x,y),\qquad (x,y)\in D\subset\mathscr{E}^2,$$

其上任一点之单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right),$$

则 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 在 S 上的第二型曲面积分的计算公式为

$$\begin{aligned}&\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pm\iint_D\left(-P(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}-Q(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}\right.\\&\quad\left.+R(x,y,f(x,y))\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中右端积分号前取正(负)号当指定曲面为上(下)侧,右端为在 D 上的二重积分.

13 标量场及向量场

13.1 引论

当空间内或空间内部分区域中的任一点都有一物理量与之对应,则称这种物理量的分布空间为**场**(field).若物理量是向量,则称为**向量场**(vector field).若物理量是标量,则称为**标量场**(scalar field).例如,连续介质中的密度场、温度场都是标量场,固体中的位移场,流体中的速度场都是向量场.

标量场可表为空间及时间变量的标量函数 $\varphi(x_1,x_2,x_3,t)$ 或 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$,向量场则可表为空间及时间变量的向量函数.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\sum_i \hat{u}_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_i \quad 或 \quad \boldsymbol{u}=\sum_i u_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{g}^i,$$

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 及 $\boldsymbol{g}^i(i=1,2,3)$ 分别为 $\mathscr{E}^3$ 中之标准基向量及逆变基向量,$\hat{u}_i$ 及 u_i 分别为 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 上及 $\boldsymbol{g}^i$ 上的分量.

无论标量场或向量场又可分为两类:场函数不显含时间 t 时,称为**平稳场**(stationary field);场函数显含时间 t 时,称为**不平稳场**(nonstationary field).研究弹性静力学及流体定常流动等问题时涉及平稳场;研究弹性波及流体的非定常流动等问题时涉及不平稳场.今后如无特别说明,均指平稳场.

本章所述理论限制在 $\mathscr{E}^3$ 中论述,其中某些问题(如梯度、散度、Laplace 算子)可推广至 $\mathscr{V}^n$ 是显而易见的;至于另一些问题(如旋度)向 $\mathscr{E}^n$ 推广则要借助于张量场理论,而多维空间中的向量场理论及张量场理论无论在 Riemann 几何,Hamilton 力学及广义相对论中均有重要意义.

定义 13.1.1 在标量场 $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ 中，场函数值相同之点在 $\mathscr{E}^3$ 中形成一曲面或几个分离的面，这些面称之为**等值面**(level surface)或**等势面**(equipotential surface). 等值面的方程为

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}.$$

当常数取不同值时，便得到一系列无限层彼此不相交的密集等值面. 在 $\mathscr{E}^2$ 中等值面退化为等值线，即一系列封闭或不封闭的平面曲线(见图 13.1).

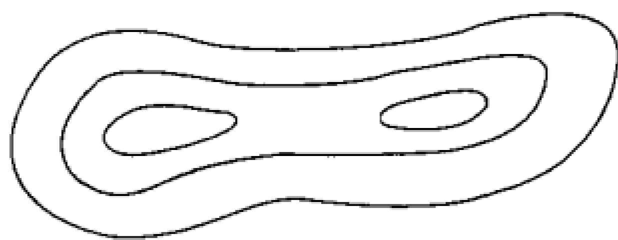


图 13.1

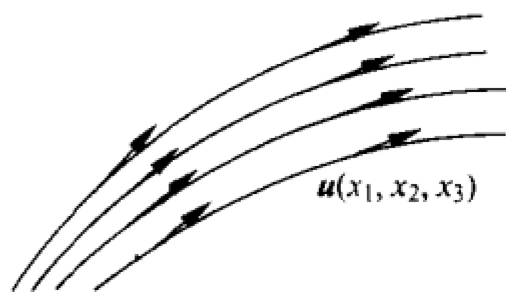


图 13.2

定义 13.1.2 若在向量场中作一曲线，使曲线上任一点的切线方向与该点的场向量方向一致，则该曲线称为向量场中的向量线(vector line). 向量场中存在无限多条密集的向量线，它们一般互不相交，或仅存在有限个交汇点. 若曲线

$$\boldsymbol{x}(x_1(\xi), x_2(\xi), x_3(\xi)) = x_1(\xi)\boldsymbol{e}_1 + x_2(\xi)\boldsymbol{e}_2 + x_3(\xi)\boldsymbol{e}_3$$

是向量场 $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3) = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3$ 的向量线，则必有 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$，或

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{u_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{u_2} = \frac{\mathrm{d}x_3}{u_3}.$$

这即是向量线应满足的微分方程. 向量线有明显的直观意义，如流体中的流线，电磁场中的磁力线等(见图 13.2).

13.2 标量场的梯度与保守场

定义 13.2.1 设 G 是 $\mathscr{E}^3$ 的一开域，标量场函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在 G 内有定义. 任取一分块光滑封闭曲面 $S \subset G$，且 S 包含点 $M(\boldsymbol{x})$，其相

应体积记作 V. 当 V 缩为一点 $M(\boldsymbol{x})$ 时，若极限

$$\lim_{S\to M}\frac{\iint_S \varphi\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}{V}$$

存在（$\boldsymbol{n}$ 为 S 上任一点的外法线单位向量），它与 S 的选择无关，则称此极限为**标量场** $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在 M 的**梯度**(gradient)，记作

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\lim_{S\to M}\frac{\iint_S \varphi\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}{V}.$$

显然，梯度的定义与所取的具体坐标无关，它反映了标量场的一种内涵性质，在定理 8.4.4 中已提到过，它表示 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在 M 的最大变化率，其方向则沿通过该点的等值面法线方向.

定理 13.2.2 设 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 是 G 内的 C^1 标量场，若 $M\in G$，φ 在点 $M(\boldsymbol{x})$ 的梯度存在，则有

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3.$$

定理 13.2.3 设 V 是 $\mathscr{E}^3$ 中的有界闭域，V 的边界 ∂V 是一分块光滑的双侧闭曲面，$\varphi=\varphi(\boldsymbol{x})\in C^1(V)$，则有以下积分定理：

$$\iiint_V \nabla\varphi\,\mathrm{d}V=\iint_{\partial V}\varphi\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

其中 ∂V 为 V 的边界，选定外侧.

定义 13.2.4 设 $\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3$ 是开域 $G\subset\mathscr{E}^3$ 内的连续向量场，若存在 G 内定义的函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 使 $\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{u}$，或

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=u_1,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=u_2,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=u_3,$$

则称 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 为向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 的**势函数**(potential function)，具有势函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 的向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 称为**保守场**(conservative field)或**势场**(potential field).

定理 13.2.5 定义在开域 G 的连续场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 为保守场的充要

条件为：在 G 内由 A 点沿任意光滑曲线 $\Gamma(\Gamma\subset G)$ 至 B 点的线积分

$$\int_{\Gamma}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\Gamma}u_1\mathrm{d}x_1+u_2\mathrm{d}x_2+u_3\mathrm{d}x_3$$

为同一值而与 Γ 的选取无关.

推论 13.2.6 若向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 在开域 G 内保持积分 $\int_{\Gamma}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与由 Γ 的起点 $M_0(\boldsymbol{x}_0)$ 至终点 $M(\boldsymbol{x})$ 的路径无关，则 $\int\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为势函数的全微分，或点 $M(\boldsymbol{x})$ 的势函数值为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

可见，保守场的势函数不惟一，但它们之间只差一个任意常数. 在具体问题中常规定 $\varphi(\boldsymbol{x}_0)=0$，以便确定任意常数.

例 一质量为 m 的质点 M 在引力场中所受的力为

$$\boldsymbol{F}=-\frac{\mu m}{r^3}\boldsymbol{r},$$

其中 $r=|\boldsymbol{r}|$ 为从引力中心 O 点至 M 的距离，$\boldsymbol{r}$ 为从 O 点引向 M 的向径. 积分

$$\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mu m\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

表示引力在路径 $\widehat{AB}$ 上的功. 显然此积分与自 A 至 B 之路径无关，故引力场为保守场，引力场的势函数为

$$\varphi(r)=\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mu m\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right).$$

若取 $r_0=\infty$ 处的 φ 值为零，则 $\varphi(r)=\frac{\mu m}{r}$. 不难验证 $\operatorname{grad}\varphi=\boldsymbol{F}$ 必定得到满足.

定理 13.2.7 开域 G 内的连续场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 为保守场的充要条件为：对 G 内任一分段光滑的简单封闭曲线 Γ，以下的线积分恒为零：

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

定义 13.2.8 设 G 是 $\mathscr{E}^3$ 中的开域,若对 G 内任一分段光滑的封闭曲线 Γ,存在 G 内一分块光滑双侧曲面 S,使 $\partial S=\Gamma$,则称 G 为曲面的**单连通区域**(simply connected domain).

定理 13.2.9 设 $G\subset\mathscr{E}^3$ 是曲面的单连通区域,$\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}_i$ 是 G 内的 C^1 向量场,则 $\boldsymbol{u}$ 为保守场的充要条件为

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1},\quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3}=\frac{\partial u_3}{\partial x_2},\quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}=\frac{\partial u_1}{\partial x_3}.$$

此定理的证明需借助于旋度概念及 Stokes(斯托克斯)定理(见定理 13.4.4).

推论 13.2.10 设 $D\subset\mathscr{E}^2$ 是平面的单连通区域,$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2$ 是 D 内的 C^1 向量场,则 $\boldsymbol{u}$ 为保守场以及在 D 内由 A 点沿任意光滑曲线 $\Gamma(\Gamma\subset D)$ 至 B 点的线积分

$$\int_\Gamma \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_\Gamma u_1\mathrm{d}x_1 + u_2\mathrm{d}x_2$$

与由 A 至 B 间的路径无关的充要条件为

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}.$$

13.3 向量场的散度及 Gauss 定理

定义 13.3.1 给定一向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 及双侧曲面 S,指定一侧的外法线单位向量 $\boldsymbol{n}$,向量场函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 沿曲面 S 的曲面积分

$$\iint_S \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_S (u_1\cos\alpha + u_2\cos\beta + u_3\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

称为向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 通过曲面 S 的**通量**(flux). 其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, α,β,γ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向角.

定义 13.3.2 设 G 是 $\mathscr{E}^3$ 的开域,$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 在 G 内有定义,任取

一分块光滑封闭曲面 $S \subset G$，且 S 包含点 $M(\boldsymbol{x})$，其相应体积记作 V，当 V 缩为一点 $M(\boldsymbol{x})$ 时，若极限

$$\lim_{S \to M} \frac{\iint_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S}{V}$$

存在且与 S 的选择无关，则称此极限为向量场 u 在 $M(\boldsymbol{x})$ 的**散度**(divergence)，记作 $\operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. 显然，散度的定义与所取的具体坐标无关，它反映了向量场的一种内涵性质，通量及散度的背景来源于流体的流量、静电场的电通量、磁场的磁通量等.

定理 13.3.3 设 $\boldsymbol{u}$ 是 G 内的 C^1 向量场，若对于 $M \in G$，$\boldsymbol{u}$ 在 $M(\boldsymbol{x})$ 的散度存在，则有

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

引入算子 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\boldsymbol{e}_3$，则有 $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$.

定义 13.3.4 若 $\varphi(\boldsymbol{x}) \in C^2(G)$，$G$ 是 $\mathscr{E}^3$ 的开域，则有

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2},$$

$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ 称为 **Laplace 算子**(Laplace operator).

定理 13.3.5 Gauss 定理(Gauss theorem) 设 V 是 $\mathscr{E}^3$ 的有界闭域，其边界 ∂V 是一分块光滑的双侧闭曲面，$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 \in C^1(V)$，则有以下的 Gauss 定理：

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}V$$

$$= \iint_{\partial V} u_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + u_2 \mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 + u_3 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

也可表示为

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}V = \iint_{\partial V} (u_1 \cos\alpha + u_2 \cos\beta + u_3 \cos\gamma) \mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为∂V 上法线单位向量 $\boldsymbol{n}$ 的分量，$\boldsymbol{n}$ 指向外侧. Gauss 定理实质上给出了通量与散度的关系，又可表为以下的两种形式：

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{u} \, \mathrm{d}V = \iint_{\partial V} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S,$$

$$\iiint_V u_{i,i} \mathrm{d}V = \iint_{\partial V} u_i n_i \mathrm{d}S,$$

其中$(\ \ )_{,i}$表示某函数$(\ \ )_i$ 对 x_i 的偏导数.

定理 13.3.6 设开域 V 满足：V 内任意双侧闭曲面所围的域仍包含于 V 内，$\boldsymbol{u} = \sum_i u_i \boldsymbol{e}_i \in C^1(V)$，则积分$\iint_S \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$在 V 内与曲面形状无关的充要条件是：对 V 内任一点都有 $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$.

定义 13.3.7 在 V 内处处都有 $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$ 的场称为**无源场**(field without sources)，反之则称为**有源场**(field with sources). 通过任意封闭迴线的向量线的管形称为**向量管**(vector tube). 无源场的意义在于：不可压缩流体在任何流线管的任何截面的流量保持不变，或在任意封闭曲面的总流量为零. 相反，有源场不具有此特性，常表现为某一点或某些有限点处的散度不为零，表示流场中的源头的发散强度或漏洞的泄漏强度.

13.4 向量场的旋度及 Stokes 定理

定义 13.4.1 设 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$是 G 内 C^1 向量场，而 G 是 $\mathscr{E}^3$ 的开域，Γ 是 G 内任一条分段光滑的封闭曲线，取定 Γ 为某一定向，则称线积分$\oint_\Gamma \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为 向量场沿 Γ 的**环量**(circulation). 若过 G 内点 $M(\boldsymbol{x})$作一平面 Π，法线方向为 $\boldsymbol{n}$，且 Γ 的正向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手系如图 13.3，当 Γ 缩至 M 点时，若环量与 Γ 所围面积之比的极限存在，记作

$$h(\boldsymbol{x}) = \lim_{C\to M}\frac{\oint \boldsymbol{u}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{S}.$$

若 $h(\boldsymbol{x})$ 与 Γ 的选取无关，则称此极限 $h(\boldsymbol{x})$ 为向量场 u 在 M 点绕 n 方向的方向旋量(directional curl). 方向旋量与坐标选取无关.

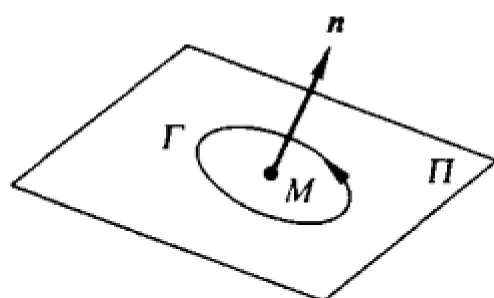


图 13.3

定义 13.4.2 设 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 是 G 内的向量场，$G\subset\mathscr{E}^3$，M 是 G 内一点，$\boldsymbol{u}$ 在 M 点绕 x_1, x_2, x_3 轴的方向旋量分别为 h_1, h_2, h_3，则称向量

$$\boldsymbol{h}=h_1\boldsymbol{e}_1+h_2\boldsymbol{e}_2+h_3\boldsymbol{e}_3$$

为**向量场 $\boldsymbol{u}$ 在 M 点的旋度**(curl)，记作 curl $\boldsymbol{u}$.

定理 13.4.3 设 $\boldsymbol{u}$ 是 G 内 C^1 向量场，$G\subset\mathscr{E}^3$，M 是 G 内一点，则有：

(1) $\boldsymbol{u}$ 在 M 点的旋度存在，且有以下表达式：

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{e}_3,$$

或

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x});$$

(2) $\boldsymbol{u}$ 在 M 点绕任一方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向旋量 h_n 存在，且有

$$h_n=\operatorname{curl}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}.$$

定理 13.4.4 Stokes 定理(Stokes theorem) 设 S 是 $\mathscr{E}^3$ 中

一光滑双侧曲面，S 的边界∂S 由有限条光滑闭曲线构成，又设 $\boldsymbol{u}$ 在 S 及∂S 上有连续偏导数，则有 Stokes 定理：

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \mathrm{curl}\, \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

或

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial S} u_1 \mathrm{d}x_1 + u_2 \mathrm{d}x_2 + u_3 \mathrm{d}x_3 \\
&= \iint_S \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_3 \mathrm{d}x_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Stokes 定理给出了环量与旋度的关系，也给出了单连通开域封闭曲线∂S 上的线积分与 S 上面积分的关系.

定理 13.4.5 设 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$满足 Stokes 定理有关条件，$V$ 是 $\mathscr{E}^3$ 的有界闭域，∂V 是一分块光滑的双侧闭曲面，则有以下积分定理：

$$\iiint_V \mathrm{curl}\, \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}V = \iint_{\partial V} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}S.$$

由上述定理可给定旋度的另一等价定义.

定理 13.4.6 设 G 是 $\mathscr{E}^3$ 的开域，向量场函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$在 G 内有定义，任取一分块光滑曲面 $S \subset G$，且 S 包含点 $M(\boldsymbol{x})$，其相应体积记作 V，当 V 缩为一点 $M(\boldsymbol{x})$时，若极限

$$\lim_{S \to M} \frac{\iint_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}S}{V}$$

存在，且与 S 的选择无关，则此极限等于 **M 点的旋度**.

旋度的上述不变性定义直接表明它与坐标选取无关，反映了向量场的另一内涵性质，其背景来自流体、电磁场中的涡流现象及性质.

定义 13.4.7 若定义于 $\mathscr{E}^3$ 内开域 G 内的 C^1 向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$在 G 内处处有 $\mathrm{curl}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$，则称此场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$为**无旋场**(irrotational field).

定理 13.4.8 无旋场必为势场,反之亦然.

13.5 线性微分算子

13.5.1 Hamilton 算子及 Laplace 算子

定理 13.5.1 推广的 Gauss 定理 若 L 为线性算子,即对任意向量函数 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 及常数 λ 有以下性质:

$$L(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=L(\boldsymbol{u})+L(\boldsymbol{v}),\qquad L(\lambda\boldsymbol{u})=\lambda L(\boldsymbol{u}),$$

并设 V 是 $\mathscr{E}^3$ 的有界闭域,∂V 是一分块光滑双侧曲面,则有

$$\iiint_V L(\nabla)\mathrm{d}V=\iint_{\partial V}L(\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为∂V 上任一点的单位法线向量,取外侧为正.

本定理概括了场论中一切有关体积分与面积分的转换关系的定理.当 $L(\nabla)=\nabla\varphi$, $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$, $\nabla\times\boldsymbol{u}$ 时就得到前述各节有关的积分定理 13.2.3,定理 13.3.5,定理 13.4.4.

由上述定理及积分中值定理可得到 $L(\nabla)$的表达式

$$L(\nabla)=\lim_{V\to M}\frac{\iint_S L(\boldsymbol{n})\mathrm{d}S}{V}.$$

令 $L(\nabla)=\nabla$,则得到 **Hamilton 算子**(Hamilton operator)的表达式

$$\nabla=\lim_{V\to M}\frac{\iint_S \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S}{V}.$$

令 $L(\nabla)=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$,则得到 Laplace 算子(Laplace operator)的表达式

$$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\lim_{V\to M}\frac{\iint_S \nabla\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{V}=\lim_{V\to M}\frac{\iint\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S}{V}.$$

应指出，$L(\nabla)$ 表达式概括了梯度、散度及旋度的不变性极限定义13.2.1，定义13.3.2，定理13.4.6，而∇ 及$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$的上述表达式同样表达了它们的不变性，即与坐标选取无关.

13.5.2 微分算子公式

(1) **微分公式**

① $\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi$,

② $\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi$,

③ $\operatorname{grad}\psi(\varphi)=\psi'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi$,

④ $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\operatorname{div}\boldsymbol{v}$,

⑤ $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{u})=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\operatorname{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{u}$,

⑥ $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$,

⑦ $\operatorname{curl}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\operatorname{curl}\boldsymbol{u}+\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$,

⑧ $\operatorname{curl}(\varphi\boldsymbol{u})=\varphi\operatorname{curl}\boldsymbol{u}+\operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{u}$,

⑨ $\operatorname{curl}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{u}$,

⑩ $\operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$,

⑪ $\operatorname{grad}\dfrac{u^2}{2}=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{u}$,

⑫ $\operatorname{div}(\operatorname{curl}\boldsymbol{u})\equiv 0$,

⑬ $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\varphi)\equiv\mathbf{0}$,

⑭ $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\nabla^2\boldsymbol{u}$,

⑮ $\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\psi)=\varphi\nabla^2\psi+\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi$,

⑯ $\nabla^2(\varphi\psi)=\psi\nabla^2\varphi+\varphi\nabla^2\psi+2(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)$.

(2) **含 $\boldsymbol{r}$ 及 $\boldsymbol{e}_r$ 的微分公式**　公式中 $\boldsymbol{r}$ 为位置向量，$\boldsymbol{e}_r$ 为沿 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位向量，即 $\boldsymbol{e}_r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$.

① $\nabla r=\boldsymbol{e}_r,\ \nabla\dfrac{1}{r}=-\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}=-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$,

② $\nabla f(r)=f'(r)\nabla r=f'(r)\boldsymbol{e}_r$,

③ $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$，$\operatorname{div}(r^n \boldsymbol{r}) = (n+3) r^n$，

④ $\operatorname{curl} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$，$\operatorname{curl}(r^n \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$，

⑤ $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \dfrac{2}{r} f'(r)$，

⑥ $\nabla^2 r^n = n(n+1) r^{n-2}$，

⑦ $(\boldsymbol{u} \cdot \operatorname{grad}) \boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}$，

⑧ $\nabla^2 f(r) = \nabla \cdot \left[f'(r) \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} \right] = \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} [r^2 f'(r)]$，

⑨ $\nabla (\boldsymbol{v} \cdot r) = (\nabla \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}$，

⑩ $\nabla \cdot \dfrac{1}{\boldsymbol{r}} = \dfrac{1}{r^2}, \nabla \times \dfrac{1}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$，

⑪ $\nabla \cdot \boldsymbol{e}_r = \dfrac{2}{r}, \nabla \times \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{0}$，

⑫ $\nabla \times (f(r) \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}, \nabla \cdot (f(r) \boldsymbol{r}) = 3 f(r) + r \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$，

⑬ $\nabla \times (f(r) \boldsymbol{e}_r) = \boldsymbol{0}, \nabla \cdot (f(r) \boldsymbol{e}_r) = 2 \dfrac{f}{r} + \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$，

⑭ $\operatorname{grad}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ 为常向量），

⑮ $\operatorname{div}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = 0$（$\boldsymbol{a}$ 为常向量），

⑯ $\operatorname{curl}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}) = -2\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ 为常向量），

⑰ $\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = \nabla (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v})$（$a$ 为常向量），

⑱ $\operatorname{div}(r \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ 为常向量），

⑲ $\operatorname{curl}(r \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ 为常向量），

⑳ $\operatorname{grad} \left(\dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_r}{r^2} \right) = \boldsymbol{a} \cdot \nabla \dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2} = \dfrac{\boldsymbol{a} - 3(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_r) \boldsymbol{e}_r}{r^3}$（$\boldsymbol{a}$ 为常向量），

㉑ $\operatorname{curl} \left(\dfrac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_r}{r^2} \right) = -\boldsymbol{a} \cdot \nabla \dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2} = \dfrac{3(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_r) \boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{a}}{r^3}$（$\boldsymbol{a}$ 为常向量），

㉒ 含 r 的微分公式表（$\boldsymbol{c}$ 为常向量）．

f	$\nabla\cdot f$	$\nabla\times f$	$(a\cdot\nabla)f$	$\nabla^2 f$
r	3	$\mathbf{0}$	a	$\mathbf{0}$
$c\times r$	$\mathbf{0}$	$2c$	$c\times a$	$\mathbf{0}$
$c r^n$	$n r^{n-2}(r\cdot c)$	$n r^{n-2}(r\times c)$	$n r^{n-2}(r\cdot a)c$	$n(n+1)r^{n-2}c$
$r^n r$	$(n+3)r^n$	$\mathbf{0}$	$r^n a+n r^{n-2}(r\cdot a)r$	$n(n+3)r^{n-2}r$
$c\ln r$	$c\cdot r/r^2$	$r\times c/r^2$	$(a\cdot r)c/r^2$	c/r^2

(3) **含 $\boldsymbol{\omega}$ 及 $\boldsymbol{\Omega}$ 的微分公式**　在下列公式中，$\boldsymbol{\Omega}$ 为常角速度，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$；$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$ 为旋度向量.

① $\nabla\times\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\Omega}$，$\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=-2\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$，

② $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})=-\dfrac{1}{2}\text{grad}\,|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2$，

③ $\boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\,\boldsymbol{v}=-\dfrac{1}{2}\text{grad}\,|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2$，

④ $\boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\,\boldsymbol{v}=\dfrac{1}{2}\text{grad}\,\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$，

⑤ $\text{curl}\,(\boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\,\boldsymbol{v})=-\text{curl}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})$，

⑥ $\text{curl}\,(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})=(\boldsymbol{\omega}-\nabla)\boldsymbol{v}-(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\omega}+(\nabla\cdot\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{v}$
$-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}$，

⑦ 若$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=0$，$\text{curl}\,\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\omega}$，

⑧ 若$\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}=0$，且$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)+\text{curl}\,\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$.

(4) **积分公式**

① $\int_V \text{grad}\,\varphi\,\mathrm{dV}=\int_{\partial V}\boldsymbol{n}\,\varphi\mathrm{dS}$，

② $\int_V \text{div}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{dV}=\int_{\partial V}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{dS}$，

③ $\int_V \text{curl}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{dV}=\int_{\partial V}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}\,\mathrm{dS}$，

④ $\int_V (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\,\mathrm{dV}=\int_{\partial V}(\boldsymbol{v}\cdot n)\boldsymbol{u}\,\mathrm{dS}$，

⑤ $\int_V \nabla^2\varphi\,\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\int_{\partial V}\boldsymbol{n}\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}S$,

⑥ $\int_V \nabla^2\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\int_{\partial V}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S$,

⑦ Green 第一公式

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi+\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\mathrm{d}S,$$

⑧ Green 第二公式

$$\int_V(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

⑨ $\int_V(\operatorname{grad}\varphi)^2\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S$,其中 φ 满足 $\nabla^2\varphi=0$,

⑩ $\int_V[(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\operatorname{div}\boldsymbol{v}]\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}\cdot n)\mathrm{d}S$.

13.6 曲线坐标中的向量分析

为了张量分析的需要,本节所述基本理论不限于 $\mathscr{E}^3$,相反可适用于任意 $\mathscr{E}^n$ 中的分析.

13.6.1 曲线坐标系

定义 13.6.1 设用 $\{x^s\}$ 表示 $\mathscr{E}^n$ 中的仿射坐标(见定义 6.1.4),若有

$$q^i=q^i(x^s)=q^i(x^1,x^2,\cdots,x^n),\qquad i=1,2,\cdots,n \quad (13.1)$$

是在某连通区域 $G\subset\mathscr{E}^n$ 内的单值可逆光滑函数,即在 G 内存在反函数

$$x^s=x^s(q^i)=x^s(q^1,q^2,\cdots,q^n),\qquad s=1,2,\cdots,n,\quad (13.2)$$

并且也是单值光滑的,于是在 G 内有

$$\det\left[\frac{\partial q^i}{\partial x^s}\right]\neq 0,\qquad \det\left[\frac{\partial x^s}{\partial q^i}\right]\neq 0.$$

若式(13.1)不退化为线性变换,即**仿射变换**(affine trans-formation),则$\{q^i\}$称为定义于G内的**曲线坐标系**(curvilinear coordinate system).

若给定q^i一系列常数,则得到$\mathscr{E}^n$中一$q^i(x_1,\cdots,x_n)=\text{const}$的超曲面,称为$q^i$ **坐标面**(coordinate surface). $\mathscr{E}^n$中任一点均存在n个坐标面,它们之间的交线称为**坐标线**(coordinate curve).沿每条坐标线q^i上,只有q^i变化,其余曲线坐标不变(见图 13.4).

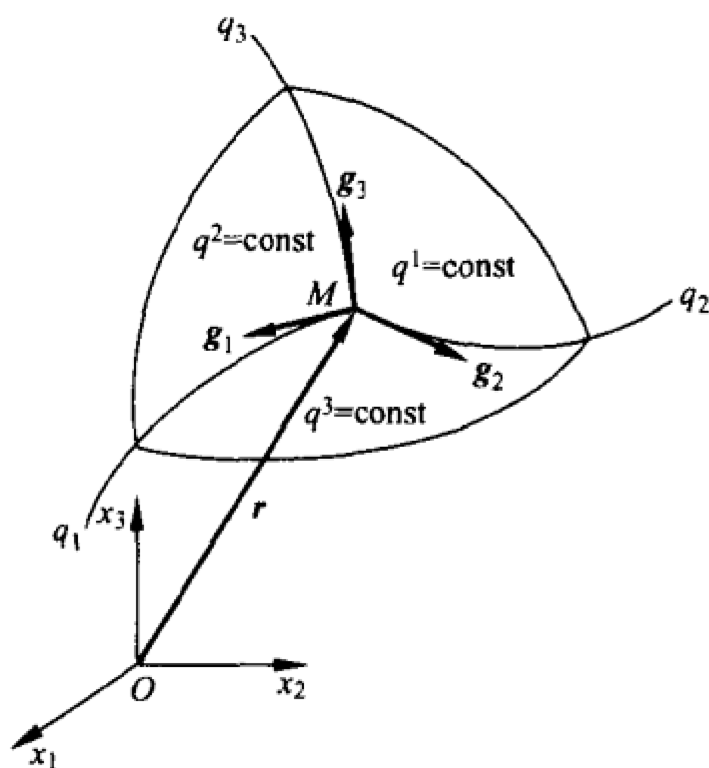


图 13.4

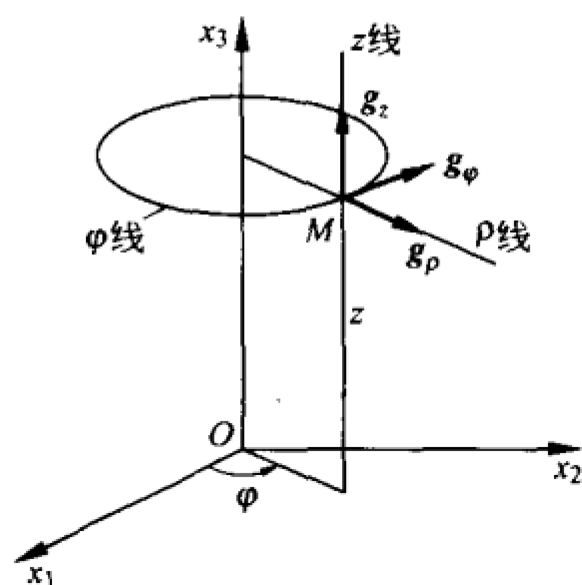


图 13.5

例 13.6.2 柱坐标(cylindrical coordinates)(如图 13.5)

$$\begin{cases}x_1=\rho\cos\varphi,\\x_2=\rho\sin\varphi,\\x_3=z,\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x_1^2+x_2^2},\\\varphi=\arctan\dfrac{x_2}{x_1},\\z=x_3,\end{cases}$$

$0\leqslant \rho<\infty,\quad 0\leqslant \varphi\leqslant 2\pi,\quad -\infty<z<\infty.$

例 13.6.3　球坐标(spherical coordinates)(如图 13.6)

$$\begin{cases}x_1=r\sin\theta\cos\varphi,\\ x_2=r\sin\theta\sin\varphi,\\ x_3=r\cos\theta,\end{cases}$$

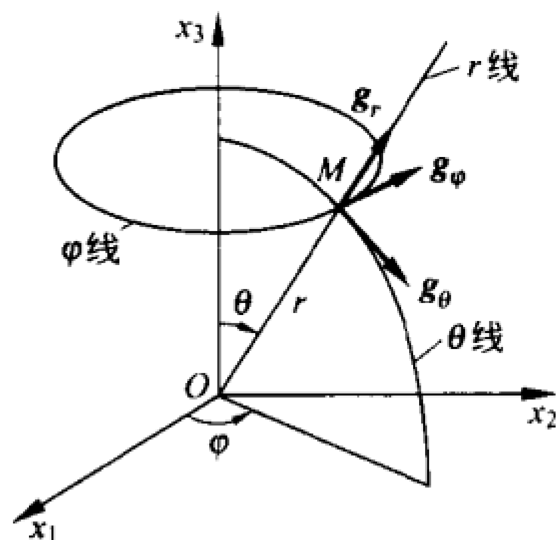


图　13.6

其中

$$\begin{cases}r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\\ \varphi=\arctan x_2/x_1,\\ \theta=\arctan\sqrt{x_1^2+x_2^2}/x_3,\end{cases}$$

$0\leqslant r<\infty,\quad 0\leqslant \varphi\leqslant 2\pi,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$

13.6.2　曲线坐标系中的基向量及度量张量

本卷规定:在论述与曲线坐标系有关的问题时,基向量仍用 $\boldsymbol{g}_i$ 表示,而此时仿射坐标系中的基向量则改用 $\bar{\boldsymbol{g}}_i$ 表示,以示区别.

定义 13.6.4　将(13.2)式写成向量形式,则有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(q^1,\cdots,q^n).$$

导数 $\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q^i}$ 是一个 n 维向量,此向量沿 M 点 q^i 线的切线方向,指向 q^i 的增值方向(见图 13.4 至图 13.6),并记作 $\boldsymbol{g}_i$:

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q^i},\qquad i=1,\cdots,n.$$

$\boldsymbol{g}_i$ 定义为**曲线坐标系中的协变基向量**. $\boldsymbol{g}_i$ 与仿射坐标系中的协变基向量 $\bar{\boldsymbol{g}}_s$ 之间有如下的转换关系:

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial q^i}=\beta_i^s\bar{\boldsymbol{g}}_s,\qquad \bar{\boldsymbol{g}}_s=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial x^s}=\beta_s^i\boldsymbol{g}_i,$$

其中:$\beta_i^s=\frac{\partial x^s}{\partial q^i}$,$\beta_s^i=\frac{\partial q^i}{\partial x^s}$ 为**基向量的转换系数**. $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 构成了 $\mathscr{E}^n$ 内 M

点的局部标架，其特征在于 $\boldsymbol{g}_i$ 的长度及方向因 M 点的位置而变.

定义 13.6.5 $\mathscr{E}^n$ 中弧长微分平方定义为

$$ds^2 = d\boldsymbol{x} \cdot d\boldsymbol{x} = g_{ij} dq^i dq^j,$$

其中 $g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j$ 称为**曲线坐标中的度量张量的协变分量**. 正定对称矩阵(g_{ij})称为**曲线坐标中的度量矩阵**，其行列式 $\det(g_{ij}) = g > 0$. 以上关于基和度量的定义不过是仿射坐标系中有关定义的推广.

定义 13.6.6 满足以下条件

$$g_i^j = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

的线性无关向量组$\{\boldsymbol{g}^i\}$称为$\{\boldsymbol{g}_i\}$的**逆变基**，逆变基中的基向量 $\boldsymbol{g}^i$ 称为**逆变基向量**. $g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j$ 称为**曲线坐标中度量张量的逆变分量**.

定理 13.6.7 在协变基与逆变基之间存在以下 3 类转换关系：

(1) (g_{ij})与(g^{ij})互为逆矩阵，即$(g_{ij}) = (g^{ij})^{-1}$.

(2) $\boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^j$，$\boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j$.

(3) 若向量 $\boldsymbol{u}$ 在两种基中的分解式为 $\boldsymbol{u} = u^i\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{u} = u_i\boldsymbol{g}^i$，其中 u_i 及 u^i 分别称为向量 u 的协变分量及逆变分量，则 u^i 与 u_i 之间有以下转换关系：$u_i = g_{ij}u^j$，$u^i = g^{ij}u_j$.

定义 13.6.8 若对于任意指标 i 及 $j(i \neq j)$满足以下条件：

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = 0, \qquad g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j = 0.$$

则称坐标系为**正交曲线坐标系**(orthogonal curvilinear coordinate system). 这时(g_{ij})或(g^{ij})皆退化为对角阵(g_{ii})或(g^{ii}).

定义 13.6.9 记

$$h_i = \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial q_i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^i}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial x^n}{\partial q^i}\right)^2} = \sqrt{g_{ii}},$$

称为 **Lamé(拉梅)参数**(Lamé parameter). 定义正交曲线坐标系中的**单位基向量**为

$$e^i = e_i = \frac{g_i}{|g_i|} = \frac{g_i}{h_i} = h_i g^i \qquad \text{(不按指标求和)}.$$

任意向量 $\boldsymbol{u}$ 在正交单位基向量 $\{e_i\}$ 上的分解可表示为

$$\boldsymbol{u} = \sum_i \hat{u}_i e^i = \hat{u}_i h_i g^i = \frac{\hat{u}_i}{h_i} g_i.$$

$\hat{u}_i$ 称为 $\boldsymbol{u}$ 的**物理分量**(physical component).

物理分量与协变分量及逆变分量之间的关系如下：

$$\hat{u}_i = h_i u^i, \qquad u_i = \frac{\hat{u}_i}{h_i}.$$

13.6.3 基向量的导数及 Christoffel 符号

定义 13.6.10 **第二类 Christoffel**(克里斯托费尔)**符号**(Christoffel's symbol of the second kind)定义为

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial g_i}{\partial q^j} \cdot g^k = g_{i,j} \cdot g^k = \frac{\partial^2 x^s}{\partial q^i \partial q^j} \cdot \frac{\partial q^k}{\partial x^s},$$

其中记$(\quad)_{,i} = \frac{\partial(\quad)}{\partial q^i}$.

定义 13.6.11 **第一类 Christoffel 符号**(Christoffel's symbol of the first kind)定义为

$$\Gamma_{ijk} = g_{i,j} \cdot g_k = \frac{\partial x^s}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial^2 x^s}{\partial q^i \partial q^j}.$$

定理 13.6.12 Christoffel 符号有下列性质：

(1) $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kr} [g_{jr,i} + g_{ir,j} - g_{ij,r}]$, $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} [g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}]$.

(2) 对指标的对称性

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \qquad \Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}.$$

(3) 指标升降法则

$$\Gamma_{ijk} = g_{kl} \Gamma_{ij}^l, \qquad \Gamma_{ij}^l = g^{kl} \Gamma_{ijk}.$$

(4) $\Gamma^k_{ik}=(\ln\sqrt{g})_{,i}$，其中 $g=\det(g_{ij})$.

定理 13.6.13 任意曲线坐标系中的基向量求导公式可表示为

$$\boldsymbol{g}_{j,i}=\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k,\qquad \boldsymbol{g}^i_{,j}=-\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{g}^k,$$
$$\boldsymbol{g}_{j,i}=\Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k,\qquad \boldsymbol{g}^i_{,j}=-g^{kr}\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{g}_r.$$

定理 13.6.14 若 $\boldsymbol{u}(x)$ 为 $\mathscr{V}$ 中的向量场，记 $\boldsymbol{u}_{,i}=\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial q^i}$，则有以下向量场求导公式：

$$\boldsymbol{u}_{,j}=(u^i_{,j}+u^k\Gamma^i_{jk})\boldsymbol{g}_i=\nabla_j u^i\boldsymbol{g}_i,$$
$$\boldsymbol{u}_{,j}=(u_{i,j}-u_k\Gamma^k_{ij})\boldsymbol{g}^i=\nabla_j u_i\boldsymbol{g}^i,$$

其中记

$$\nabla_j u^i=u^i_{,j}+u^k\Gamma^i_{jk},\qquad \nabla_j u_i=u_{i,j}-u_k\Gamma^k_{ij}.$$

$\nabla_j u^i$ 及 $\nabla_j u_i$ 称为 u^i 及 u_i 的**绝对导数**(absolute derivative)或**协变导数**(covariant derivative). 协变导数与普通偏导数的差别是由于曲线坐标中基向量随空间的点而不断改变长度及方向. 在仿射坐标系中不存在这种差别.

定理 13.6.15 在正交曲线坐标系中有以下关于向量导数及 Christoffel 符号的常用公式：

(1) 单位向量求导公式

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$
$\dfrac{\partial}{\partial q^1}$	$-\left[\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial h_1}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_2+\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial h_1}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_3\right]$	$\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial h_1}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_1$	$\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial h_1}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_1$
$\dfrac{\partial}{\partial q^2}$	$\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial h_2}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_2$	$-\left[\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial h_2}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_3+\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial h_2}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_1\right]$	$\dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial h_2}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_2$
$\dfrac{\partial}{\partial q^3}$	$\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial h_3}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_3$	$\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial h_3}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_3$	$-\left[\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial h_3}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial h_3}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_2\right]$

表中 h_i 为 Lamé 参数，$\boldsymbol{e}_i$ 为正交曲线坐标中的单位基向量.

(2) 单位基向量导数的特殊性质：

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q^k}\cdot \boldsymbol{e}_i=0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q^i}\cdot \boldsymbol{e}_i=0,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q^j}\cdot \boldsymbol{e}_j=\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial q^i},\quad \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial q^i}\cdot \boldsymbol{e}_j=-\frac{1}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q^j}.\qquad i,j \text{ 非求和指标.}$$

(3) 第二类 Christoffel 符号的特殊性质：

三指标不同时：$\Gamma^k_{ij}=0\ \ (i\neq j,\ j\neq k,\ k\neq i)$；

二指标相同时：$\Gamma^i_{ij}=\dfrac{1}{2h_i^2}\dfrac{\partial h_i^2}{\partial q^j}$，$\Gamma^j_{ii}=\dfrac{1}{2h_j^2}\dfrac{\partial h_j^2}{\partial q^i}$，$\Gamma^k_{ii}=-\dfrac{1}{2h_k^2}\dfrac{\partial h_i^2}{\partial q^k}$；

三指标全同时：$\Gamma^i_{ii}=\dfrac{1}{2h_i^2}\dfrac{\partial h_i^2}{\partial q^i}$ (i,j,k 非求和指标).

(4) $\boldsymbol{e}_{j,i}$ 及 Γ^k_{ij} 的一般表达式

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_j}{\partial q^i}=\left[\frac{\delta_{ik}}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial q^j}-\frac{\delta_{ij}}{h_k}\frac{\partial h_j}{\partial q^k}\right]\boldsymbol{e}_k\quad (i,j \text{ 非求和指标}),$$

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\delta_{jk}}{h_j^2}\frac{\partial h_j^2}{\partial q^i}+\frac{\delta_{ik}}{h_i^2}\frac{\partial h_i^2}{\partial q^j}-\frac{\delta_{ij}}{h_k}\frac{\partial h_i^2}{\partial q^k}\right]\quad (i,j,k \text{ 非求和指标}).$$

13.7 曲线坐标系中的微分算子

13.7.1 任意曲线坐标系中的微分算子

$$\nabla=\boldsymbol{g}^i\frac{\partial}{\partial q^i},$$

$$\text{grad}\ \varphi=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial q^i}\boldsymbol{g}^i,$$

$$\text{div}\ \boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial u^i}{\partial q^i}+u^i\Gamma^j_{ij}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}(\sqrt{g}\,u^i)\quad (g=h_1^2h_2^2h_3^2),$$

$$\text{curl}\ \boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3}\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}=\varepsilon^{ijk}u_{k,j}\boldsymbol{g}_i,$$

其中 ε^{ijk} 为 Eddington 张量(见定义 6.2.5),

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial q^j}\right).$$

13.7.2 正交曲线坐标系中的微分算子

取单位基向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$,任意向量 $\boldsymbol{u}$ 在 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 上的分解式为

$$\boldsymbol{u}=\hat{u}_1\boldsymbol{e}_1+\hat{u}_2\boldsymbol{e}_2+\hat{u}_3\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{u}_3$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的物理分量,则有

$$\nabla=\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{e}_i\frac{\partial}{h_i\partial q^i},$$

$$\text{grad}\,\varphi=\nabla\varphi=\sum_{i=1}^{3}\frac{\boldsymbol{e}_i}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q^i},$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{u}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(h_2h_3\hat{u}_1)+\frac{\partial}{\partial q^2}(h_1h_3\hat{u}_2)+\frac{\partial}{\partial q^3}(h_1h_2\hat{u}_3)\right],$$

$$\text{curl}\,\boldsymbol{u}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix}h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q^1} & \dfrac{\partial}{\partial q^2} & \dfrac{\partial}{\partial q^3}\\ h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3\end{vmatrix},$$

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\right)+\frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q^2}\right)+\frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q^3}\right)\right].$$

13.7.3 柱坐标中的微分算子

如图 13.7 所示,有

$$\begin{cases}x_1=\rho\cos\varphi,\\ x_2=\rho\sin\varphi,\\ x_3=z,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}_1=\cos\varphi\,\bar{\boldsymbol{e}}_1+\sin\varphi\,\bar{\boldsymbol{e}}_2,\\ \boldsymbol{g}_2=\rho(-\sin\varphi\,\bar{\boldsymbol{e}}_1+\cos\varphi\,\bar{\boldsymbol{e}}_2),\\ \boldsymbol{g}_3=\bar{\boldsymbol{e}}_3,\end{cases}\qquad\begin{cases}h_1^2=g_{11}=1,\\ h_2^2=g_{22}=\rho^2,\\ h_3^2=g_{33}=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial \rho}=\boldsymbol{0}, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial \varphi}=\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{g}_2, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial z}=\boldsymbol{0},\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{g}_2, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial \varphi}=-\rho\,\boldsymbol{g}_1, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial z}=\boldsymbol{0},\\ \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial \rho}=\boldsymbol{0}, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial \varphi}=\boldsymbol{0}, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial z}=\boldsymbol{0}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\dfrac{1}{\rho}, & \Gamma_{22}^{1}=-\rho,\\ \Gamma_{122}=\Gamma_{212}=\rho, & \Gamma_{221}=-\rho, \quad \text{其余为零}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=\cos\varphi\,\bar{\boldsymbol{e}}_1+\sin\varphi\,\bar{\boldsymbol{e}}_2,\\ \boldsymbol{e}_2=-\sin\varphi\,\bar{\boldsymbol{e}}_1+\cos\varphi\,\bar{\boldsymbol{e}}_2,\\ \boldsymbol{e}_3=\bar{\boldsymbol{e}}_3.\end{cases}$$

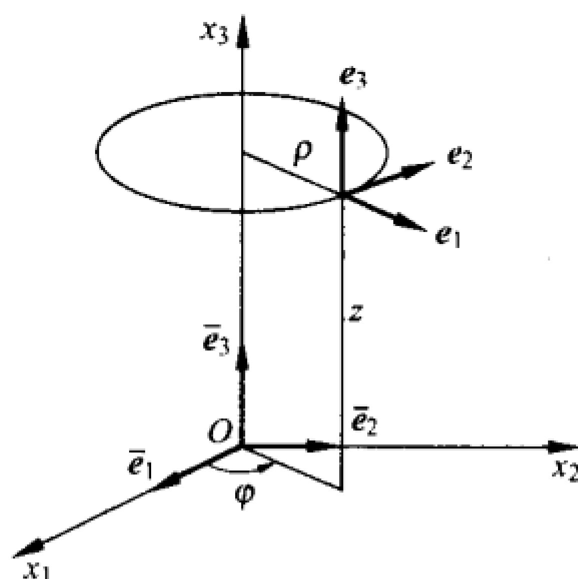


图 13.7

向量 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 及 $\boldsymbol{e}_3$ 上的物理分量为 $\hat{u}_\rho,\hat{u}_\varphi,\hat{u}_z$.

$$\operatorname{grad}\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho},\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\,\hat{u}\;\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\hat{u}_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{u}_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial\hat{u}_\varphi}{\partial z},\quad \frac{\partial\hat{u}_\rho}{\partial z}-\frac{\partial\hat{u}_z}{\partial\rho},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\,\hat{u}_\varphi)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\hat{u}_\rho}{\partial\varphi}\right),$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

13.7.4 球坐标中的微分算子

如图 13.8 所示，有

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \\ x_3 = r\cos\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_1 = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \\ \boldsymbol{g}_2 = (r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi, -r\sin\theta), \\ \boldsymbol{g}_3 = (-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi, 0). \end{cases}$$

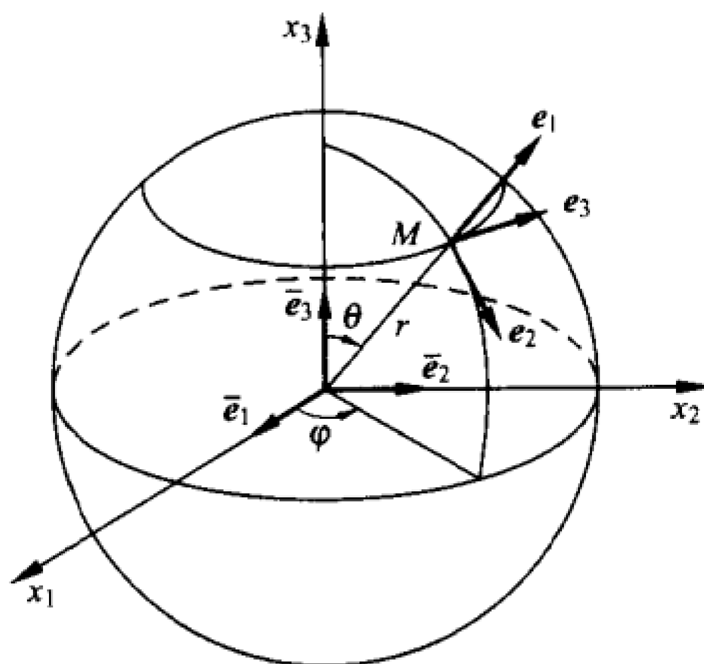


图 13.8

$$h_1^2 = g_{11} = 1, \quad h_2^2 = g_{22} = r^2, \quad h_3^2 = g_{33} = r^2\sin^2\theta.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial r} = \boldsymbol{0}, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r}\boldsymbol{g}_2, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_1}{\partial \varphi} = \dfrac{1}{r}\boldsymbol{g}_3, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\boldsymbol{g}_2, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial \theta} = -r\boldsymbol{g}_1, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_2}{\partial \varphi} = \cot\theta\,\boldsymbol{g}_3, \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\boldsymbol{g}_3, & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial \theta} = \cot\theta\,\boldsymbol{g}_3, & \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{g}_3}{\partial \varphi} = (-r\sin\theta\cos\varphi, -r\sin\theta\sin\varphi, 0). & & \end{cases}$$

$$\begin{cases}\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\dfrac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}=\dfrac{1}{r},\\ \Gamma^1_{22}=-r,\ \Gamma^3_{23}=\cot\theta,\ \Gamma^1_{33}=-r\sin^2\theta,\ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\\ \Gamma_{122}=\Gamma_{212}=r,\ \Gamma_{133}=\Gamma_{313}=r\sin^2\theta,\\ \Gamma_{221}=-r,\ \Gamma_{233}=\Gamma_{323}=r^2\sin\theta\cos\theta,\\ \Gamma_{331}=-r\sin^2\theta,\ \Gamma_{332}=-r^2\sin\theta\cos\theta, \qquad \text{其余为零.}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta),\\ \boldsymbol{e}_2=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,-\sin\theta),\\ \boldsymbol{e}_3=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0).\end{cases}$$

向量 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 及 $\boldsymbol{e}_3$ 上的物理分量为 $\hat{u}_r,\hat{u}_\theta$ 及 $\hat{u}_\varphi$.

$$\operatorname{grad}\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right),$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\hat{u}_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,\hat{u}_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\hat{u}_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\left(\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\hat{u}_\varphi\sin\theta)-\frac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial\varphi}\right),\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{u}_\varphi),\right.$$
$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\hat{u}_\theta-\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial\theta}\right)\right),$$

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$

13.8 由旋度及散度确定的向量场

由旋度 curl $\boldsymbol{u}$ 及散度 div $\boldsymbol{u}$ 确定的向量场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 可分为 4 种基本类型,各有典型实例.

13.8.1 无旋场(层状场)

无旋场或层状场(lamellar field)是指满足以下条件的场:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\rho(\boldsymbol{x})\neq 0, \qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}.$$

实例:有源头的无旋流动场,有电荷分布的静电场,有热源分布的定常热传导场.

定理 13.8.1 层状场 $\boldsymbol{u}$ 有以下 3 个等值定义:

(1) $\operatorname{curl} \boldsymbol{u}=\mathbf{0}$.

(2) $\oint_C \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ (C 为任意封闭曲线).

(3) $\boldsymbol{u}=\nabla\varphi$ (φ 为标量势函数).

定理 13.8.2 层状场有以下性质(见图 13.9):

(1) 场中任一点的向量线恒与该点的等位面($\varphi(\boldsymbol{x})=$常数之面)正交.

(2) 两相邻等位面间 $u\mathrm{d}r=$常数,即 $\boldsymbol{u}$ 的值与层的间隔成反比.

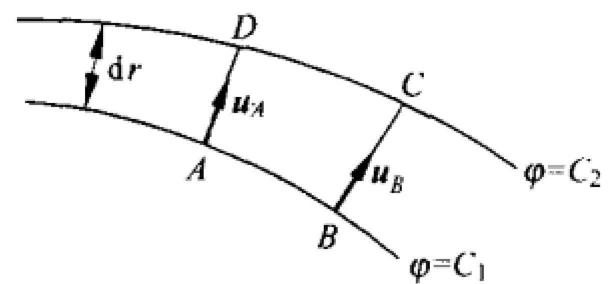


图 13.9

定理 13.8.3 若函数 $\rho(\boldsymbol{x})$满足:(1)$\rho(\boldsymbol{x})$为 C^1 函数;(2)当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$时,存在有限值 A 及 $0<\lambda<1$,使$|\,\|\boldsymbol{x}\|^{2+\lambda}\rho|<A$. 则 Poisson 方程$\nabla^2\varphi=\rho(\boldsymbol{x})$在无限空间内的基本解为 $\varphi(\boldsymbol{x})=-\int_{V\infty}\dfrac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{4\pi r}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi})$,其中 $\boldsymbol{\xi}=(\xi,\eta,\zeta)$,$r=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$,$V_\infty$ 是包括无限远空间的积分域.

定理 13.8.4 若 $\rho(\boldsymbol{x})$满足定理 13.8.3 中的条件,层状场方程 $\operatorname{div} \boldsymbol{u}=\rho(\boldsymbol{x})$, $\operatorname{curl} \boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ 在无限空间内的积分为

$$\boldsymbol{u}=-\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int_{V\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{r}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{4\pi}\int_{V\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{r^3}\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi}).$$

13.8.2 无源场(管状场)

无源场或管状场(solenoidal field)是指满足以下条件的场:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}=0,\qquad \operatorname{curl} \boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}\neq\mathbf{0}.$$

实例：无源头有旋涡分布的流动场，电流通过引起导体内的静磁场.

定理 13.8.5 管状场 $\boldsymbol{u}$ 有以下 3 个等值定义：

(1) $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0$；

(2) $\oint_S \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S}=0$（$S$ 为任意封闭曲面）；

(3) $\boldsymbol{u}=\operatorname{curl}\boldsymbol{\psi}$（$\boldsymbol{\psi}$ 为向量势函数）.

定理 13.8.6 管状场有以下性质：

(1) 任一向量线围成之管状面称为向量管或流管(stream tube). 流管中任何截面上的通量保持不变(见图 13.10)：

$$Q=\int_{S_1}\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{S_2}\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{S}=\text{const.}$$

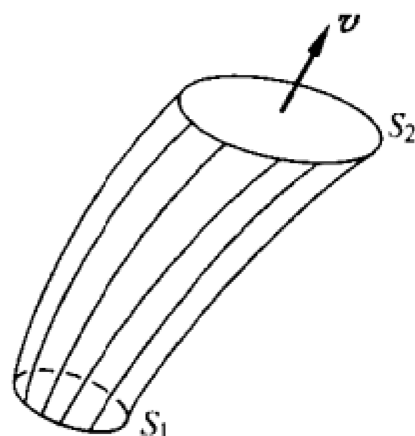


图 13.10

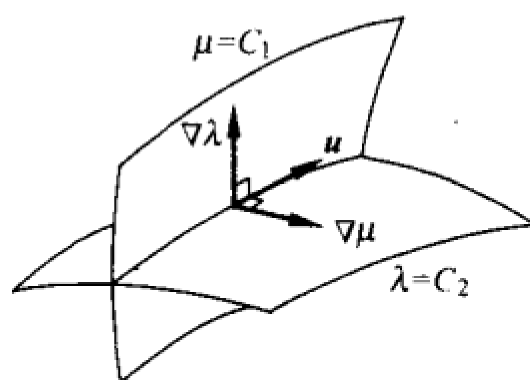


图 13.11

(2) 向量势函数 $\boldsymbol{\psi}$ 可表为 $\boldsymbol{\psi}=\mu\nabla\lambda$，于是 $\boldsymbol{u}=\operatorname{curl}(\mu\nabla\lambda)=\nabla\mu\times\nabla\lambda$，其中 $\mu(\boldsymbol{x})=C_1$，$\lambda(\boldsymbol{x})=C_2$ 表示二组曲面群，称为流面(stream surface)，$\boldsymbol{u}$ 则沿二组流面群的交线的切线方向(见图 13.11).

(3) 对于任何物理量 $\boldsymbol{\Psi}$(向量或张量)有以下关系：

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{\psi})=\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}\quad 或\quad \int_{\partial V}u_n\boldsymbol{\psi}dS=\int_V\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{\psi}dV,$$

其中 $\otimes$ 为张量积(见定义 14.2.8).

(4) 对于向量 $\boldsymbol{u}$，有 Poisson 恒等式：

$$\int_{\partial V}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}u^2\mathrm{d}\boldsymbol{S}\right)=\int_V \mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V.$$

(5) 对于任何向量 $\boldsymbol{u}$,有 Lamb-Thomson 恒等式:

$$\frac{1}{2}\int_V u^2\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\left(\frac{1}{2}u^2\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}\right)+\int_V \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V.$$

推论 13.8.7 管状场中的向量管不可能在场内发端或终止,只有以下 3 种可能:

(1) 向量管为封闭管.

(2) 向量管的端点位于场的边界上.

(3) 延伸至无限远(在无界场情况).

定理 13.8.8 若向量函数 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$满足定理 13.8.3 中 $\rho(\boldsymbol{x})$应满足的条件,则向量形式的 Poisson 方程$\nabla^2\boldsymbol{\psi}=-\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$在无限空间内的基本解为 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})}{r}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi})$,其中 $\boldsymbol{\xi}$,r 及 V_∞ 的定义见定理 13.8.3.

定理 13.8.9 若向量函数 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$满足:(1)div $\boldsymbol{\omega}=0$;(2)除有限个面上以外,$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$为 C^1 函数;(3)在这些有限面上,$\boldsymbol{\omega}$ 的法线分量 ω_n 连续,仅其切线分量 ω_t 可以不连续;(4)当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$时,$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$满足定理 13.8.3 中 $\rho(\boldsymbol{x})$应满足的条件. 则管状场方程 div $\boldsymbol{u}=0$, curl $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$在 div $\boldsymbol{\psi}=0$ 条件下,在无限空间中的积分为:$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=$curl $\boldsymbol{\psi}$,或

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\mathrm{curl}\int_{V_\infty}\frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})}{r}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi}),$$

其中 $\boldsymbol{\psi}$ 为定理 13.8.8 中向量形式 Poisson 方程的基本解.

注 条件 div $\boldsymbol{\psi}=0$ 并不影响解的普遍性. 若有一向量 $\boldsymbol{\psi}_1(\boldsymbol{x})$使 $\boldsymbol{u}=$curl $\boldsymbol{\psi}_1$ 但 div $\boldsymbol{\psi}_1\neq0$,则可令 $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}_1+$grad ϕ_2,适当选取 ϕ_2 可使 $\boldsymbol{u}=$curl $\boldsymbol{\psi}$ 及 div $\boldsymbol{\psi}=0$ 都得到满足.

13.8.3 Laplace 场

Laplace 场是指满足以下条件的场:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}=0, \qquad \operatorname{curl} \boldsymbol{u}=\mathbf{0}.$$

实例:不可压缩流体的无旋运动,无电荷的静电场,电流流动引起导体外侧的定常磁场,平衡状态的热传导场,万有引力场等.若取 $\boldsymbol{u}=\operatorname{grad} \varphi$,则 Laplace 场方程等价于 Laplace 方程:$\nabla^2\varphi=0$.满足 Laplace 方程的 C^2 函数称为调和函数(harmonic function).

定理 13.8.10 调和函数有以下基本性质:

(1) 在 V 内的调和函数 φ 可用边界 ∂V 上函数值及法向导数表示为

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial V}\left[\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]\mathrm{d}S.$$

(2) 在 V 内的调和函数 φ 在边界 ∂V 上的法向导数满足以下条件:

$$\int_{\partial V}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S=0.$$

(3) 任意两个在 V 内的调和函数 φ 及 ψ 在边界 ∂V 上满足以下积分关系:

$$\int_{\partial V}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S=\int_{\partial V}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

(4) 若 V 内的调和函数 φ 在边界 ∂V 上处处有 $\varphi=c=\text{const}$,则在 V 内每一点有 $\varphi=c$.

(5) 若 φ 在 V 的边界 ∂V 上有定值,则 Laplace 方程 $\nabla^2\varphi=0$ 在 V 内有惟一解.

(6) 若 φ 是 V 内的调和函数且在边界 ∂V 上处处有 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$,则在 V 内每一点有 $V=\text{const}$.

(7) 若 φ_1 及 φ_2 为 Laplace 方程在 V 内的两个解,且它们在边界 ∂V 上的法向导数取相同值,则 φ_1 与 φ_2 仅差一常数.

定义 13.8.11 **Neumann 问题**(Neumann problem) 是求一向量函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$,使在 V 内满足 Laplace 场方程:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u}=0, \qquad \operatorname{curl} \boldsymbol{u}=\mathbf{0},$$

且在边界∂V上满足条件

$$u_n=f(\boldsymbol{x}), \qquad 在\partial V上.$$

注 此问题等价于$\boldsymbol{u}=\operatorname{grad} \varphi$,而$\varphi$在$V$内满足Laplace方程:$\nabla^2\varphi=0$,在边界$\partial V$上满足$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=f(\boldsymbol{x})$.

定义 13.8.12 Neumann 问题的 Green 函数(Green function) 定义为

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})+\frac{1}{r},$$

其中:(1) $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$,$\boldsymbol{\xi}=(\xi,\eta,\zeta)$; (2) $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$在$V$内是点$\boldsymbol{\xi}$的调和函数; (3) $r=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\|$;(4)$H$在$\partial V$上的法向导数为常数.

定理 13.8.13 Neumann问题的解可表为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int_{\partial V}H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})f(\xi)\mathrm{d}S(\boldsymbol{\xi}),$$

其中$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$为Green函数,$f(\xi)$为在$\partial V$上的$u_n$.

13.8.4 一般场

一般场:$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\rho(\boldsymbol{x})$, $\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$.

实例:可压缩性粘性流体的流动,一般电磁场,弹性体内的应力场等.

定理 13.8.14 若V可分解为有限个分区,每个分区内函数$\rho(\boldsymbol{x})$及$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$均为$C^1$函数;又若函数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$在$V$内处处连续,其导数仅在有限个面上不连续,则一般场方程

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\rho(\boldsymbol{x}), \qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}).$$

对于给定边界条件

$$u_n=f(\boldsymbol{x}),$$

在∂V上有惟一解.

定理 13.8.15 若一般场方程$\operatorname{div}=\rho(\boldsymbol{x})$,$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$在给

定边界条件 $u_n=f(\boldsymbol{x})$下存在解，则 $\rho(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$及 $f(\boldsymbol{x})$需满足以下条件：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=0,\qquad \int_V \rho \mathrm{d}V=\int_{\partial V} f\mathrm{d}S.$$

定理 13.8.16 若 $\rho(\boldsymbol{x})$及 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$满足定理 13.8.14 所规定的条件，且 $\rho(\boldsymbol{x})$及 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$在无限空间中各点均适合不等式

$$|\rho\|\boldsymbol{x}\|^{2+\lambda}|<K,\qquad |\boldsymbol{\omega}\|\boldsymbol{x}\|^{2+\lambda}|<K,$$

其中 $0<\lambda<1$，K 为有限数，则在无限空间中一般场方程 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\rho(\boldsymbol{x})$，$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$有惟一解如下：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{curl}\boldsymbol{\psi},$$

其中

$$\varphi(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{r}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})}{r}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi}).$$

由此可知，在无限空间中的任意向量场可分解为层状场及管状场之和(Helmholtz(亥姆霍兹)分解法).

解 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{curl}\boldsymbol{\psi}$ 的最终形式为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty}\frac{\rho(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi}).$$

定理 13.8.17 若除有限个面外，函数 $\rho(\boldsymbol{x})$及 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$在 V 内为 C^1 函数，则一般场问题

$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\rho(\boldsymbol{x})$，　$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$，　　在 V 内，

$u_n=f(\boldsymbol{x})$，　　　　　　　　　　在∂V 上满足条件

$$\int_{\partial V} f\mathrm{d}S=\int_V \rho\mathrm{d}V,\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\omega}=0$$

下的解为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{curl}\boldsymbol{\psi}+\operatorname{grad}\chi,$$

其中

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{r}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi}) \qquad (\text{在 } V \text{ 外 } \rho = 0),$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_\infty} \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})}{r}\mathrm{d}V(\boldsymbol{\xi})$$

(在 V 外取向量场 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$ 使 ω_n 在 ∂V 上连续，且在无限远处满足 $|\boldsymbol{\omega}\|\boldsymbol{x}\|^{2+\lambda}| < A$，当 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$，$\lambda, A$ 之含义见定理 13.8.3).

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})F(\boldsymbol{\xi})\mathrm{d}S(\boldsymbol{\xi}),$$

其中

$$F(\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \mathrm{curl}\boldsymbol{\psi},$$

$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 为 Green 函数.

注 有限边界的一般场的解表明：这类场可分解为无限空间的层状场，无限空间的管状场及有限空间的 Laplace 场三者之和.

13.9 不平稳场

13.9.1 标量场及向量场中的全微分

不平稳场主要是研讨标量场函数 $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ 及向量场函数 $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ 的时间微分（对 t 的微分）及空间积分下的时间微分问题. 由于 x_1, x_2, x_3 也是随 t 而变的（背景来自连续体的不定常运动，电磁波的传播等），因此用场速度(field velocity) $\boldsymbol{v}$ 反映这种变化：

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}_1\boldsymbol{e}_1 + \dot{x}_2\boldsymbol{e}_2 + \dot{x}_3\boldsymbol{e}_3,$$

其中 $\dot{x}_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$，表示场速度的分量，于是有以下的全微分公式：

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}.$$

13.9.2 标量场及向量场中的积分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varphi\,\mathrm{d}V=\int_V\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}V,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V=\int_V\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}V.$$

对于非封闭可变面 S,有以下积分公式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S u_n\mathrm{d}S=\int_S\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right]\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

其中$\int_S u_n\mathrm{d}S$ 为向量 $\boldsymbol{u}$ 在 S 面上的通量.

13.9.3 关于向量线及向量管保持不变的定理

定理 13.9.1 向量 $\boldsymbol{u}$ 的向量线及向量管强度保持不变的充要条件是等式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

在所讨论的全部区域及任何时间 t 时均能成立.

定理 13.9.2 向量 $\boldsymbol{u}$ 的向量线保持不变的充要条件是等式

$$\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]\times\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$$

在所讨论的全部区域及任何时间 t 时均能成立.

14 张量分析基础

14.1 引言

张量分析的发展自从 Ricci(里奇)于 1887—1896 年的工作发表以来,已有一百余年的历史.张量理论的早期发展是和理论物理及连续介质力学密切相关的,甚至张量(tensor)这个名词就来源于弹性理论的研究.Einstein 的广义相对论曾借助于张量分析这一有力工具.张量分析百年来取得的成就表明:这一数学分支和理论物理、微分几何、连续介质力学及现代分析力学等学科一直是在互相渗透、互相促进中成长起来的.

对于相邻学科而言,张量既是一种数学表达工具,又是研究方法中不可分割的组成部分.作为数学表达工具,张量分析提供了与坐标系选择无关的某些量(物理量或几何量)的不变性记法,向量分析不过是张量分析的特殊情形.一个物理方程当用不同坐标系表达时,就有完全不同的表达形式,这就往往掩盖了方程的物理实质,因为任何物理过程作为客观规律应与人们采用的坐标系无关.因张量分析提供的与坐标系选择无关的不变性记法有利于人们对物理过程给以清晰、简明的数学表达,从而易于认识其内在实质.作为研究方法,人们用这种简洁的张量记号及张量运算法则(包括代数的和分析的运算)可以对问题的物理本质或几何本质进行深入的理论探讨,而这是用繁复的标量表示方法难以做到的,甚至是不可能的.正因如此,最近 20 年来在连续介质力学及现代分析力学中广泛运用张量分析已成为不可阻挡的潮流.

张量分析大体上可分为古典理论和现代理论.古典理论建立在向量空间或欧氏空间的基础上,现代理论则需借助于流形概念.由于篇幅限制,本章所述张量分析仅限于古典理论,但和传统的张量古典理论在表述上的不同之处在于用现代观点处理理论体系,这主要指在多重线性函数的基础上建立张量概念、普遍使用不带指标的抽象记法、置换、外代数的普遍使用等等.这样就可将张量理论建立在一个完善的逻辑体系中,避免了传统观点所固有的缺点,诸如"指标过多时显得累赘,在逻辑上有许多不透彻之处,而且每一步,严格地说,都应有繁琐的不变性证明".[29]

14.2 张量与张量空间

定义 14.2.1 设 $\mathscr{V}$ 为 n 维向量空间,$\boldsymbol{v}^*:\mathscr{V}\to\mathbb{R}$ 是 $\mathscr{V}$ 上的实函数.若 $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$ 及 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 有

$$\boldsymbol{v}^*(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{u})+\beta\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{v}),$$

则称 $\boldsymbol{v}^*$ 是 $\mathscr{V}$ **上的线性函数**(linear function from $\mathscr{V}$ to $\mathbb{R}$).

定义 14.2.2 设 $\mathscr{V}^*$ 是 $\mathscr{V}$ 上全体线性函数的集合,在 $\mathscr{V}^*$ 内定义加法及数乘运算如下:

(1) 加法:$(\boldsymbol{v}^*+\boldsymbol{u}^*)(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{v})$,

(2) 数乘:$(k\boldsymbol{v}^*)(\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{v})$.

容易验证,$(\boldsymbol{v}^*+\boldsymbol{u}^*)(\boldsymbol{v})$ 及 $(k\boldsymbol{v}^*)(\boldsymbol{v})$ 也是 $\mathscr{V}$ 上的线性函数.所以 $\mathscr{V}^*$ 关于上述加法及数乘运算组成 $\mathscr{V}$ 上的线性空间,称为 $\mathscr{V}$ 的**对偶空间**(dual space).记号 $\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{v})$ 是 $\boldsymbol{v}^*$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的取值,又可记作 $\langle\boldsymbol{v}^*,\boldsymbol{v}\rangle$,称为向量 $\boldsymbol{v}^*$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的**标积**(scalar product),可视为一种映射 $\langle\ ,\rangle:\mathscr{V}^*\times\mathscr{V}\to\mathbb{R}$.

定理 14.2.3 对偶空间 $\mathscr{V}^*$ 与原空间 $\mathscr{V}$ 维数相同.

定理 14.2.4 在 $\mathscr{V}^*$ 中存在惟一的一组基 $\{\boldsymbol{\gamma}^1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}^n\}$ 使得对于 $\mathscr{V}$ 中的基 $\{\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_n\}$ 而言,以下关系成立:

$$\langle \boldsymbol{\gamma}^i, \boldsymbol{g}_i \rangle = \delta^i_i.$$

满足以上条件的基$\{\boldsymbol{\gamma}^j\}$称为$\{\boldsymbol{g}_i\}$的**对偶基**(dual basis).

注 (1) 对偶基$\{\boldsymbol{\gamma}^j\}$不应与逆变基$\{\boldsymbol{g}^j\}$相混淆,前者属于空间$\mathscr{V}^*$,后者则与$\{\boldsymbol{g}_i\}$属于同一空间$\mathscr{V}$.仅在内积空间中,由于$\mathscr{V}^*$与$\mathscr{V}$同构,标积可用内积代替,对偶基可用逆变基代替,即

$$\boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{u} \rangle \Rightarrow \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u},$$

$$\langle \boldsymbol{\gamma}^j, \boldsymbol{g}_i \rangle = \delta^j_i \Rightarrow \boldsymbol{g}^j \cdot \boldsymbol{g}_i = \delta^j_i.$$

(2) $\boldsymbol{v}^*$与$\boldsymbol{v}$的标积可用各自的分量表示如下:

$$\langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{v} \rangle = \langle v_i \boldsymbol{\gamma}^i, v^j \boldsymbol{g}_j \rangle = v_i v^j \langle \boldsymbol{\gamma}^i, \boldsymbol{g}_j \rangle = v_i v^j \delta^i_j = v_i v^i.$$

令$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{\gamma}^i$,则有

$$\langle \boldsymbol{\gamma}^i, \boldsymbol{v} \rangle = v^i, \qquad \langle \boldsymbol{v}^*, \boldsymbol{g}_j \rangle = v_j,$$

它们都是内积空间中有关结论的推广.

定义 14.2.5 设$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$为$\mathscr{V}^*$中之向量,$\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^s$为$\mathscr{V}$中之向量,若映射$\boldsymbol{\Phi}$:

$$\underbrace{\mathscr{V}^* \times \cdots \times \mathscr{V}^*}_{r\text{次}} \times \underbrace{\mathscr{V} \times \cdots \times \mathscr{V}}_{s\text{次}} \to \mathbb{R}$$

是偏线性的,即满足条件

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1, \cdots, \alpha \boldsymbol{v}^i + \beta \boldsymbol{v}^{i'}, \cdots, \boldsymbol{v}^r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s) \\
&= \alpha \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^i, \cdots, \boldsymbol{v}^r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s) \\
&\quad + \beta \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^{i'}, \cdots, \boldsymbol{v}^r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s), \\
&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \alpha \boldsymbol{v}_i + \beta \boldsymbol{v}_{i'}, \cdots, \boldsymbol{v}_s) \\
&= \alpha \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i'}, \cdots, \boldsymbol{v}_s) \\
&\quad + \beta \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1, \cdots, \boldsymbol{v}^r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{i'}, \cdots, \boldsymbol{v}_s),
\end{aligned}$$

则称$\boldsymbol{\Phi}$为$r+s$ **重线性函数**(multilinear function),或称$\boldsymbol{\Phi}$为(r,s) **型张量**.空间$\mathscr{V}^*$与$\mathscr{V}$的重数总和$r+s$称为张量$\boldsymbol{\Phi}$的阶数(rank),r称为张量$\boldsymbol{\Phi}$的**逆变阶数**(contravariant rank),s称为张量$\boldsymbol{\Phi}$的**协变阶数**(covariant rank).特别是,称$(r,0)$型张量为 **r 阶逆变张量**,称$(0,s)$型张量为 **s 阶协变张量**.当$r>0, s>0$时,(r,s)型张量

称为 **$r+s$ 阶混合张量**.

注 对于内积空间,$\mathscr{V}^*$ 与 $\mathscr{V}$ 无需区分,此时张量的定义简化为映射 $\boldsymbol{\Phi}:\underbrace{\mathscr{V}\times\cdots\times\mathscr{V}}_{r\text{次}}\to\mathbb{R},(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)\mapsto\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)$. $\boldsymbol{\Phi}$ 中所含之 $\boldsymbol{v}_i$ 皆为同一空间 $\mathscr{V}$ 中之向量.

定义 14.2.6 $r+s$ 阶张量在基向量上的取值称为该张量的**分量**(components of a tensor),并记作

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\gamma}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}^{i_r},\boldsymbol{g}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{j_s}).$$

由于指标 i_m,j_t 都应取 $1,\cdots,n$ 中的任一值,故 $r+s$ 阶张量共有 n^{r+s} 个分量. 特例:一阶张量(向量)有 n 个分量,二阶张量有 n^2 个分量.

定理 14.2.7 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 是任意 $r+s$ 阶同类型张量,若称在任何基向量上的取值均为零的张量为**零张量**(zero tensor)并记作 $\mathbf{0}$,并定义以下的张量加法和数乘法则:$\forall\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r\in\mathscr{V}^*,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s\in\mathscr{V}$ 及 $\alpha\in\mathbb{R}$ 有:

$$(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s)$$
$$\equiv\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s)+\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s),$$
$$(\alpha\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s)\equiv\alpha\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s).$$

则全体 $r+s$ 阶张量构成一个 $r+s$ 维向量空间,称为 **$r+s$ 阶张量空间**(tensor space),记作 $\mathscr{T}^r_s(\mathscr{V})$,协变型张量空间记作 $\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$,逆变型张量空间记作 $\mathscr{T}^r(\mathscr{V})$.

定义 14.2.8 设 $\mathscr{T}^r(\mathscr{V})$ 和 $\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 分别是 r 阶逆变及 s 阶协变张量空间,定义映射

$$\mathscr{T}^r(\mathscr{V})\times\mathscr{T}_s(\mathscr{V})\to\mathscr{T}^r_s(\mathscr{V}),\qquad(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi})\mapsto\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}.$$

满足以下条件:

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s)\equiv\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s),$$
$$\forall\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^r\in\mathscr{V}^*,\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_s\in\mathscr{V},$$

$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的**张量积**(tensor product),它是 (r,s) 型

混合张量.

推论 14.2.9 任意两个不同类型的张量都可取张量积. 若 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_q^p(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$，则张量积定义为：$\forall\,\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^{p+r}\in\mathscr{V}^*$，$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{q+s}\in\mathscr{V}$，有

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^{p+r},\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{q+s})$$
$$=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^p,\boldsymbol{v}_1,\cdots,v_q)\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}^{p+1},\cdots,\boldsymbol{v}^{p+r},\boldsymbol{v}_{q+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{q+s}).$$

两张量之乘积产生以下映射：

$$\otimes:\mathscr{T}_q^p(\mathscr{V})\times\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_{q+s}^{p+r}(\mathscr{V}).$$

推论 14.2.10 张量积可推广至任意多个张量：

$$\otimes:\mathscr{T}_{s_1}^{r_1}(\mathscr{V})\times\cdots\times\mathscr{T}_{s_k}^{r_k}(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_{s_1+\cdots+s_k}^{r_1+\cdots+r_k},$$

即

$$\boldsymbol{\Phi}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^{r_1+\cdots+r_k},\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{s_1+\cdots+s_k})$$
$$=\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^{r_1},\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{s_1})\cdots$$
$$\boldsymbol{\Phi}_k(\boldsymbol{v}^{r_1+\cdots+r_{k-1}+1},\cdots,\boldsymbol{v}^{r_1+\cdots+r_k},\boldsymbol{v}_{s_1+\cdots+s_{k-1}+1},\cdots,\boldsymbol{v}_{s_1+\cdots+s_k}).$$

推论 14.2.11 在每个张量 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 都是向量(一阶张量)的情况下，多重张量积$\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r\otimes\boldsymbol{v}^1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^s$是 $r+s$ 阶张量，并有

$$\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r\otimes\boldsymbol{v}^1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^s(\boldsymbol{u}^1,\cdots,\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s)$$
$$=\langle\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{v}_1\rangle\cdots\langle\boldsymbol{u}^r,\boldsymbol{v}_r\rangle\langle\boldsymbol{v}^1,\boldsymbol{u}_1\rangle\cdots\langle\boldsymbol{v}^s,\boldsymbol{u}_s\rangle.$$

具有多个向量(不一定线性无关)的张量积称为**简单张量**(simple tensor).

定理 14.2.12 若$\{\boldsymbol{g}_i\}$及$\{\boldsymbol{\gamma}^i\}$为 $\mathscr{V}$ 及 $\mathscr{V}^*$ 中的基，则简单张量组$\{\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_s},i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s=1,\cdots,n\}$是线性无关组，$\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$中的任何张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 均可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_s},$$

其中 $\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\gamma}^{j_s}$ 构成 $\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$中的一组基，称为**乘积基**(product basis). 乘积基共有 n^{r+s} 个简单张量，故 $\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$是 n^{r+s}维向量空间.

注 由于内积空间中每一向量可以任选协变基或逆变基进行分解,故内积空间中乘积基形式不惟一,同一张量也有不同形式,如

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r},$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi_{j_1\cdots j_r}\boldsymbol{g}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_r},$$

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i_1\cdots i_m}{}_{i_{m+1}\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_m}\otimes\boldsymbol{g}^{i_{m+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r}.$$

张量举例:

(1) 应变张量(strain tensor)$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j$为二阶张量,$\varepsilon_{ij}$为应变张量分量.

(2) 弹性张量(elasticity tensor) $\boldsymbol{E}=E_{ijkl}\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}^k\otimes\boldsymbol{e}^l$为四阶张量,$E_{ijkl}$为弹性张量分量.

(3) Eddington 张量 $\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k$为三阶张量.

(4) 度量张量(metric tensor) $\boldsymbol{I}=g_{ij}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j=\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^i=g^{ij}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j$为二阶张量.

定理 14.2.13 设有一组协变基$\{\boldsymbol{g}_i\}$、对偶基$\{\boldsymbol{\gamma}^i\}$及另一组协变基$\{\boldsymbol{g}_{i'}\}$、对偶基$\{\boldsymbol{\gamma}^{i'}\}$,它们之间有以下转换关系:

$$\boldsymbol{g}_i=\beta_i^{i'}\boldsymbol{g}_{i'},\qquad \boldsymbol{g}^i=\alpha_{i'}^i\boldsymbol{\gamma}^{i'},$$

(在内积空间中,$\alpha_{i'}^i=\beta_{i'}^i,\boldsymbol{\gamma}^{i'}=\boldsymbol{g}^{i'}$),其中$\alpha_{i'}^i$及$\beta_i^{i'}$为转换系数. 任何张量$\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$在两种基上的表达式为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}&=\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}(\boldsymbol{\gamma}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}^{i_r},\boldsymbol{g}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{j_s})\\&=\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s}(\boldsymbol{\gamma}^{i'_1},\cdots,\boldsymbol{\gamma}^{i'_r},\boldsymbol{g}_{j'_1},\cdots,\boldsymbol{g}_{j'_s}).\end{aligned}$$

于是$\boldsymbol{\Phi}$在两种基上的转换关系为

$$\Phi^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s}=\alpha_{i'_1}^{i_1}\cdots\alpha_{i'_r}^{i_r}\beta_{j_1}^{j'_1}\cdots\beta_{j'_s}^{j_s}\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}.$$

古典张量理论即以上式作为张量定义,可用以检验某一组含指标的有序量是否为张量分量.

例 14.2.14 度量张量分量g_{ij}或g^{ij}满足以下变换关系:

$$g_{i'j'}=\beta_{i'}^i\beta_{j'}^j g_{ij},\qquad g^{i'j'}=\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}g^{ij},$$

故度量张量分量构成二阶张量，记作 $\boldsymbol{I}$：

$$\boldsymbol{I}=g_{ij}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j=g^{ij}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j.$$

例 14.2.15 Christoffel 符号 Γ_{ij}^k 及 Γ_{ijk} 不是张量分量，因由定义

$$\Gamma_{ij}^k=\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}^k,\qquad \Gamma_{ijk}=\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}_k.$$

可知 $\Gamma_{i'j'}^{k'}\neq\beta_k^{k'}\beta_{i'}^i\beta_{j'}^j\Gamma_{ij}^k$，$\Gamma_{i'j'k'}\neq\beta_{i'}^i\beta_{j'}^j\beta_{k'}^k\Gamma_{ijk}$，它们都不满足张量分量的转换关系.

14.3 张量代数

14.3.1 缩并与标积

定义 14.3.1 设一简单张量 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$ 具有以下形式：

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r\otimes\boldsymbol{v}^1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^s.$$

对任意指标(i,j)，其中 $1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant s$，若存在映射 $\mathrm{C}_j^i:\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_{s-1}^{r-1}(\mathscr{V})$使得

$$\mathrm{C}_j^i\boldsymbol{\Phi}=\langle\boldsymbol{v}^j,\boldsymbol{v}_i\rangle\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_{i-1}\otimes\boldsymbol{v}_{i+1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^{j-1}\otimes\boldsymbol{v}^{j+1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^s.$$

对于所有简单张量成立，则称映射 C_j^i 为对指标 i,j 的缩并(contraction). 为简明计，上式右端的张量积常简记为

$$\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\hat{\boldsymbol{v}}_i\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{v}}_r\otimes\boldsymbol{v}^1\otimes\cdots\hat{\boldsymbol{v}}^j\cdots\otimes\boldsymbol{v}^s.$$

记号$\hat{\boldsymbol{v}}_i$，$\hat{\boldsymbol{v}}_j$表示已于张量积中被删除.

定理 14.3.2 满足定义 14.2.2 的缩并映射存在且惟一.

定理 14.3.3 若 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$是$(r,s)$型张量，则 $\mathrm{C}_j^i\boldsymbol{\Phi}$ 在任何对偶基$\{\boldsymbol{g}_i\}$，$\{\boldsymbol{\gamma}^i\}$上的分量为

$$(\mathrm{C}^i{}_j\boldsymbol{\Phi})^{k_1\cdots\hat{k}_i\cdots k_r}{}_{l_1\cdots\hat{l}_j\cdots l_s}=\Phi^{k_1\cdots k_{i-1}tk_{i+1}}{}_{l_1\cdots l_{j-1}tl_{j+1}\cdots l_s}.$$

定义 14.3.4 设简单张量 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_r^r(\mathscr{V})$具有以下形式：

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_r\otimes\boldsymbol{v}^1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}^r,$$

定义全缩并(complete contraction)为连续 r 次缩并

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_1^{r+1}\mathbf{C}_2^{r+2}\cdots\mathbf{C}_r^{2r}:\quad \mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}=\langle\boldsymbol{v}^1,\boldsymbol{v}_1\rangle\langle\boldsymbol{v}^2,\boldsymbol{v}_2\rangle\cdots\langle\boldsymbol{v}^r,\boldsymbol{v}_r\rangle,$$

故全缩并结果为一标量.

如,若设 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}^{ij}_{kl}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{\gamma}^k\otimes\boldsymbol{\gamma}^l\in\mathscr{T}_2^2(\mathscr{V})$,则有

$$\mathbf{C}_1^3\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{ij}{}_{kl}\langle\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{\gamma}^k\rangle(\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}^l)=\Phi^{ij}{}_{il}\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{\gamma}^l,$$

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{C}_1^3\mathbf{C}_2^4\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{ij}{}_{kl}\langle\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{\gamma}^k\rangle\langle\boldsymbol{g}_j,\boldsymbol{\gamma}^l\rangle=\Phi^{ij}{}_{ij}.$$

定义 14.3.5 设有两张量

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{k_1\cdots k_r}{}_{l_1\cdots l_s}\boldsymbol{g}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{k_r}\otimes\boldsymbol{\gamma}^{l_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\gamma}^{l_s}\in\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V}),$$

$$\boldsymbol{\Psi}=\Psi^{m_1\cdots m_s}{}_{t_1\cdots t_r}\boldsymbol{g}_{m_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{m_s}\otimes\boldsymbol{\gamma}^{t_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\gamma}^{t_r}\in\mathscr{T}_r^s(\mathscr{V}).$$

定义张量积 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$ 的全缩并为以下运算:

$$\mathbf{C}=\mathbf{C}_{m_1}^{l_1}\cdots\mathbf{C}_{m_s}^{l_s}\mathbf{C}_{k_1}^{t_1}\cdots\mathbf{C}_{k_r}^{t_r},$$

于是有

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})=\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\Psi^{j_1\cdots j_s}{}_{i_1\cdots i_r},$$

张量积 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$ 的全缩并又称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}$ 的标积,即 $\langle\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}\rangle=\mathbf{C}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})$.

14.3.2 内积空间中的缩并与点乘

14.3.1 节所述任意空间中的张量缩并原则上也适用于内积空间,只需将对偶基 $\{\boldsymbol{\gamma}^i\}$ 改为逆变基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$,将标积 $\langle,\rangle$ 改为点乘 $(\ )\cdot(\ )$ 即可. 但因内积空间中的对偶空间 $\mathscr{V}^*$ 与原空间 $\mathscr{V}$ 同构,只有如下形式之张量:

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r),$$

缩并则规定为可在 $\boldsymbol{\Phi}$ 所含任意两向量中进行,如

$$\mathbf{C}_{(i,j)}(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_i\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_j\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r)$$
$$=(\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j)(\boldsymbol{u}_1\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{u}}_i\otimes\cdots\otimes\hat{\boldsymbol{u}}_j\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_r).$$

而在一般空间中,只能在互为对偶的一对向量间进行缩并. 此外,内积空间中还有一些特殊缩并运算.

定义 14.3.6 设 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$，$\boldsymbol{\Psi}\in\mathcal{T}_s(\mathcal{V})$，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的 e **点乘**（e-dot product）（e 为自然数 $\leqslant\min(r,s)$）定义为

$$\boldsymbol{\Phi}\binom{e}{\cdot}\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{C}_{r+e-1,r+1}\cdots\mathbf{C}_{r,r+e}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}).$$

当 $e=1$ 时简称点乘：$\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Phi}\binom{1}{\cdot}\boldsymbol{\Psi}$.

当 $e=2$ 时，简称双点乘：$\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Phi}\binom{2}{\cdot}\boldsymbol{\Psi}$.

例 设有

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{ijkl}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l,\quad \boldsymbol{\Psi}=\Psi_{pqrs}\boldsymbol{g}^p\otimes\boldsymbol{g}^q\otimes\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}^s.$$

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}\binom{2}{\cdot}\boldsymbol{\Psi}&=\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{\Psi}\\&=\Phi^{ijkl}\Psi_{pqrs}(\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}^p)(\boldsymbol{g}_l\cdot\boldsymbol{g}^s)\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}^s\\&=\Phi^{ijkl}\Psi_{klrs}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}^s.\end{aligned}$$

定义 14.3.7 当 $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}\in\mathcal{T}_e(\mathcal{V})$，$\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 的 e-点乘称为它们的**全点乘**，记作

$$\boldsymbol{\Phi}\odot\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{C}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}).$$

14.3.3 置换、对称化与反称化

定义 14.3.8 设 $(1\leqslant p,q\leqslant r,p\neq q)$，$r$ 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于第 p 和第 q 变量为**对称**（symmetric），若

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\cdots,\boldsymbol{v}_r).$$

r 阶张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于第 p 和第 q 变量为**反称**（skew symmetric），若

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\cdots,\boldsymbol{v}_p,\cdots,\boldsymbol{v}_r),$$
$$\forall\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\in\mathcal{V}.$$

且以上两式对于所有变量均成立，则称 $\boldsymbol{\Phi}$ 为**对称张量**或**反称张量**.

定义 14.3.9 若 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ 且 σ 是 $\{1,\cdots,r\}$ 的某种排列，以下

映射 $\mathbf{T}_\sigma:\mathcal{T}_r(\mathcal{V})\to\mathcal{T}_r(\mathcal{V}),\boldsymbol{\Phi}\mapsto\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}$,

$$\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(r)}),\qquad \forall\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\in\mathcal{V}$$

称映射 $\boldsymbol{T}_\sigma$ 为**置换算子**(transpose operator).

注 若 σ 表示由 $\{1,\cdots,r\}\to\{\sigma(1),\cdots,\sigma(r)\}$ 的一个排列,则任何这种排列都是二元素的交换排列的乘积. 因此 r 元置换的全体构成一个群,称为 **r 元置换群**(transpose group of r elements),记作 Σ_r,或简记为 Σ. 置换中的逆序数 $N(\sigma)$ 为奇数时称为**奇置换**;$N(\sigma)$ 为偶数时称为**偶置换**,可用以下记号表达:

$$\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^{N(\sigma)}=\begin{cases}+1, & \sigma\text{ 是偶置换},\\ -1, & \sigma\text{ 是奇置换}.\end{cases}$$

定义 14.3.10 定义 $\mathcal{V}$ 中的两种线性变换 $\mathcal{S},\mathcal{A}:\mathcal{T}_r(\mathcal{V})\to\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ 由下列公式来表达:

$$(\mathcal{S}\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)=\frac{1}{r!}\sum_\sigma\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(r)})=\frac{1}{r!}\sum_\sigma\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi},$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r)&=\frac{1}{r!}\sum_\sigma\operatorname{sgn}\sigma\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(r)})\\&=\frac{1}{r!}\sum_\sigma\operatorname{sgn}\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}.\end{aligned}$$

求和应遍及一切 $\sigma\in\Sigma_r$ · $\mathcal{S}$ 及 $\mathcal{A}$ 分别称为**对称化映射**(symmetrizing mapping)(**算子**)及**反称化映射**(alternating mapping)(**算子**).

对称化算子及反称化算子的另一种表达形式为

$$\mathcal{S}\boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{r!}\sum_\sigma\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{(i_1\cdots i_r)}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r},$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{r!}\sum_\sigma\operatorname{sgn}\mathbf{T}_\sigma\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{[i_1\cdots i_r]}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}.$$

其中

$$\Phi^{(i_1\cdots i_r)}=\frac{1}{r!}\sum_\sigma\Phi^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)},\quad \Phi^{[i_1\cdots i_r]}=\frac{1}{r!}\sum_\sigma\operatorname{sgn}\Phi^{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_r)}.$$

例 1 设 $\boldsymbol{B}=B^{ij}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j$,则

$$\mathscr{S}\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(B^{ij}+B^{ji})\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j,$$

$$\mathscr{A}\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(B^{ij}-B^{ji})\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j.$$

例 2 设 $\boldsymbol{S}=S_{ijk}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k$,则

$$\mathscr{S}\boldsymbol{S}=S_{(ijk)}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k,$$

$$\mathscr{A}\boldsymbol{S}=S_{[ijk]}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k,$$

$$S_{(ijk)}=\frac{1}{3!}(S_{ijk}+S_{jki}+S_{kij}+S_{kji}+S_{ikj}+S_{jik}),$$

$$S_{[ijk]}=\frac{1}{3!}(S_{ijk}+S_{jki}+S_{kij}-S_{kji}-S_{ikj}-S_{jik}).$$

定理 14.3.11 $\mathscr{S}$与$\mathscr{A}$有以下性质:

(1) $\mathscr{A}$及$\mathscr{S}$皆为投影映射,即 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$, $\mathscr{S}^2=\mathscr{S}$.

(2) $\mathscr{A}\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 及 $\mathscr{S}\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 分别构成反称子空间 Λ 及对称子空间 Σ, Λ 与 Σ 仅有零空间是共同的.

(3) 当且仅当 $\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}$ 时,$\boldsymbol{\Phi}$ 为反称张量;当且仅当 $\mathscr{S}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}$ 时,$\boldsymbol{\Phi}$ 为对称张量.

14.3.4 外形式与外积

定义 14.3.12 r 阶反称张量又称为 r 阶**外形式**(exterior form),简称 r-**形式**,全体 r-形式是 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$的一个子空间,记作 $\Lambda_r(\mathscr{V})$.

定义 14.3.13 设有两个外形式空间 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 和 $\Lambda_s(\mathscr{V})$,且 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r$,$\boldsymbol{\Psi}\in\Lambda_s$,则定义 $\boldsymbol{\Phi}$ 与 $\boldsymbol{\Psi}$ 的**外积**(exterior product)为

$$\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}=\frac{(r+s)!}{r!\ s!}\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}).$$

由上述定义可知 $\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}$ 在 $\{\boldsymbol{g}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{g}_{\sigma(r)}\}$ 上的值为

$$\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_{r+s})=\sum{}'(\operatorname{sgn}\sigma)\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{g}_{\sigma(1)},\cdots,\boldsymbol{g}_{\sigma_{(r)}})\cdot\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{g}_{\sigma(r+1)},\cdots,\boldsymbol{g}_{\sigma(r-s)}).$$

记号$\sum'$表示按所有 $r+s$ 个序号的排列求和，但需保持 $\sigma(1)<\cdots<\sigma(r)$ 及 $\sigma(r+1)<\cdots<\sigma(r+s)$.

定理 14.3.14 对于 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Psi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Theta}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$，有以下外积性质：

(1) $\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}=\mathscr{A}\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Phi}\wedge\mathscr{A}\boldsymbol{\Psi}$;

(2) $\wedge$ 为双线性映射；

(3) $\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi}=(-1)^{rs}\boldsymbol{\Psi}\wedge\boldsymbol{\Phi}$;

(4) $\boldsymbol{\Phi}\wedge(\boldsymbol{\Psi}\wedge\boldsymbol{\Theta})=(\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi})\wedge\boldsymbol{\Theta}$.

推论 14.3.15 $\boldsymbol{\Phi}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\Phi}_s=\dfrac{(r_1+\cdots+r_s)!}{r_1!\ \cdots r_s!}\mathscr{A}(\boldsymbol{\Phi}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\Phi}_s)$.

推论 14.3.16 若每个 $\boldsymbol{\Phi}_r$ 都是 1-形式，即向量，则诸向量 $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_s$ 的外积 $\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_s$ 称为**简单外形式**，它在 $\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^s\in\mathscr{V}^*$ 上的值是

$$\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{v}^1,\cdots,\boldsymbol{v}^s)=\begin{vmatrix}\langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}^1\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}^s\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{v}^1\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{u}_s,\boldsymbol{v}^s\rangle\end{vmatrix}.$$

推论 14.3.17 $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}$.

由此导出 $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. 进而可知简单外形式 $\boldsymbol{g}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{i_r}$ 仅当 $i_1,\cdots,i_r$ 互不相同时不为零. 当 $r>n$ 时，指标 $i_1,\cdots,i_r$ 必有重复者，相应的外形式必为零.

定理 14.3.18 若 $r>n=\dim\mathscr{V}$，则 $\Lambda_r(\mathscr{V})=\{\boldsymbol{0}\}$；而对 $0\leqslant r\leqslant n$，则有 $\dim\Lambda_r(\mathscr{V})=\dbinom{n}{r}=n(n-1)\cdots(n-r+1)/r!$.

定理 14.3.19 r-形式空间 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 可由协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 构成其一组基 $\{\boldsymbol{g}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{i_r}\mid i_1<\cdots<i_r\}$，也可由对偶基 $\{\boldsymbol{\gamma}^i\}$ 构成其一组基 $\{\boldsymbol{\gamma}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\gamma}^{i_r}\mid i_1<\cdots<i_r\}$. 任何 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$ 在这类基上的表达式为

$$\boldsymbol{\Phi}=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\Phi^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{i_r}$$

或

$$\boldsymbol{\Phi} = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \Phi_{i_1\cdots i_r} \boldsymbol{\gamma}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\gamma}^{i_r},$$

其中 $\Phi^{i_1\cdots i_r}$ 及 $\Phi_{i_1\cdots i_r}$ 称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的逆变及协变**严格分量**(restricted component).

推论 14.3.20 任何 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_n(\mathscr{V})$ 可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi_{1\cdots n}\boldsymbol{\gamma}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\gamma}^n=\alpha\boldsymbol{\gamma}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\gamma}^n$$

或

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{1\cdots n}\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n=\beta\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n,$$

此时 $\boldsymbol{\Phi}$ 仅有惟一的严格分量 α 或 β.

定义 14.3.21 对于 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$ 及 $\boldsymbol{\Psi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$,定义两张量 $\boldsymbol{\Phi}$ 及 $\boldsymbol{\Psi}$ 的**外全点积**(exterior complete dot product)为

$$\boldsymbol{\Phi}\diamond\boldsymbol{\Psi}=\frac{1}{r!}\boldsymbol{\Phi}\odot\boldsymbol{\Psi}.$$

例如,$(\boldsymbol{u}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{u}_r)\diamond(\boldsymbol{v}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{v}_r)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_r\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{v}_r\end{vmatrix}$

外全点积和全点积一样,都只适用于内积空间.

14.3.5 广义 Kronecker 符号,Ricci 符号,矩阵的行列式

定义 14.3.22 定义以下表达式

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}=\begin{vmatrix}\delta^{i_1}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_r}\\ \vdots & & \vdots\\ \delta^{i_r}_{j_1} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_r}\end{vmatrix}=\sum_{\sigma\in\sigma_r}\operatorname{sgn}\delta^{i_1}_{\sigma(j_1)}\cdots\delta^{i_r}_{\sigma(j_r)}$$

为 r 阶**广义 Kronecker 符号**(generalized Kronecker delta),其中 $1\leqslant r\leqslant n$.

定理 14.3.23 r 阶广义 Kronecker 符号的值是

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}=\begin{cases}0, & 若(i_1,\cdots,i_r)或(j_1,\cdots,j_r)有重复元素,\\ 0, & 若(i_1,\cdots,i_r)或(j_1,\cdots,j_r)无重复元素,\\ & 但\{i_1,\cdots,i_r\}\neq\{j_1,\cdots,j_r\},\\ \operatorname{sgn}\sigma, & 若(i_1,\cdots,i_r)和(j_1,\cdots,j_r)无重复元素,\\ & 且\{i_1,\cdots,i_r\}=\{j_1,\cdots,j_r\},其中\\ & \quad \sigma(j_k)=i_k,\quad k=1,\cdots,r.\end{cases}$$

推论 14.3.24 由广义 Kronecker 符号的定义及性质可导出一系列重要公式:

$$\delta^{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_k i_{k+1}\cdots i_r}=\frac{(n-k)!}{(n-r)!}\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k},$$

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{i_1\cdots i_r}=\frac{n!}{(n-r)!},$$

$$\delta^{ilp}_{jmp}=(n-2)(\delta^i_j\delta^l_m-\delta^i_m\delta^l_j),$$

$$\delta^{ipq}_{jpq}=(n-2)(n-1)\delta^i_j,$$

$$\delta^{ijp}_{ijp}=(n-2)(n-1)n.$$

定义 14.3.25 以下两种特殊的广义 Kronecker 符号定义为 **Ricci 符号**(Ricci symbol)

$$e^{i_1\cdots i_n}=\delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n},\quad e_{i_1\cdots i_n}=\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}.$$

推论 14.3.26 $e^{i_1\cdots i_n}e_{i_1\cdots i_n}=\delta^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n}$.

定理 14.3.27 $n\times n$ 矩阵(M_{ij}),(M^{ij})及(M^i_j)的行列式有以下表达式:

$$\det(M_{ij})=\frac{1}{n!}e^{i_1\cdots i_n}e^{j_1\cdots j_n}M_{i_1j_1}\cdots M_{i_nj_n},$$

$$\det(M^{ij})=\frac{1}{n!}e_{i_1\cdots i_n}e_{j_1\cdots j_n}M^{i_1j_1}\cdots M^{i_nj_n},$$

$$\det(M^i_j)=\frac{1}{n!}\delta^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n}M^{j_1}_{i_1}\cdots M^{j_n}_{i_n}.$$

14.3.6 容积元及 Hodge 星算子

定义 14.3.28 任意 Λ_n 中的 n 形式 $\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n$ 经基向量变换 $\boldsymbol{g}_{i'}=\beta_{i'}^{i}\boldsymbol{g}_i$ 后得到新基中的 n-形式：

$$\boldsymbol{g}_{1'}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_{n'}=\det(\beta_i^{i'})\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n.$$

当 $\det(\beta_i^{i'})>0$ 时，$\{\boldsymbol{g}_i\}$ 称为**正基**（右手系），反之称为**负基**（左手系）.

定义 14.3.29 设 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的正标准正交基，n-形式 $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{e}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_n$ 称为 $\mathscr{V}$ 的**容积元**(volume element)，或 Eddington **张量**.

定理 14.3.30 容积元与所选取的正标准正交基无关，且在任意正协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 及正逆变基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 中的表达式为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{g}_1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}_n=\sqrt{g}\boldsymbol{g}^1\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{g}^n.$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 的分量与 Ricci 符号有以下关系：

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{i_1\cdots i_n},\quad \varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\sqrt{g}\,e_{i_1\cdots i_n}.$$

定义 14.3.31 设有 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Psi}\in\Lambda_{n-r}(\mathscr{V})$，按下述条件

$$\boldsymbol{\varepsilon}\diamond(\boldsymbol{\Phi}\wedge\boldsymbol{\Psi})=(*\boldsymbol{\Phi})\diamond\boldsymbol{\Psi},\ \forall\,\boldsymbol{\Psi}\in\Lambda_{n-r}(\mathscr{V})$$

定义的"$*$"称为 **Hodge 星算子**(Hodge star operator)，而 $*\boldsymbol{\Phi}$ 则称为 $\boldsymbol{\Phi}$ **的对偶(张量)**(duel tensor).

由上述定义可知，Hodge 星算子是一种由 $\Lambda_r(\mathscr{V})$ 至 $\Lambda_{n-r}(\mathscr{V})$ 的映射.

定理 14.3.32 任意 $\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_r(\mathscr{V})$ 的对偶 $*\boldsymbol{\Phi}\in\Lambda_{n-r}(\mathscr{V})$ 存在且惟一. 若记 $s=n-r$，则有

$$*\boldsymbol{\Phi}=\frac{(-1)^{sr}}{r!}\boldsymbol{\varepsilon}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{\Phi}.$$

推论 14.3.33 $*1=\boldsymbol{\varepsilon}$，$*\boldsymbol{\varepsilon}=1$.

例 1 $\mathscr{V}^*$ 中的叉积可用下式表示：

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=*(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}).$$

例 2 记混合积$[\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}]=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}$, $\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in\mathscr{V}^3$,则有

$$*(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w})=[\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}],\qquad *[\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{w}]=\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}.$$

14.4 二阶张量(仿射量)

14.4.1 仿射量的基本性质及运算

定理 14.4.1 二阶张量又称仿射量(affinor),具有以下性质:

(1) 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 可等价地表为

$$\boldsymbol{T}=T_{ij}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j=T^j{}_i\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}_j=T^i{}_j\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j,$$

其中 $T_{ij}=g_{lj}T^l{}_i=g_{li}T^l{}_j=g_{ki}g_{mj}T^{km}$.

(2) 对于仿射量 $\boldsymbol{T}$,记 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_\sigma\boldsymbol{T}$,称为 $\boldsymbol{T}$ 的**转置张量**(transposed tensor).对于对称仿射量,必有 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$,因之必有

$$T_{ij}=T_{ji},\quad T_i{}^j=T^j{}_i,\quad T^i{}_j=T_j{}^i,\quad T^{ij}=T^{ji}.$$

(3) 对于反称仿射量,必有 $\boldsymbol{T}=-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$,因之必有

$$T_{ij}=-T_{ji},\quad T_i{}^j=-T^j{}_i,\quad T^i{}_j=-T_j{}^i,\quad T^{ij}=-T^{ji}.$$

注 仿射量的转置不得与矩阵的转置相混淆.仿射量转置时,由于上下标表示逆变与协变指标,故地位不变,仅前后顺序互换.

定义 14.4.2 **仿射量的矩阵** 定义仿射量 $\boldsymbol{T}=T^i{}_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}T^1{}_1 & T^1{}_2 & \cdots & T^1{}_n\\ T^2{}_1 & T^2{}_2 & \cdots & T^2{}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ T^n{}_1 & T^n{}_2 & \cdots & T^n{}_n\end{pmatrix}.$$

定义 14.4.3 两个仿射量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的点乘 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}=\mathbf{C}_{(2,3)}(\boldsymbol{T}\otimes$

S)称为 S 和 T 的点积,这个积仍是一个仿射量.

定理 14.4.4 度量张量具有以下性质:

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{v}.$$

由于上述性质,度量张量又称为**单位仿射量**(unit affinor).

定理 14.4.5 转置仿射量有以下性质:

(1) $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{v}$, $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$;

(2) $(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{T})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$;

(4) $\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$ ($\boldsymbol{I}$ 为单位仿射量).

定理 14.4.6 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的点积为另一向量 $\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}.$$

故仿射量 $\boldsymbol{T}$ 可视为一线性变换子,它将向量 $\boldsymbol{a}$ 映射为 $\mathscr{V}$ 中的另一向量 $\boldsymbol{b}$.

注 点积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}$ 也是一向量,但除非 $\boldsymbol{T}$ 为对称仿射量,否则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}\neq\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{a}$.

定理 14.4.7 二向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的叉积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 可用一反称仿射量 $\boldsymbol{\Phi}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的点积表示,即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知,反称仿射量的作用相当于一向量.

定义 14.4.8 给定两个仿射量 $\boldsymbol{\Phi}$ 及 $\boldsymbol{\Psi}$ 如下:

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{a}_i\otimes\boldsymbol{b}_i, \quad \boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{c}_j\otimes\boldsymbol{d}_j.$$

则有以下运算规则:

(1) 点积、叉积、张量积

$\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Psi}=(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{c}_j)\boldsymbol{a}_i\otimes\boldsymbol{d}_j$ (二阶张量),

$\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{a}_i \otimes (\boldsymbol{b}_i \times \boldsymbol{c}_j) \otimes \boldsymbol{d}_j$ （三阶张量），

$\boldsymbol{\Phi} \otimes \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{a}_i \otimes \boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{c}_j \otimes \boldsymbol{d}_j$ （四阶张量）.

（2）纵二重积

$\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{c}_j)(\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{d}_j)$ （零阶张量），

$\boldsymbol{\Phi} \overset{\cdot}{\underset{\times}{}} \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{c}_j)(\boldsymbol{b}_i \times \boldsymbol{d}_j)$ （一阶张量），

$\boldsymbol{\Phi} \overset{\times}{\underset{\cdot}{}} \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{c}_j)(\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{d}_j)$ （一阶张量），

$\boldsymbol{\Phi} \overset{\times}{\underset{\times}{}} \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{c}_j) \otimes (\boldsymbol{b}_i \times \boldsymbol{d}_j)$ （二阶张量）.

（3）横二重积

$\boldsymbol{\Phi} \cdot \cdot \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{d}_j)(\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{c}_j)$ （零阶张量），

$\boldsymbol{\Phi} \cdot \times \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{d}_j)(\boldsymbol{b}_i \times \boldsymbol{c}_j)$ （一阶张量），

$\boldsymbol{\Phi} \times \cdot \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{d}_j)(\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{c}_j)$ （一阶张量），

$\boldsymbol{\Phi} \times \times \boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{a}_i \times \boldsymbol{d}_j) \otimes (\boldsymbol{b}_i \times \boldsymbol{c}_j)$ （二阶张量）.

注 有叉积运算的公式仅限于 $\mathscr{V}^3$.

定理 14.4.9 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的行列式可用混合分量表示为

$$\det \boldsymbol{T} = \det(T^i{}_j) = \det(T_i{}^j).$$

也可用协变或逆变分量表示为

$$\det \boldsymbol{T} = \frac{1}{g}\det(T_{ij}) = g\det(T^{ij}).$$

定理 14.4.10 仿射量行列式有以下性质：

（1）$\det(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}) = (\det \boldsymbol{T})(\det \boldsymbol{S})$；

（2）$\det(\alpha \boldsymbol{I}) = \alpha^n \det \boldsymbol{I}$，$\forall \alpha \in \mathbb{R}$；

（3）$\det \boldsymbol{0} = 0$，$\det \boldsymbol{I} = 1$；

（4）$\det \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \det \boldsymbol{T}$.

定义 14.4.11 若 $\forall \boldsymbol{T} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$，$\exists \boldsymbol{T}^{-1} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$，使下式成立：

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{I},$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位仿射量，则称 $\boldsymbol{T}$ 为**可逆仿射量**(invertible affinor).

显然，当且仅当 $\det \boldsymbol{T} \neq 0$ 时，$\boldsymbol{T}$ 可逆.

定理 14.4.12 $\forall \boldsymbol{T} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{S} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V})$，以下恒等式成立：

(1) $\det(\boldsymbol{S}^{-1}) = (\det \boldsymbol{S})^{-1}$；

(2) $(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T})^{-1} = \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{S}^{-1}$；

(3) $(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

为简单计，可记 $(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}^{-\mathrm{T}}$.

定义 14.4.13 定义简单张量 $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}$ 的**迹**(trace)为一标量：

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}.$$

推论 14.4.14 对于仿射量 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$，有以下的迹性质：

(1) $\operatorname{tr} \boldsymbol{S} = S^{i}{}_{i}$；

(2) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{S}) = S^{i}{}_{j} T^{j}{}_{i}$；

(3) $\boldsymbol{S} : \boldsymbol{T} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{T}) = S^{i}{}_{j} T^{i}{}_{j}$；

(4) $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{S} = \operatorname{tr} \boldsymbol{S}$.

仿射量的若干应用

(1) **椭球面方程的张量表示** 取仿射量

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{a^2} \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{b^2} \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3,$$

其中，a, b, c 为椭球面的主轴半径，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为与主轴方向一致的单位向量基. 椭球面标准形方程的张量写法为

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{r} = 1,$$

其中 $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$ 为位置向量.

(2) **三向量的向量积可用仿射量表示如下：**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) &= \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\Phi} \\ &= (\boldsymbol{b} \otimes \boldsymbol{c} - \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{a}. \end{aligned}$$

取 $\mathscr{V}^3$ 中的向量基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 及 $\{\boldsymbol{g}^i\}$，各向量可表示为

$$\boldsymbol{b} = b_i \boldsymbol{g}^i, \quad \boldsymbol{c} = c_j \boldsymbol{g}^j, \quad \boldsymbol{a} = a^k \boldsymbol{g}_k.$$

三重向量积 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ 的分量表达式易于求得为

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (b_i c_j - c_i b_j) a^j \boldsymbol{g}^i.$$

(3) **刚体的有限角位移** 在刚体的旋转轴上取单位向量 $\boldsymbol{a}$，当刚体转过角 θ 时，向量 $\boldsymbol{r}$ 变为 $\boldsymbol{r}'$，$\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 的向量关系为(见图 14.1)：

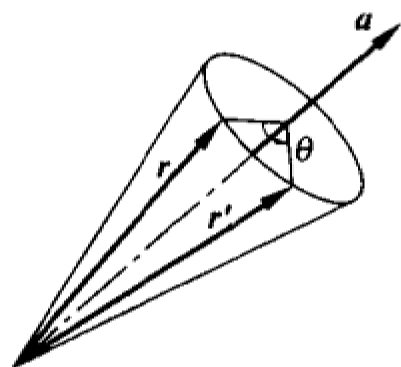


图 14.1

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{r},$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a}+\cos\theta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{a})+\sin\theta\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{I}.$$

(4) **刚体的惯性张量** 若刚体具有角速度 $\boldsymbol{\omega}$，其动能可表示为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\\&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i[\omega^2(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i)-(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)^2]\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{J}=\sum_{i=1}^{n}m_i[(\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{r}_i\otimes\boldsymbol{r}_i]$ 称为**惯性张量**(inertia tensor)，易于确证它是一个对称仿射量：

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}I_{xx}&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{yx}&I_{yy}&I_{yz}\\-I_{zx}&-I_{zy}&I_{zz}\end{pmatrix},$$

其中：$I_{xx}=\sum_{i=1}^{n}m_i(y_i^2+z_i^2)$，$I_{xy}=I_{yx}=\sum_{i=1}^{n}m_ix_iy_i$，余类推.

(5) **弹性体的应变能密度** 定义弹性体的**应力张量**(stress tensor)$\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{t}_i,$$

其中$\{\boldsymbol{e}_i\}$为正交向量基，$\boldsymbol{t}_i$ 为弹性体一点 P 处正交于 $\boldsymbol{e}_i$ 的平面上的应力. 将 $\boldsymbol{t}_i$ 沿正交基分解，可得 $\boldsymbol{t}_i=\sigma_{ij}\boldsymbol{e}_j$，其中 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ 称为**应力分量**，代入上式后可得应力张量的分量式：

$$\boldsymbol{T}=\sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j.$$

若弹性体的位移场为 $\boldsymbol{u}(x,y,z)$，定义**应变张量**为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\nabla)=\varepsilon_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j,$$

其中 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ 称为应变分量.

各向异性(包括各向同性)等温过程的本构方程为

$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\qquad(i,j,k,l=1,2,3),$$

其中 E_{ijkl} 为弹性常数，张量表达式为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}\qquad(\boldsymbol{E}=E_{ijkl}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k\otimes\boldsymbol{e}_l).$$

$\boldsymbol{E}$ 称为弹性张量(elasticity tensor).

弹性体的应变能密度定义为

$$U=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}:\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl},$$

其张量表达式为

$$U=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{E}:\boldsymbol{\varepsilon}.$$

14.4.2 仿射量的不变量

定义 14.4.15 若向量 $\boldsymbol{u}$ 与其映象 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}$ 具有相同方向：

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u},$$

则这方向称为 $\boldsymbol{T}$ 的**主方向**(principal direction). 由定义 14.4.11 可知：

$$(\boldsymbol{T}-\lambda\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}.$$

求 $\boldsymbol{T}$ 的主方向等价于解矩阵 $\boldsymbol{T}=(T^i{}_j)$ 的特征值问题. λ 的值由特征方程的根给出：

$$\det(\boldsymbol{T}-\lambda\boldsymbol{I})=\lambda^n-J_1\lambda^{n-1}+J_2\lambda^{n-2}+\cdots+(-1)^nJ_n=0,$$

其中 $J_k=\frac{1}{k!}\delta^{i_1i_2\cdots i_k}_{j_1j_2\cdots j_k}T^{j_1}{}_{i_1}\cdots T^{j_k}{}_{i_k}\quad(k=1,\cdots,n)$，$J_1,\cdots,J_n$ 称为仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的**主不变量**(principal invariants). 当 $n=3$ 时，

$$J_1=T^1{}_1+T^2{}_2+T^3{}_3=\frac{1}{1!}\delta^i_rT^r{}_i,$$

$$J_2=\begin{vmatrix}T^1{}_1 & T^1{}_2\\ T^2{}_1 & T^2{}_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T^2{}_2 & T^2{}_3\\ T^3{}_2 & T^3{}_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}T^3{}_3 & T^3{}_1\\ T^1{}_3 & T^1{}_1\end{vmatrix}=\frac{1}{2!}\delta^{ij}_{rs}T^r{}_iT^s{}_j,$$

$$J_3=\begin{vmatrix}T^1{}_1 & T^1{}_2 & T^1{}_3\\ T^2{}_1 & T^2{}_2 & T^2{}_3\\ T^3{}_1 & T^3{}_2 & T^3{}_3\end{vmatrix}=\frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst}T^r{}_iT^s{}_jT^t{}_k.$$

除主不变量外,较重要的不变量是矩(moment),它是仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的幂(仍为仿射量)的迹,定义矩为

$$J_1^*=\mathrm{tr}\ \boldsymbol{T}=T^i{}_i,$$

$$J_2^*=\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T})=T^i{}_jT^j{}_i,$$

$$J_3^*=\mathrm{tr}\ (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T})=T^i{}_jT^j{}_kT^k{}_i.$$

两类不变量不是独立的,它们之间存在以下关系:

$$J_1^*=J_1,$$

$$J_2^*=(J_1)^2-2J_2,$$

$$J_3^*=3J_3+(J_1)^3-3J_1J_2,$$

特征方程的根 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$称为 $\boldsymbol{T}$ 的**特征值**. 由于它们是不变量的函数,与坐标选择无关.

定理 14.4.16 Hamilton-Cayley 定理 仿射量 $\boldsymbol{T}$ 满足自身的特征方程:$\boldsymbol{T}^n-J_1\boldsymbol{T}^{n-1}+\cdots+(-1)^nJ_n\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$.

14.4.3 几种特殊仿射量的性质

定理 14.4.17 对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 有下列性质($n=3$):

(1) 实对称 仿射量 $\boldsymbol{S}$ 的 3 个特征值全是实数,且当特征根全是单根时,存在 3 个惟一的互相正交的主方向. 在有重特征根时,主方向不惟一,但恒存在互相正交的主方向.

(2) 仿射量 $\boldsymbol{S}$ 对任意单位向量 $\boldsymbol{r}$ 的 3 重积

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}=S_{ij}x^ix^j\qquad(\text{其中 } x^i=\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{r},\quad x^j=\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{r})$$

称为 $\boldsymbol{S}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 方向的**法分量**(normal component). 若 $\boldsymbol{T}$ 在任何方向的

法分量均大于零,则 $\boldsymbol{T}$ 称为**正定仿射量**(positive definite affinor).

正定性　对称仿射量的 3 个主不变量均大于零.

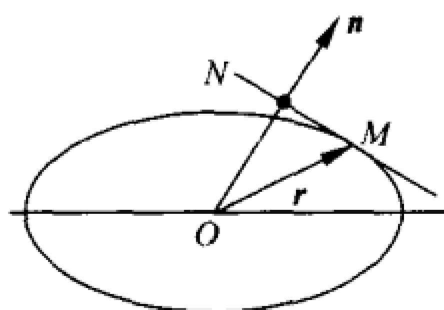


图　14.2

(3) 若 $\boldsymbol{S}\in\mathscr{T}(\mathscr{V}^3)$, $F(x^1,x^2,x^3)=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}=S_{ij}x^ix^j=$常数代表一椭球面,称为**张量椭球**(tensor ellipsoid). 由上式可导出

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\operatorname{grad}F.$$

它表明 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}$ 的方向恰与张量椭球上 M 点的法线方向一致(见图 14.2).

定理 14.4.18　反称仿射量 $\mathbf{A}$ 有下列性质:

(1) 在标准正交基中,反称仿射量矩阵具有反称性,以 $\mathbf{A}\in\mathscr{T}(\mathscr{V}^3)$ 为例:

$$\mathbf{A}=(A^i{}_j)=\begin{bmatrix}0 & A^1{}_2 & A^1{}_3\\ -A^1{}_2 & 0 & A^2{}_3\\ -A^1{}_3 & -A^2{}_3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \omega_3 & \omega_2\\ -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ -\omega_2 & -\omega_1 & 0\end{bmatrix}.$$

(2) 对于反称仿射量 $\mathbf{A}$,任何 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}^3$ 的象 $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{u}$ 均与 $\boldsymbol{u}$ 正交.

(3) 若 $n=3$, $\mathbf{A}$ 的不变量为: $I_1=I_2=0$,

$$I_3=(A^1{}_2)^2+(A^2{}_3)^2+(A^3{}_1)^2=\omega_1{}^2+\omega_2{}^2+\omega_3{}^2.$$

(4) 若 $n=3$,反称仿射量 $\mathbf{A}$ 只有一个实特征值 $\lambda=0$,另两个特征值是一对共轭复数.

定义 14.4.19　仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 称为**正交张量**(orthogonal tensor),若它保内积,即

$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v},\qquad\forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}.$$

定理 14.4.20　正交仿射量 $\boldsymbol{Q}$ 有下列性质:

(1) $\boldsymbol{Q}$ 保长度: $|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}|=|\boldsymbol{u}|$, $\forall\,\boldsymbol{u}\in\mathscr{V}$.

(2) 若 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是标准正交基,则 $\{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_i\}$ 也是标准正交基.

(3) $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$,即 $Q_{si}Q_{sj}=\delta_{ij}$(在标准正交基下).

(4) $\det \boldsymbol{Q} \det \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = (\det \boldsymbol{Q})^2 = 1$,故正交张量行列式值只有两种情况：

$$\det \boldsymbol{Q} = +1,\ 称\ \boldsymbol{Q}\ 为正常正交张量;$$

$$\det \boldsymbol{Q} = -1,\ 称\ \boldsymbol{Q}\ 为反常正交张量.$$

(5) 若 $\boldsymbol{Q} \in \mathscr{T}_2(\mathscr{V}^3)$,特征值有以下 3 种情形：

① $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$,

② $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$,

③ $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $\lambda_2 = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$.

14.4.4 仿射量的分解

定理 14.4.21 任何仿射量 $\boldsymbol{T}$ 可惟一地分解为对称部分 $\boldsymbol{S}$ 与反称部分 $\boldsymbol{A}$ 之和：

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

其中,$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})$.

定理 14.4.22 任何对称仿射量 $\boldsymbol{S}$ 可惟一地分解为**偏量**(deviational quantity)$\boldsymbol{D}$ 及**球量**(spherical quantity)$\boldsymbol{K}$ 之和：

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K},$$

其中,$\boldsymbol{K} = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S})\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S})\boldsymbol{I}$.

定义 14.4.23 若 $\det \boldsymbol{T} \neq 0$,仿射量称为**正则的**(canonical),否则称为**退化的**(degenerate).

定理 14.4.24 任何正则仿射量 $\boldsymbol{T}$ 可惟一地分解为正交对称张量 $\boldsymbol{V}$ 或 $\boldsymbol{U}$ 与正交张量 $\boldsymbol{Q}$ 的左或右的乘积：

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U}.$$

此分解称为**极分解**(polar decomposition).若 $\boldsymbol{Q}$ 已知,则 $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 可彼此互相确定如下：

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Q}.$$

定理 14.4.25 若 $\boldsymbol{S}$ 为对称仿射量，则在 $\mathscr{V}$ 中存在由 $\boldsymbol{S}$ 之特征向量组成之正交基，而且若此正交基按序号 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 与特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 相对应，则 $\boldsymbol{S}$ 可按（特征值）**谱分解**（spectral decomposition）如下：

$$\boldsymbol{S}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_i.$$

反之，若 $\boldsymbol{S}$ 可按正交基 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 分解如上式的形式，则 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{S}$ 以 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为特征向量所对应的特征值.

14.5 张量分析

14.5.1 赋范张量空间与距离

定义 14.5.1 **张量函数**（tensor function）是从若干个 r 阶张量空间的笛卡儿乘积到另一 s 阶张量空间的映射，即

$$\boldsymbol{\Phi}:\underbrace{\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\times\cdots\times\mathscr{T}_r(\mathscr{V})}_{m\text{次}}\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V}),$$

$$\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_m\mapsto\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_m),$$

其中 $\boldsymbol{T}_1,\cdots,\boldsymbol{T}_m\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$.

若 $r=0,1$，$k>2$，自变量分别为标量、向量及张量；若 $s=0,1$，$k>2$，函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 分别为标量值、向量值及张量值函数.

定义 14.5.2 设有 $\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，定义 r 阶张量 $\boldsymbol{T}$ 的**范数**（norm）为 $\|\boldsymbol{T}\|=\sqrt{\boldsymbol{T}\binom{r}{\cdot}\boldsymbol{T}}=\sqrt{\boldsymbol{T}\odot\boldsymbol{T}}$. 若 $\boldsymbol{T}$ 在标准正交基 $\{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r\}$ 上的表达式为 $\boldsymbol{T}=T^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\boldsymbol{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_r}$，则范数为

$$\|\boldsymbol{T}\|=\sqrt{T^{i_1\cdots i_r}T^{i_1\cdots i_r}},$$

即 $\|\boldsymbol{T}\|^2$ 等于 $\boldsymbol{T}$ 的所有标准正交基上分量的平方和. 若 $\boldsymbol{T}$ 在任意协变基 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 及逆变基 $\{\boldsymbol{g}^i\}$ 上的表达式分别为

$$T = T^{i_1 \cdots i_r} g_{i_1} \otimes g_{i_2} \otimes \cdots \otimes g_{i_r},$$
$$T = T_{i_1 \cdots i_r} g^{i_1} \otimes g^{i_2} \otimes \cdots \otimes g^{i_r},$$

则范数的表达式为

$$\| T \| = \sqrt{T^{i_1 \cdots i_r} T_{i_1 \cdots i_r}}.$$

定义了范数的张量空间称为**赋范张量空间**(normed tensor space)(范数的选定不是惟一的). $\forall T, S \in \mathcal{T}_r(\mathcal{V})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, 上述范数 $\| T \|$ 有以下性质:

(1) $\| T \| > 0$, 且 $\| T \| = 0 \Leftrightarrow T = 0$,

(2) $\| \alpha T \| = |\alpha| \, \| T \|$,

(3) $\| T + S \| \leqslant \| T \| + \| S \|$.

定理 14.5.3 $\forall T, S \in \mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ 有以下不等式:

$$T \odot S \leqslant \| T \| \cdot \| S \|$$

可视为赋范向量空间中 Schwarz 不等式(定理 7.1.3)的推广.

定义 14.5.4 设有 $T, S \in \mathcal{T}_r(\mathcal{V})$, 定义范数 $\| T - S \|$ 为 T 与 S 的**张量空间中的距离(度量)**(distance metric in tensor space), 并记作 $\rho(T, S) = \| T - S \|$. 距离有以下性质:

(1) 非负性 $\rho(T, S) \geqslant 0$, $\rho(T, S) = 0 \Leftrightarrow T = S$;

(2) 对称性 $\rho(T, S) = \rho(S, T)$;

(3) 三角不等式 $\rho(T, S) \leqslant \rho(T, U) + \rho(U, S)$.

定义了距离的张量空间 $\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ 称为以 $\rho(\ ,\ )$ 为距离的**距离空间**或**度量空间**(metric space).

定义 14.5.5 若存在赋范张量空间 $T \in \mathcal{T}_r(\mathcal{V})$, 使得

$$\lim_{k \to \infty} \rho(T_k, T) = \lim_{k \to \infty} \| T_k - T \| = 0.$$

则称序列 T_k 在 $\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ 中收敛到 T, T 称为张量空间中序列 T_k 的**极限**(limit), 记作 $\lim\limits_{k \to \infty} T_k = T$. $\mathcal{T}_r(\mathcal{V})$ 中的序列 T_k 的极限有以下性质:

(1) 序列 T_k 的极限是惟一的.

(2) 设$\boldsymbol{T}_k = T_k^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{e}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{T}=T^{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{e}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_r$. 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{T}_k=\boldsymbol{T}$的充要条件是

$$\lim_{k\to\infty}T_k^{i_1\cdots i_r}=T^{i_1\cdots i_r}.$$

(3) 若序列 $\boldsymbol{T}_k$ 有极限，则 $\exists M>0$，$\forall k$ 有 $\|\boldsymbol{T}_k\|\leqslant M$，即 $\boldsymbol{T}_k$ 为有界序列.

(4) 设 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{T}_k=\boldsymbol{T}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{S}_k=\boldsymbol{S}$，$\alpha\in\mathbb{R}$，则

$$\lim_{k\to\infty}\alpha\boldsymbol{T}_k=\alpha\boldsymbol{T},\quad \lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{T}_k+\boldsymbol{S}_k)=\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S},$$
$$\lim_{k\to\infty}(\boldsymbol{T}_k\odot\boldsymbol{S}_k)=\boldsymbol{T}\odot\boldsymbol{S}.$$

定义 14.5.6 设 $\boldsymbol{T}_0\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，$\delta>0$，称集合

$$\mathscr{U}(\boldsymbol{T}_0;\delta)=\{\boldsymbol{T}\mid\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V}),\ \rho(\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}_0)<\delta\}$$

为张量空间中点 $\boldsymbol{T}_0$ 的一个 **δ 邻域**(neiborhood)，δ 为该邻域的半径.

定义 14.5.7 若点 $\boldsymbol{T}_0$ 的每个邻域 $\mathscr{U}(\boldsymbol{T}_0;\delta)$都含有 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$中异于 $\boldsymbol{T}_0$ 的一个点，则称 $\boldsymbol{T}_0$ 是$\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$的**聚点**(accumulation point).

14.5.2 张量函数的极限与连续性

定义 14.5.8 设有赋范张量空间 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，$\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$及张量函数 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$，其中 $\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$. 设：(1)$\boldsymbol{T}_0$ 是 $\Omega\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$的聚点；(2)张量函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$定义在 $\Omega\backslash\boldsymbol{T}_0$ 上；(3)$\boldsymbol{\Phi}_0\in\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$. 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\boldsymbol{T}\in\Omega$，$0<\|\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_0\|<\delta$，就有 $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})-\boldsymbol{\Phi}_0\|<\varepsilon$，则称在 Ω 上，当 $\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}_0$ 时，张量函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$以 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 为极限，记作

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}_0\\ \boldsymbol{T}\in\Omega}}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{\Phi}_0\quad 或\quad \lim_{\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}_0}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{\Phi}_0.$$

注 此定义表明，若 $\boldsymbol{\Phi}_0=\Phi_0^{i_1\cdots i_s}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_s}$，$\lim\limits_{\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}_0}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{\Phi}_0$的充要条件是

$$\lim_{\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{T}_0}\Phi^{i_1\cdots i_s}(\boldsymbol{T})=\Phi_0^{i_1\cdots i_s}.$$

定义 14.5.9 **张量函数的连续性**(continuity of a tensor

function)的几种定义是等价的，它们的共同前提是：存在赋范张量空间 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，$\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 及张量函数 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$ 定义在 $\Omega\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 上，$\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{T}_0\in\Omega$.

(1) 若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\boldsymbol{T}\in\Omega\cap\mathscr{U}(\dot{\boldsymbol{T}}_0;\delta)$ 就有 $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}_0)\|<\varepsilon$，则称 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$ 在 Ω 上的 $\boldsymbol{T}_0$ 连续.

(2) 若对任意序列 $\boldsymbol{T}_n\in\Omega$，$\boldsymbol{T}_n\to\boldsymbol{T}_0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}_n)=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}_0)$，则称 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$ 在 $\boldsymbol{T}_0$ 连续.

(3) 设 $\boldsymbol{T}_0$，$\boldsymbol{T}_0+\Delta\boldsymbol{T}\in\Omega$，若

$$\lim_{\Delta\boldsymbol{T}\to 0}\Delta\boldsymbol{\Phi}=\lim_{\Delta\boldsymbol{T}\to 0}[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}_0+\Delta\boldsymbol{T})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}_0)]=\boldsymbol{0},$$

其中 $\Delta\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_0$，则称 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$ 在 $\boldsymbol{T}_0$ 连续.

注 此定义表明，若 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})=\Phi^{i_1\cdots i_s}(\boldsymbol{T})\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_s}$，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$ 在 $\boldsymbol{T}_0$ 连续的充要条件是每个分量函数 $\Phi^{i_1\cdots i_s}(\boldsymbol{T})$ 在 $\boldsymbol{T}_0$ 连续.

14.5.3 张量函数的导数与微分

引理 14.5.10 商法则(rule of quotient) 设有映射 $\boldsymbol{\Psi}$：$\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Phi}\mapsto\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi})$ 是 r 阶张量自变量的 s 阶张量函数，则存在惟一的 $\boldsymbol{\Theta}\in\mathscr{T}_{r+s}(\mathscr{V})$，使得在右 r-点乘意义下实现上述映射：

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{\Theta}\left(\begin{smallmatrix}r\\ \cdot\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{\Phi}.$$

在左 r-点乘意义下也可以得到类似结果.

定义 14.5.11 设 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 及 $\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 是赋范张量空间，$\mathscr{D}\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 是开子集. 张量函数 $\boldsymbol{\Phi}:\mathscr{D}\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 在 $\boldsymbol{T}\in\mathscr{D}$ 称为**可微的**，若存在线性变换

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T}):\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V}),\qquad \boldsymbol{U}\mapsto\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T})\left(\begin{smallmatrix}r\\ \cdot\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{U},$$

使得

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{U})=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T})\begin{pmatrix} r \\ \cdot \end{pmatrix}\boldsymbol{U}+o(\boldsymbol{U}), \tag{14.1}$$

式中 $o(\boldsymbol{U})$ 表示：当 $\|\boldsymbol{U}\|$ 为小量时，$\|o(\boldsymbol{U})\|$ 为 $\|\boldsymbol{U}\|$ 的高阶小量. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T})$ 常简记为 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}$，称为**张量函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{T}\in\mathscr{D}$ 的导数**（或**梯度**）.

由定理 14.4.10 可知，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}$ 是 $r+s$ 阶张量. 换言之，张量函数对张量自变量求导后得到一个高阶的张量.

定理 14.5.12 若 $\boldsymbol{\Phi}$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}$ 存在，则它是惟一的，且 $\forall \boldsymbol{U}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\begin{pmatrix} r \\ \cdot \end{pmatrix}\boldsymbol{U}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}+s\boldsymbol{U})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})]$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\begin{pmatrix} r \\ \cdot \end{pmatrix}\boldsymbol{U}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}+s\boldsymbol{U})|_{s=0}. \tag{14.2}$$

定义 14.5.13 张量函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 的增量的线性部分称为**张量函数的微分**（differential of tensor function），记作

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T};\boldsymbol{U})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\begin{pmatrix} r \\ \cdot \end{pmatrix}\boldsymbol{U}. \tag{14.3}$$

式(14.1)～式(14.3)都可用来求张量函数的导数，可视不同情况选择不同的方法，现举例说明.

例 14.5.14 设 $\{\boldsymbol{g}_i\}$ 是 $\mathscr{V}$ 的基，仿射量 $\boldsymbol{T}$ 的函数 $W(\boldsymbol{T})$ 的梯度可求之如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W(T_{ij};U_{ij})&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}W(T_{ij}+sU_{ij})\Big|_{s=0}=\frac{\partial W}{\partial T_{ij}}U_{ij}\\&=\frac{\partial W}{\partial T_{ij}}\delta_i^r\delta_j^sU_{rs}=\left(\frac{\partial W}{\partial T_{ij}}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\right):(U_{rs}\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}^s).\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\partial W}{\partial T_{ij}}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j.$$

例 14.5.15 求仿射量的标量函数 $W(\boldsymbol{T})=\boldsymbol{T}:\boldsymbol{T}$ 的导数与微分.

由于 $W(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{U})=(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{U}):(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{U})=\boldsymbol{T}:\boldsymbol{T}+2\boldsymbol{T}:\boldsymbol{U}+o(\boldsymbol{U})$,立即得到 $\mathrm{d}W(\boldsymbol{T},\boldsymbol{U})=2\boldsymbol{T}:\boldsymbol{U}$,$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{T})=2\boldsymbol{T}$.

例 14.5.16 设$\{\boldsymbol{g}_i\}$是 $\mathscr{V}$ 的基,$\boldsymbol{F}\in\mathscr{T}_2(\mathscr{V})$,$\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}_2(\mathscr{V})$,求导数$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}$.

用分量形式表达的 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 有以下形式:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}(T_{kl},U_{kl})&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F^{ij}(T_{kl}+sU_{kl})\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\bigg|_{s=0}\\&=\frac{\partial F^{ij}}{\partial T_{kl}}U_{kl}\,\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\\&=\left(\frac{\partial F^{ij}}{\partial T_{kl}}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l\right):(U_{sr}\boldsymbol{g}^r\otimes\boldsymbol{g}^s).\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\partial F^{ij}}{\partial T_{kl}}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_l.$$

此外还可得到$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\partial F^i{}_j}{\partial T^k{}_l}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}^j\otimes\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_l$等各种形式.

定理 14.5.17 设有张量函数

$$\boldsymbol{\Phi}:\ \Omega\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V}),\qquad \boldsymbol{T}\in\Omega\mapsto\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T}),$$

则 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$在 $\boldsymbol{T}_0\in\Omega$ 可微的充要条件为:$\boldsymbol{\Phi}$ 的每个分量函数 $\Phi^{i_1\cdots i_s}$:$\Omega\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathbb{R}$ 在 $\boldsymbol{T}_0$ 可微.

定理 14.5.18 若张量函数 $\boldsymbol{\Phi}:\Omega\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$,$\boldsymbol{T}\in\Omega\mapsto\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$在 $\boldsymbol{T}_0\in\Omega$ 可微,则 $\boldsymbol{\Phi}$ 在 $\boldsymbol{T}_0$ 连续.

定理 14.5.19 若张量函数 $\boldsymbol{\Phi}:\Omega\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$,$\boldsymbol{T}\mapsto\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})$

的所有偏导数$\dfrac{\partial \phi^{i_1\cdots i_s}}{\partial T^{j_1\cdots j_r}}$在$\Omega$内处处存在且在$\boldsymbol{T}_0\in\Omega$连续，则$\boldsymbol{\Phi}$在$\boldsymbol{T}_0$可微.

定理 14.5.20 函数 $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}^k$的导数等于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}^k)=k(\boldsymbol{T}^{k-1})^{\mathrm{T}}.$$

推论 14.5.21 正则仿射量$\boldsymbol{T}$的行列式$W(\boldsymbol{T})=\det\boldsymbol{T}$的微分和导数分别是

$$\mathrm{d}W(\boldsymbol{T};\boldsymbol{U})=(\det\boldsymbol{T})\,\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{U})=(\det\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-\mathrm{T}}:\boldsymbol{U},$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\det\boldsymbol{T})=(\det\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-\mathrm{T}}.$$

定理 14.5.22 n阶仿射量$\boldsymbol{T}$的不变量$J_k(\boldsymbol{T})$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}J_k}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=[J_{k-1}\boldsymbol{I}-J_{k-2}\boldsymbol{T}+J_{k-3}\boldsymbol{T}^2-\cdots+(-1)^{k-1}\boldsymbol{T}^{k-1}]^{\mathrm{T}}$$

$$(k=1,2,\cdots,n).$$

在应用上述公式时，取$J_0\equiv 0$，$J_{n+1}\equiv 0$.

推论 14.5.23 三阶仿射量$\boldsymbol{T}$的不变量$J_k(\boldsymbol{T})$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I},$$

$$\frac{\mathrm{d}J_2}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\frac{1}{2}[\mathrm{tr}^2\boldsymbol{T}-\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T}^2]=(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\mathrm{d}J_3}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\det\boldsymbol{T}=(\det\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-\mathrm{T}}.$$

定理 14.5.24 设$\mathscr{T}_p(\mathscr{V})$，$\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$，$\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$为赋范张量空间，$\mathscr{V}$为赋范向量空间，下列函数

$$\boldsymbol{F}:\mathscr{D}\to\mathscr{T}_r(\mathscr{V});\qquad \boldsymbol{T}\mapsto\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}),$$

$$\boldsymbol{G}:\mathscr{D}\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V});\qquad \boldsymbol{T}\mapsto\boldsymbol{G}(\boldsymbol{T}),$$

$$\boldsymbol{u}:\mathscr{D}\to(\mathscr{V});\qquad \boldsymbol{T}\mapsto\boldsymbol{u}(\boldsymbol{T})$$

在$\boldsymbol{T}\in\mathscr{D}\subset\mathscr{T}_p(\mathscr{V})$可微，$\mathscr{D}$是开子集. 则有以下求导公式(Leibniz

法则)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{G})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\otimes\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}\otimes\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\left(\boldsymbol{F}\left(\begin{smallmatrix}e\\ \cdot\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{G}\right)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}\left(\begin{smallmatrix}e\\ \cdot\end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{G}+\boldsymbol{F}\left(\begin{smallmatrix}e\\ \cdot\end{smallmatrix}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}.$$

定理 14.5.25 链式法则 设 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V}),\mathscr{T}_s(\mathscr{V}),\mathscr{T}_t(\mathscr{V})$ 为赋范张量空间，$\mathscr{D}\subset\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$ 和 $\mathscr{C}\subset\mathscr{T}_s(\mathscr{V})$ 是相应的开子集. 给定张量函数

$$\boldsymbol{F}:\mathscr{D}\to\mathscr{T}_s(\mathscr{V});\qquad \boldsymbol{T}\mapsto\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}),$$

$$\boldsymbol{G}:\mathscr{C}\to\mathscr{T}_t(\mathscr{V});\qquad \boldsymbol{F}\mapsto\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}),$$

其中 $\mathscr{D}\subset\mathscr{C}$，设 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 分别在 $\boldsymbol{T}\in\mathscr{D}$ 和 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T})\in\mathscr{C}$ 可微，则复合函数 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{G}\circ\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{T}$ 可微，且有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}\left(\begin{smallmatrix}s\\ \cdot\end{smallmatrix}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}.$$

推论 14.5.26 当 $\mathscr{T}_r(\mathscr{V})=\mathbb{R}$ 时，$\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(t))$ 时，则有

$$\dot{\boldsymbol{H}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}\left(\begin{smallmatrix}s\\ \cdot\end{smallmatrix}\right)\dot{\boldsymbol{F}}.$$

定理 14.5.27 设 $\boldsymbol{T}(t)$ 是在 $\mathscr{B}\subset\mathbb{R}$ 上的光滑仿射量值函数，则有

$$(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})^{\cdot}=(\dot{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{T}}\equiv\dot{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}.$$

若 $\boldsymbol{T}(t)$ 在 $t\in\mathscr{B}$ 可逆，则

$$(\det\boldsymbol{T})^{\cdot}=(\det\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-\mathrm{T}}:\dot{\boldsymbol{T}}.$$

定理 14.5.28 设 $\boldsymbol{\Phi}(t),\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是在 $\mathscr{B}\subset\mathbb{R}$ 上的光滑仿射量值函数，则有

$$(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}\otimes\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi}\otimes\dot{\boldsymbol{\Psi}},$$

$$(\boldsymbol{\Phi}\cdot\boldsymbol{\Psi})^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{\Phi}}\cdot\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\Phi}\cdot\dot{\boldsymbol{\Psi}},$$

$$(\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}})^{\cdot}=(\dot{\boldsymbol{\Phi}})^{\mathrm{T}},$$

$$(\boldsymbol{\Phi}^m)^{\cdot} = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{\Phi}^{k-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{m-k},$$

$$(\boldsymbol{\Phi}^{-1})^{\cdot} = -\boldsymbol{\Phi}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{-1} \qquad (\boldsymbol{\Phi}\ 可逆).$$

14.6 张量场

14.6.1 张量场及绝对微分学

定义 14.6.1 定义在开集 $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ 的**张量场**(tensor field)$\boldsymbol{\Phi}$ 是一个函数，它在每一点 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{U}$ 上的值是一个同类型张量：

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \Phi^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} \boldsymbol{g}_{i_1}(\boldsymbol{x}) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}_{i_r}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{g}^{j_1}(\boldsymbol{x}) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{g}^{j_s}(\boldsymbol{x}).$$

若点 $\boldsymbol{x}$ 的仿射坐标是$\{x^i\}$，则 $\boldsymbol{\Phi}$ 在定义在 $\mathscr{V}$ 的基向量上各分量 $\Phi^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s}$ 是 n 元$\{x^i\}$的实函数. 若 $\Phi^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s}$ 在 $\mathscr{U}$ 上是 x^i 的 C^∞ 函数(任意次连续可微)，则$(r+s)$阶张量场 $\boldsymbol{\Phi}$ 称为 C^∞ 或**光滑的**(smooth). 今后只限于论述光滑张量场.

定义 14.6.2 设 $\mathscr{V}$ 及 $\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$ 分别为赋范向量空间及赋范张量空间，则张量场 $\boldsymbol{\Phi} \in \mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$ 在点 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ 上的**绝对微分**(absolute differential)定义为

$$D\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \lim_{s \to 0}[\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})]/s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{u})\Big|_{s=0}.$$

仿此可定义任意 m 阶绝对微分，记作 $D^m\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ $(D^m\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = D[D^{m-1}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})])$. 若对于任何 m, $D^m\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$存在且连续，则称 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$为**光滑张量场**，记作 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \in C^\infty(\mathscr{U})$.

定理 14.6.3 光滑张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$在点 $\boldsymbol{x}$ 处的绝对微分等于

$$D\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\Phi} \otimes \nabla)(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \otimes \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{x}).$$

$\boldsymbol{\Phi} \otimes \nabla$ 和 $\nabla \otimes \boldsymbol{\Phi}$ 分别称为 $\boldsymbol{\Phi}$ 的**右梯度**(right gradient)和**左梯度**(left gradient). 当 $\boldsymbol{\Phi}$ 是 $r+s$ 阶张量场时，$\boldsymbol{\Phi} \otimes \nabla$ 和 $\nabla \otimes \boldsymbol{\Phi}$ 都是 $r+s+1$ 阶张量场.

注 右梯度和左梯度一般不相等，即

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla \neq \nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}.$$

以二阶张量场为例：$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{ij}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j$的右梯度及左梯度分别为

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla=\frac{\partial\Phi^{ij}}{\partial x^k}\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j\otimes\boldsymbol{g}^k,$$

$$\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}=\frac{\partial\Phi^{ij}}{\partial x^k}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_i\otimes\boldsymbol{g}_j.$$

定理 14.6.4 张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$的右梯度和左梯度在仿射坐标基向量上的表达式为

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla=\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}\otimes\boldsymbol{g}^k,$$
$$\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}=\partial_k\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s},$$

其中$(\quad)_{,k}$及$\partial_k(\quad)$均表示$\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\quad)$.

定理 14.6.5 右和左梯度运算是线性的，且满足修正的 Leibniz 法则：

(1) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，对于任何同阶的张量场 $\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}$ 有

$$(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})\otimes\nabla=\alpha(\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla)+\beta(\boldsymbol{\Psi}\otimes\nabla),$$
$$\nabla\otimes(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})=\alpha\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}+\beta\nabla\otimes\boldsymbol{\Psi};$$

(2) 设 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 分别是 p 阶和 q 阶张量场，则有

$$(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})\otimes\nabla=\boldsymbol{T}_\sigma((\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla)\otimes\boldsymbol{\Psi})+\boldsymbol{\Phi}\otimes(\boldsymbol{\Psi}\otimes\nabla),$$
$$\nabla\otimes(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})=(\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi})\otimes\boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{T}_\tau(\boldsymbol{\Phi}\otimes(\nabla\otimes\boldsymbol{\Psi})),$$

其中

$$\sigma=\begin{pmatrix}i_1\cdots,i_p,j_1,\cdots j_q,k\\ i_1\cdots,i_p,k,j_1,\cdots,j_q\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}k,i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\\ i_1,\cdots,i_p,k,j_1,\cdots,j_q\end{pmatrix}.$$

推论 14.6.6 上述定理的分量形式可表为

(1) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^r_s(\mathscr{V})$，$\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}^r_s(\mathscr{V})$，及 $\boldsymbol{\Theta}=\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi}$，有

$$(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})\otimes\nabla=\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}\otimes\boldsymbol{g}^k,$$
$$\nabla\otimes(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})=\partial_k\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s},$$

其中

$$\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}=\partial_k\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}=\alpha\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}+\beta\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}.$$

(2) $\forall\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^p(\mathscr{V})$ 及 $\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}_q(\mathscr{V})$ 及 $\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$ 有

$$(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})\otimes\nabla=\Theta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q,k}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_q}\otimes\boldsymbol{g}^k,$$

$$\nabla\otimes(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})=\partial_k\Theta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_q},$$

其中

$$\Theta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q,k}=\partial_k\Theta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}$$
$$=\Phi^{i_1\cdots i_p}{}_{,k}\Psi_{j_1\cdots j_q}+\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi_{j_1\cdots j_q,k}.$$

定理 14.6.7 若 $\boldsymbol{I}$ 是 $\mathscr{V}$ 的单位仿射量场,则有

$$D\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{I}\otimes\nabla=\nabla\otimes\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}.$$

定理 14.6.8 若 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是 $\mathscr{V}$ 的 Eddington 张量场,则有

$$D\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}\times\nabla=\nabla\times\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{0}.$$

14.6.2 曲线坐标中的张量场

设$\{\bar{\boldsymbol{g}}_s(\boldsymbol{x})\}$是定义在 $\mathscr{V}$ 上的仿射坐标系$\{x^s\}$的协变基,$\{\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})\,|\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})=\beta_i^s(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{g}}_s(\boldsymbol{x})\}$为曲线坐标系$\{q^i\}$的自然局部基,其中

$$\beta_i^s(\boldsymbol{x})=\left.\frac{\partial x^s}{\partial q^i}\right|_{\boldsymbol{x}},\qquad \beta_s^i(\boldsymbol{x})=\left.\frac{\partial q^i}{\partial x^s}\right|_{\boldsymbol{x}}.$$

将张量场函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$在每点 $\boldsymbol{x}$ 的自然局部基上分解,其表达式为

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_r}\otimes\boldsymbol{g}^{j_1}\otimes\cdots\boldsymbol{g}^{j_s}.$$

于是有以下关于曲线坐标系中的张量场定理.

定理 14.6.9 设$\{x^i\}$为 $\mathscr{V}$ 中的仿射坐标系,则在曲线坐标系$\{q^i\}$中,任意光滑张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{T}_s^r(\mathscr{V})$有以下形式的右梯度与左梯度:

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla=\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}\otimes\boldsymbol{g}^k,$$

$$\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}=\nabla_k\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s},$$

其中定义**张量分量的协变导数**为

$$\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}=\nabla_k\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$$

$$=\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s,k}+\Gamma^{i_1}_{km}\Phi^{mi_2\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}+\cdots+\Gamma^{i_r}_{km}\Phi^{i_1\cdots i_{r-1}m}{}_{j_1\cdots j_s}$$

$$-\Gamma^{n}_{kj_1}\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{nj_2\cdots j_s}-\cdots-\Gamma^{n}_{kj_s}\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{s-1}n},$$

其中 $\Gamma^i_{jk}=\dfrac{\partial q^i}{\partial x^s}\dfrac{\partial^2 x^s}{\partial q^j\partial q^k}$是第二类 Christoffel 符号(见定义 13.6.10),也称为曲线坐标系$\{q^i\}$中的**联络系数**(coefficient of connection).

张量场的右、左梯度还可用逆变导数分量形式表达:

$$\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla=\Phi^{i_1\cdots i_r;k}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}\otimes\boldsymbol{g}_k,$$

$$\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}=\nabla^k\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}_k\otimes\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s},$$

其中形式地定义"逆变导数"如下:

$$\Phi^{i_1\cdots i_r;k}{}_{j_1\cdots j_s}\equiv\nabla^k\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}=\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;l}\,g^{lk}.$$

换言之,"逆变导数"是借助于协变导数的指标升降法则得到的.

定理 14.6.10 由曲线坐标系$\{q^i\}$至曲线坐标系$\{q^{i'}\}$,联络系数的转换法则是

$$\Gamma^{i'}_{j'k'}=\beta^{i'}_i\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}\Gamma^i_{jk}+\beta^{i'}_i\partial_{j'}\beta^i_{k'}=\beta^{i'}_i\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}\Gamma^i_{jk}-\beta^j_{j'}\beta^k_{k'}\partial_j\beta^{i'}_k,$$

其中

$$\beta^{i'}_i=\frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i},\qquad\beta^i_{i'}=\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'}}.$$

定理 14.6.11 协变(逆变)导数运算是一种线性运算,且满足 Leibniz 法则:

(1) $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^r_s(\mathscr{V})$, $\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}^r_s(\mathscr{V})$及$\boldsymbol{\Theta}=\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi}$,有

$$(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})\otimes\nabla=\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s}\otimes\boldsymbol{g}^k,$$

$$\nabla\otimes(\alpha\boldsymbol{\Phi}+\beta\boldsymbol{\Psi})=\nabla_k\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_s},$$

其中 $\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}\equiv\nabla_k\Theta^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}=\alpha\Phi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}+\beta\Psi^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}$.

(2) $\forall\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}^p(\mathscr{V})$, $\boldsymbol{\Psi}\in\mathscr{T}_p(\mathscr{V})$及$\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi}$,有

$$(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})\otimes\nabla=\Theta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q;k}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_q}\otimes\boldsymbol{g}^k,$$

$$\nabla\otimes(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})=\nabla_k\Theta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_q},$$

其中 $\Theta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q;k}\equiv\nabla_k\Theta^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}=\Phi^{i_1\cdots i_p}{}_{;k}\Psi_{j_1\cdots j_q}+\Phi^{i_1\cdots i_p}\Psi_{j_1\cdots j_q;k}$.

定理 14.6.12 度量张量 $\boldsymbol{I}$ 的任何分量(协变、逆变、混变)的协变导数恒为零(**Ricci 引理**(Ricci lemma))

$$\nabla_i\boldsymbol{g}_{jk}=0,\quad \nabla_i\delta^j_k=0,\quad \nabla_i\boldsymbol{g}^{jk}=0.$$

定理 14.6.13 置换张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的分量的协变导数恒为零

$$\nabla_k\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=0,\quad \nabla_k\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=0.$$

定理 14.6.14 缩并和协变求导的次序可以交换. 以特例说明如下:对$(\Phi^{jk}\Psi_p)$的指标 k,p 进行缩并后求协变导数与先求协变导数后缩并结果相同.

$$(\Phi^{jr}\Psi_r)_{;i}=\Phi^{jr}{}_{;i}\Psi_r+\Phi^{jr}\Psi_{r;i}.$$

定义 14.6.15 $\mathscr{V}^3$ 中的向量场**不变性微分算子**(invariant differential operators)可推广至 $\mathscr{V}^n$ 中任意 r 阶张量场如下:

(1) $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$的梯度定义为

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}=\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}=\nabla_k\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r},$$

它是 $r+1$ 阶张量场.

(2) $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V})$的散度定义为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}=\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi}=\mathbf{C}_{(1,2)}\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}=\nabla^k\Phi_{ki_2\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r},$$

它是 $r-1$ 阶张量场.

(3) $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$的 Laplace 定义为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\Phi}&=\operatorname{div}(\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi})=\nabla\cdot\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}\\&=\nabla^k\nabla_k\Phi_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_r},\end{aligned}$$

它仍是 r 阶张量场.

注 迄今为止,$\mathscr{V}^n$ 中 r 阶张量场的旋度尚无统一定义,现列举两种定义如下:

(1) $\operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi}=\mathscr{A}(\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi})$,并重新定义向量 $\boldsymbol{u}$ 的旋度为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j;$$

(2) 定义张量场 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 的旋转(rotation)为 $\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}=(r+1)\mathscr{A}(\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi})$，而 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$ 的旋度则定义为旋转的对偶

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi}=*\operatorname{rot}\boldsymbol{\Phi}=(r+1)*\mathscr{A}(\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}).$$

两种定义给出的张量场旋度不但表达式不同，张量阶数也不相同.

对于 $\mathscr{V}^3$ 中的 $(r\leqslant 3)$ 阶张量场，则可有统一的定义：

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi}=\nabla\times\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{g}^k\times\Phi_{ij}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j=\frac{e^{kit}}{\sqrt{g}}\nabla_k\Phi_{ij}\boldsymbol{g}_t\otimes\boldsymbol{g}^j.$$

$\mathscr{V}^3$ 中任意曲线坐标中的微分算子

以下汇集的微分算子公式只涉及向量场 $\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{g}^i$ 及仿射量场

$$\boldsymbol{\Phi}=\Phi_{ij}\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j.$$

(1) 向量梯度

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{u}=\nabla\otimes\boldsymbol{u}=\nabla_k u_i\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}^i\qquad(\text{二阶张量}),$$

其中

$$\nabla_k u_i=u_{i,k}-\Gamma^n_{ki}u_n.$$

(2) 仿射量梯度

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}=\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}=\nabla_k\Phi_{ij}\boldsymbol{g}^k\otimes\boldsymbol{g}^i\otimes\boldsymbol{g}^j\qquad(\text{三阶张量}),$$

其中

$$\nabla_k\Phi_{ij}=\Phi_{ij,k}-\Gamma^m_{ki}\Phi_{mj}-\Gamma^m_{kj}\Phi_{im}.$$

(3) 仿射量散度

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi}&=\mathbf{C}_{(1,2)}\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}=\nabla^k\Phi_{kj}\boldsymbol{g}^j=g^{sk}\nabla_s\Phi_{kj}\boldsymbol{g}^j\qquad(\text{向量})\\&=g^{sk}[\Phi_{kj,s}-\Gamma^m_{sk}\Phi_{mj}-\Gamma^m_{sj}\Phi_{km}]\boldsymbol{g}^j.\end{aligned}$$

(4) 仿射量旋度

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi}=\frac{e^{kit}}{\sqrt{g}}\nabla_k\Phi_{ij}\boldsymbol{g}_t\otimes\boldsymbol{g}^j\qquad(\text{二阶张量}),$$

其中 $\nabla_k\Phi_{ij}$ 已由(2)给出，e^{krt} 为置换符号.

(5) 向量 Laplace 算子

$$\Delta\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{u}=\nabla^k\nabla_k u_i\boldsymbol{g}^i\qquad(\text{向量}),$$

其中

$$\nabla^k \nabla_k u_i = g^{sk}[u_{i,ks} - \Gamma^n_{ki,s} u_n - \Gamma^n_{ki} u_{n,s} - \Gamma^m_{si}(u_{m,k} - \Gamma^n_{km} u_n) - \Gamma^m_{sk}(u_{i,m} - \Gamma^n_{mi} u_n)]$$

(6) 仿射量 Laplace 算子

$$\Delta \boldsymbol{\Phi} = \nabla \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{\Phi} = \nabla^k \nabla_k \Phi_{ij} \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j \quad \text{(二阶张量)},$$

其中

$$\begin{aligned} \nabla^k \nabla_k \Phi_{ij} &= \boldsymbol{g}^{sk} \nabla_s \nabla_k \Phi_{ij} \\ &= g^{sk}[\Phi_{ij,ks} - \Gamma^n_{ki,s} \Phi_{mj} - \Gamma^m_{kj,s} \Phi_{im} - \Gamma^m_{ki} \Phi_{mj,s} \\ &\quad - \Gamma^m_{kj} \Phi_{im,s} - \Gamma^n_{si}(\Phi_{nj,k} - \Gamma^m_{kn} \Phi_{mj} - \Gamma^m_{kj} \Phi_{nm}) \\ &\quad - \Gamma^n_{sj}(\Phi_{in,k} - \Gamma^m_{ki} \Phi_{mn} - \Gamma^m_{kn} \Phi_{im}) - \Gamma^n_{sk}(\Phi_{ij,n} \\ &\quad - \Gamma^m_{ni} \Phi_{mj} - \Gamma^m_{nj} \Phi_{im})] \end{aligned}$$

$\mathscr{V}^3$ 中正交曲线坐标系中的物理分量

设 $\boldsymbol{u} = \hat{u}_i \boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{\Phi} = \hat{\Phi}_{ij} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j$,其中 $\hat{u}_i$ 及 $\hat{\Phi}_{ij}$ 分别是 $\boldsymbol{u}$ 及 $\boldsymbol{\Phi}$ 在$\{\boldsymbol{e}^i\}$上的物理分量.

(1) 向量梯度$\nabla \boldsymbol{u}$ 的物理分量

$$\nabla \boldsymbol{u} = (\nabla u)_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j,$$

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{11} = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial q^1} + \frac{\hat{u}_2}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q^2} + \frac{\hat{u}_3}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q^3}\right),$$

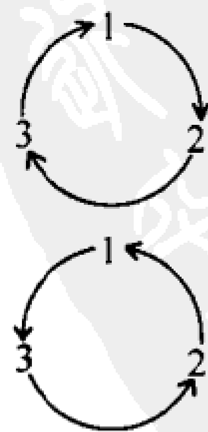
$$(\nabla \boldsymbol{u})_{12} = \frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial q^1} - \frac{\hat{u}_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q^2}\right),$$

$$(\nabla \boldsymbol{u})_{21} = \frac{1}{h_2}\left(\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial q^2} - \frac{\hat{u}_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q^1}\right).$$

其他分量按以下方式求得:

(1 1)→(2 2),(3 3)
(1 2)→(2 3),(3 1)　　正循环

(2 1)→(1 3),(3 2)　　逆循环



(2) 仿射量散度$\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi}$的物理分量

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi}=(\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi})_i\boldsymbol{e}^i,$$

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi})_1=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(h_2h_3\hat{\Phi}_{11})\frac{\partial}{\partial q^2}(h_3h_1\hat{\Phi}_{21})\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q^3}(h_2h_1\hat{\Phi}_{31})\right]+\frac{\hat{\Phi}_{12}}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q^2}+\frac{\hat{\Phi}_{13}}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q^3}-\frac{\hat{\Phi}_{22}}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial q^1}-\frac{\hat{\Phi}_{33}}{h_1h_3}\frac{\partial h_3}{\partial q^1},$$

另外两分量$(\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi})_2$,$(\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi})_3$只需将$(\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi})_1$式中各指标依次按正循环变换即可求得.

(3) 仿射量旋度$\nabla\times\boldsymbol{\Phi}$的物理分量

$$\nabla\times\boldsymbol{\Phi}=(\nabla\times\boldsymbol{\Phi})_{ij}\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j,$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{\Phi})_{11}=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3\hat{\Phi}_{31})}{\partial q^2}-\frac{\partial(h_2\hat{\Phi}_{21})}{\partial q^3}\right]+\frac{\hat{\Phi}_{23}}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q^1}$$
$$-\frac{\hat{\Phi}_{32}}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q^1},$$

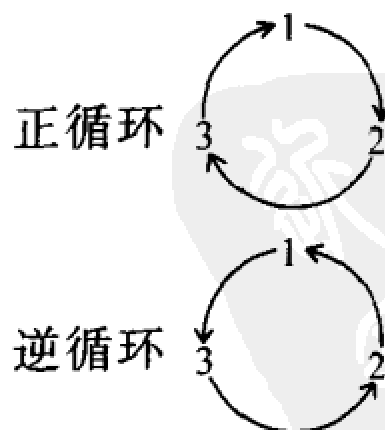
$$(\nabla\times\boldsymbol{\Phi})_{12}=\frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_3\hat{\Phi}_{32})}{\partial q^2}-\frac{\partial(h_2\hat{\Phi}_{22})}{\partial q^3}\right]+\frac{\hat{\Phi}_{31}}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q^1}$$
$$+\frac{\hat{\Phi}_{23}}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial q^2}+\frac{\hat{\Phi}_{33}}{h_2h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q^3},$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{\Phi})_{21}=\frac{1}{h_3h_1}\left[\frac{\partial(h_1\hat{\Phi}_{11})}{\partial q^3}-\frac{\partial(h_3\hat{\Phi}_{31})}{\partial q^1}\right]-\frac{\hat{\Phi}_{32}}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q^2}$$
$$-\frac{\hat{\Phi}_{13}}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial q^1}-\frac{\hat{\Phi}_{33}}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial q^3}.$$

其他分量按以下方式求得:

$(1\ 1)\to(2\ 2),(3\ 3)$
$(1\ 2)\to(2\ 3),(3\ 1)$ } 正循环

$(2\ 1)\to(1\ 3),(3\ 2)$ 逆循环



14.6.3 张量场的积分定理

定义 14.6.16 多维空间$\mathscr{V}^n$中的**单连通域**(simply connected

domain)是指嵌于 $\mathscr{V}^n$ 内的 m 维($m<n$)封闭超曲面 $\Omega\subset\mathscr{V}^m$，并能实现双连续变换 $\Omega\to\Omega'$，$x\mapsto\xi$，使得

$$0\leqslant\xi^1\leqslant 1,\cdots,0\leqslant\xi^m\leqslant 1.$$

定义 14.6.17　Grassmann(格拉斯曼)**容积元素**(Grassmann's volume element)定义为

$$\mathrm{d}V^{i_1\cdots i_m}=m!\,\underset{1}{\mathrm{d}\xi}^{[i_1}\cdots\underset{m}{\mathrm{d}\xi}^{i_m]},$$

其中 $\underset{1}{\mathrm{d}\xi}^{i_1},\cdots,\underset{m}{\mathrm{d}\xi}^{i_m}$ 为 $\mathscr{V}^m(\mathscr{V}^m\subset\mathscr{V}^n)$ 中的 m 个线性无关向量微元的分量. Grassmann 容积元可用张量表示：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{(m)}=\mathrm{d}V^{i_1\cdots i_m}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_m}.$$

若诸向量微元按以下方式选择：

$$\begin{array}{llll}
\underset{1}{\mathrm{d}\xi}^1=\mathrm{d}\xi^1, & \underset{1}{\mathrm{d}\xi}^2=0, & \cdots, & \underset{1}{\mathrm{d}\xi}^n=0,\\
\underset{2}{\mathrm{d}\xi}^1=0, & \underset{2}{\mathrm{d}\xi}^2=\mathrm{d}\xi^2, & \cdots, & \underset{2}{\mathrm{d}\xi}^n=0,\\
\vdots & & & \\
\underset{m}{\mathrm{d}\xi}^1=0, & \underset{m}{\mathrm{d}\xi}^2=0, & \cdots, & \underset{m}{\mathrm{d}\xi}^m=\mathrm{d}\xi^m,\\
\underset{m}{\mathrm{d}\xi}^{m+1}=0, & & \cdots, & \underset{m}{\mathrm{d}\xi}^n=0.
\end{array}$$

则有 $\mathrm{d}V^{1\cdots m}=\mathrm{d}\xi^1\cdots\mathrm{d}\xi^m$，或

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{(m)}=\mathrm{d}V^{1\cdots m}\boldsymbol{g}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_m=\mathrm{d}V^{(m)}\boldsymbol{g}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_m.$$

定义 14.6.18　记单连通域 $\Omega\subset\mathscr{V}^m$ 的边界为 $\partial\Omega\subset\mathscr{V}^{m-1}$，在 $\xi_j=\mathrm{const}(j\neq i)$ 所示超曲线 C^i 与 $\partial\Omega$ 的交点(最多只有两个交点)处取平行多面体元 $\mathrm{d}V^{(m)}$，若 $\mathrm{d}\xi^i$ 与 $\mathrm{d}V^{(m)}$ 的外法线方向一致，取 $\mathrm{d}V^{(m)}=\mathrm{d}\xi^1\cdots\mathrm{d}\xi^m$，若 $\mathrm{d}\xi^i$ 与 $\mathrm{d}V^{(m)}$ 的外法线方向相反，取 $\mathrm{d}V^{(m)}=-\mathrm{d}\xi^1\cdots\mathrm{d}\xi^m$. 此规定称为**单连通域的定向**(orientation of simply connected domain). 按以上方式定向的超曲面称为**可定向曲面**(orientable surface).

定理 14.6.19　在 $\mathscr{V}^n$ 内给定单连通域 $\Omega\subset\mathscr{V}^m(2\leqslant m<n)$. 若 Ω 的边界 $\partial\Omega\subset\mathscr{V}^{m-1}$ 是 C^1 级封闭可定向曲面，令 $\boldsymbol{\Phi}=\Phi_{i_1\cdots i_{m-1}}\boldsymbol{g}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{i_{m-1}}$ 为 $\mathscr{V}^m$ 中的 $m-1$ 阶张量，满足以下条件：

(1) $\boldsymbol{\Phi}$ 在 Ω 内及 $\partial\Omega$ 上连续.

(2) 在 Ω 内的左、右梯度 $\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla$ 存在.

(3) 除 $\partial\Omega$ 上的有限点外,梯度 $\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}$ 及 $\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla$ 在 Ω 的所有点连续.

在上述条件下,有以下结论:

$$\int_{\Omega}\nabla^{-\circ}\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}V^{(m)}=\int_{\partial\Omega}(\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{(m-1)})^{-\circ}\boldsymbol{\Phi},$$

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{\Phi}^{-\circ}\nabla\mathrm{d}V^{(m)}=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\Phi}^{-\circ}\mathrm{d}\boldsymbol{V}^{(m-1)},$$

其中记号 $-\circ$ 泛指张量积、点积、缩并、叉积(限于 $\mathscr{V}^3$)等任何一种代数运算.

注 上述定理又称为 **Stokes 定理**,是 $\mathscr{V}^3$ 中向量场所属 Stokes 定理的推广. 本定理关于单连通域的限制,亦即关于 $\xi_j=\text{const}$ 所示超曲线与 $\partial\Omega$ 最多只有两个交点的限制实际上可以解除,为此只需将 Ω 分割成有限个子域 Ω_i,每个 Ω_i 与超曲线 ξ_i 只有两个交点. 对每个 Ω_i 而言,Stokes 定理均适用,然后将它们相加,注意到两个相邻子域上的边界积分取向相反而互相抵消,便易于得知 Stokes 定理也适用于一般情况.

推论 14.6.20 若 $\boldsymbol{\Phi}\in\mathscr{T}_r(\mathscr{V}^3)$ 满足定理 14.6.19 的规定条件,则有以下积分定理:

$$\int_V\boldsymbol{\Phi}\otimes\nabla\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\boldsymbol{\Phi}\otimes\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

(梯度定理 13.2.3 的推广)

$$\int_V\nabla\otimes\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{\Phi};$$

$$\int_V\boldsymbol{\Phi}\cdot\nabla\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\boldsymbol{\Phi}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

(Gauss 定理 13.3.5 的推广)

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Phi};$$

$$\int_V \boldsymbol{\Phi} \times \nabla \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \boldsymbol{\Phi} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

（旋度定理 13.4.5 的推广）

$$\int_V \nabla \times \boldsymbol{\Phi}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\Phi};$$

$$\int_S (\boldsymbol{\Phi} \times \nabla) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\partial S} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

（Stokes 定理 13.4.4 的推广）

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\Phi} = \int_{\partial S} \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\Phi};$$

其中 $\mathrm{d}V, \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 分别为 $\mathscr{V}^3$ 中的体积元素，曲面元素及曲线元素.

14.6.4 Riemann-Christoffel 张量

定义 14.6.21 取 $\mathscr{V}^n$ 中的向量场 $\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{g}_i$，并求交换求导次序的二阶协变导数之差：

$$u^i_{;kl} - u^i_{;lk} = -u^j R^i{}_{jkl}$$

其中 $R^i{}_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^t_{jl}\Gamma^i_{tk} - \Gamma^t_{jk}\Gamma^i_{tl}$ 定义为 **Riemann-Christoffel 张量**（Riemann-Christoffel tensor）（**曲率张量**）. 可以验证，$R^i{}_{jkl}$ 满足四阶张量分量的转换法则，因此可以写成以下张量形式：

$$\boldsymbol{R} = R^i{}_{jkl}\, \boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}^j \otimes \boldsymbol{g}^k \otimes \boldsymbol{g}^l.$$

由此可知，当且仅当 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{0}$ 时，张量场的二阶协变导数求导次序才可交换. Riemann-Christoffel 张量反映了 Riemann 空间对 Euclid 空间的偏差.

定理 14.6.22 若将 $R^i{}_{jkl}$ 的第一指标下降：

$$R_{ijkl} = g_{ir} R^r{}_{jkl},$$

则张量 R_{ijkl} 具有以下性质：

（1）R_{ijkl} 对于其前二指标反称：

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \qquad (i \neq j),$$

$$R_{ijkl} = 0 \qquad (i = j; i, k, l = 1, 2, 3).$$

(2) R_{ijkl}对于其第三、四指标反称：

$$R_{ijkl} = -R_{ijkl} \qquad (k \neq l),$$

$$R_{ijlk} = 0 \qquad (k = l; i, j, k = 1, 2, 3).$$

(3) R_{ijkl}第一、二指标与三、四指标可同时交换：

$$R_{ijkl} = R_{klij}.$$

(4) Ricci 恒等式(Ricci identity)

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

定义 14.6.23 定义 Ricci **张量**(Ricci tensor)为

$$R_{ij} = R^{\alpha}_{ij\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{i\alpha,j} - \Gamma^{\alpha}_{ij,\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta j}\Gamma^{\beta}_{i\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{ij}.$$

Ricci 张量是二阶对称张量.

定理 14.6.24 Bianchi 定理 Riemann-Christoffel 张量的导数存在以下恒等式：

$$R^{i}_{jkl,m} + R^{i}_{jlm,k} + R^{i}_{jmk,l} = 0,$$

称为 Bianchi 恒等式. 这恒等式又可表示为

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0.$$

复变函数论

15 复平面与复变函数

15.1 引言

18 世纪末流体力学的研究引起了“利用复函数计算实积分值”的问题，它引导着数学家们对复函数进行探索. 关键的问题是：把复变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 与平面上坐标为 x, y 的点相对应，引出了**复数**(complex number)z 的多种表示法. 复变函数中最重要的一类——**解析函数**(analytic function)，由于它在科技问题中多次出现，又具有幂级数表示法的特殊性质，成了复变函数理论发展的基础并促使数学家们从各个方面进行研究. 巨大的发展是在 19 世纪，被公认为有(特殊)重要贡献的数学家有：Cauchy (1789—1857)，他在由解析式表示的函数的导数和积分的基础上建立了函数论；Riemann(1826—1866)，他将导数紧密地联系着几何引进了**保角映射**(conformal mapping)，并且引入 Riemann 面的概念来处理多值函数，使它在该面上成为单值；Weierstrass (1815—1897)则由构造实数理论入手，以幂级数为基础，用**解析开拓**(analytic continuation)的方法，建立起解析函数的理论. 他们的思想在历史发展中被融合起来，以致复变函数论被誉为抽象科学中最和谐的理论之一. 今天，复变函数论已发展成为内容非

常丰富、应用极为广泛的一个数学分支，并且由单个自变量扩充到了多个自变量，继续向深广发展.

复变量与实变量在四则运算与绝对值方面的一致性，导致微积分中建基于这方面的实变函数的性质可以直接推广到复变函数论，使它成为复变量的微积分. 但复变量不能线性地比较大小，开根则又多值连续，它在复平面上有二维自由度，这些又导致复变函数论截然不同于实变量的微积分学.

使**单复变函数**(function of a complex variable)理论的建立更为直观合理的一个重要步骤是复数及其代数运算的几何表示. Gauss(1777—1855)继承了 Euler(1707—1783)等人的工作，不仅将复数 $x+\mathrm{i}y$ 表示为**复平面**(complex plane)上的点，而且阐述了复数的加法与乘法的几何意义. 复数 $x+\mathrm{i}y$ 表示为平面上的点，意味着：

(1) 两个复数 $x_1+\mathrm{i}y_1$，$x_2+\mathrm{i}y_2$ 不能像两个实数那样地比大小，除非 y_1，y_2 同时为 0，即两个复数本身就是实数.

(2) 复数的表示法是多样的.

(3) **辐角**(argument，amplitude)的多值性成为复数，特别是复变函数(单复变函数的简称)的一个基本特征.

15.2 复数的几何表示

15.2.1 复平面

定义 15.2.1 设 x，y 为任意的实数. 形如 $x+\mathrm{i}y$ 的表达式称为**复数**(complex numbers)，常记为 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 i 称为**虚单位**(imaginary unit)，满足条件 $\mathrm{i}^2=-1$. x 称为 z 的实部(real part)，记为 $\mathrm{Re}\, z$. 而 y 称为 z 的虚部(imaginary part)，记为 $\mathrm{Im}\, z$.

定义 15.2.2 复数的相等

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 \quad 且 \quad \mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2.$$

定义 15.2.3 若 $z = x + \mathrm{i}y, z' = x + \mathrm{i}(-y) = x - \mathrm{i}y$，则称 z 与 z' 互为**共轭复数**(complex conjugates)，记为

$$z' = \bar{z}, \qquad z = \overline{z'}.$$

显然 $\overline{(\bar{z})} = z$.

定义 15.2.4 已建立直角坐标系的平面上的点 $P(x,y)$ 可以惟一地表示一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$. 与复数集建立了这种对应关系的平面点集称为**复平面**(complex plane)(或 z 平面或 Gauss 平面). 在复平面内的 x 轴称为**实轴**(real axis)，y 轴称为**虚轴**(imaginary axis).

当 $x=0$ 时，$\mathrm{i}y$ 称为纯虚数(pure imaginary numbers).

15.2.2 用平面向量表示复数

通常可用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示复数 $z(= x + \mathrm{i}y)$. 这时 x, y 分别是向量 $\overrightarrow{OP}$ 在实轴与虚轴上的投影(见图 15.1). 当 $z = 0$ 时，$\overrightarrow{OP}$ 与原点重合而称**零向量**，其长度为零，方向不定.

定义 15.2.5 向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 z 的模(modulus)，记为 $|z|$.

定义 15.2.6 当 P 不是原点时，向量 $\overrightarrow{OP}$ 与实轴正方向间的有向夹角称为复数 z 的**辐角**，并规定反时针方向为正，相反的方向为负. 记为 $\mathrm{Arg}\, z$.

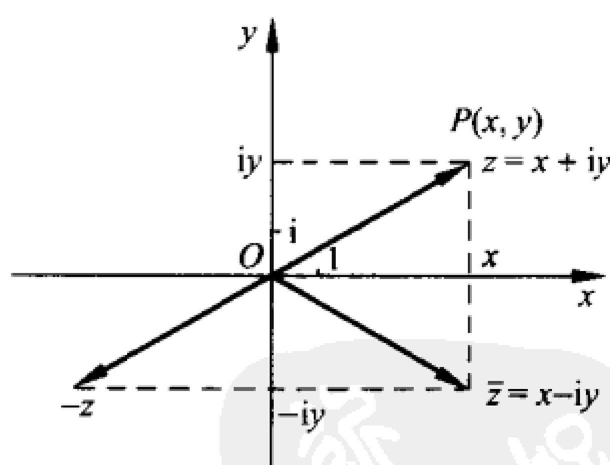


图 15.1

显然，若 ϕ 是 z 的一个辐角，则 z 的每一个辐角与它相差 2π 的一个整数倍，而 $\mathrm{Arg}\, z$ 所表示的就是 z 的全体辐角所成的集合.

定义 15.2.7 为了单值性的考虑,限制辐角 ϕ 的范围使区间长度不超过 2π,称为**辐角的主值**(principal value of argument),记为 $\arg z$,因此

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

最常见的主值范围有两种:

$$-\pi<\arg z \leqslant \pi \quad 与 \quad 0\leqslant \arg z <2\pi.$$

15.2.3 复数在极坐标系下的表示法

在复平面内引进极坐标使极点与原点重合,极轴与 x 轴正方向重合. 根据坐标变换有

$$z=\rho(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi).$$

这是复数的**三角表示法**. 又由 Euler 公式: $\forall t\in\mathbb{R}$,有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}=\cos t+\mathrm{i}\sin t.$$

从而有复数的**指数表示法**

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}.$$

性质 15.2.8 复数 z 的模定义为

$$\rho=|z|=\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

它有性质

(1) $|z|\geqslant|\operatorname{Re} z|$, $|z|\geqslant|\operatorname{Im} z|$.

(2) $|z|\leqslant|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$, $|x+\mathrm{i}y|\leqslant|x|+|y|$.

(3) $|\bar{z}|=|z|$.

性质 15.2.9 辐角的性质为

(1) $\operatorname{Arg}\bar{z}=-\operatorname{Arg} z$.

(2) $z_1=z_2\Leftrightarrow|z_1|=|z_2|$, $\arg z_1=\arg z_2$(在同一主值范围内).

15.3 复数的运算法及其几何意义

15.3.1 加、减法

定义 15.3.1 两复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 相加(addition)(减(subtraction))规定为实部、虚部分别相加(减), 参见图 15.2,

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2).$$

性质 15.3.2

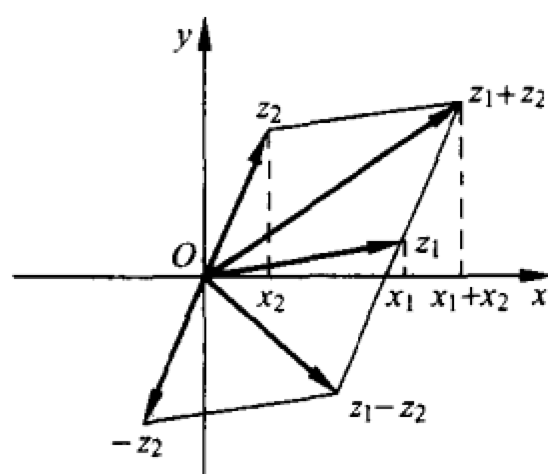


图 15.2

(1) 复数的加、减运算与向量的运算一致.

(2) 加法的几何意义是:将 $\overrightarrow{Oz_1}$ 沿 $\overrightarrow{Oz_2}$ 平移,使其起点与 z_2 相重合时,其终点即表示 z_1+z_2.

(3) 减法的几何意义是:将 $\overrightarrow{Oz_1}$ 沿 $\overrightarrow{Oz_2}$ 反向平移,使其起点与 $-z_2$ 重合时,其终点即表示 z_1-z_2. $|z_1-z_2|$ 表示 z_1 到 z_2 的距离.

(4) 下列不等式成立:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|;$$
$$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$$

(5) 下列等式成立:

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2);$$
$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z,\qquad z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z;$$
$$\mathrm{Re}\,z=\frac{z+\bar{z}}{2},\qquad \mathrm{Im}\,z=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

上述各性质均可推广到 $n(>2)$ 个复数的情形.

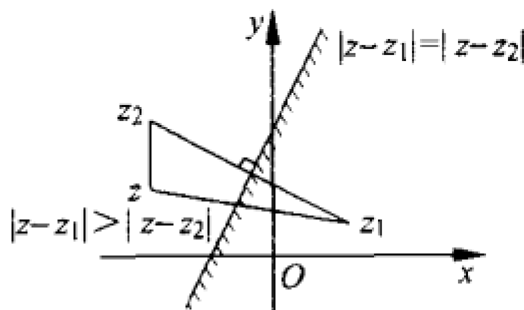
例 15.3.3 作出下列各式所表示的图形:

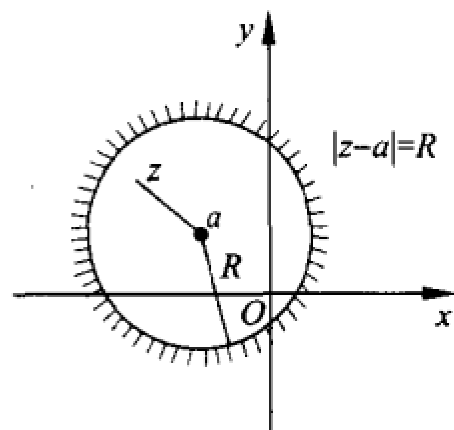
(1) $|z-z_1|>|z-z_2|$;

(2) $|z-a|<R$,其中 a 为复常数,R 为正数.

解 注意到$|z-a|$表示 z 到 a 的距离,分别作图如下.

(1) 注意到$|z-z_1|=|z-z_2|$是线段 z_1z_2 的中垂线方程.故$|z-z_1|>|z-z_2|$是直线$|z-z_1|=|z-z_2|$的不包含正实轴一侧的平面点集.





(2) 由于$|z-a|=R$ 是以 a 为圆心,R 为半径的圆周的方程,故$|z-a|<R$ 是以 a 为圆心,R 为半径的圆的内部.

例 15.3.4 求过两已知点 $z_1,z_2(\neq z_1)$ 的直线方程.

解 从图 15.3 可见,凡在直线上的点 z 都应满足:向量$\overrightarrow{z_1z}$与$\overrightarrow{z_1z_2}$共线.反之如果$\overrightarrow{z_1z}$与$\overrightarrow{z_1z_2}$共线,z 一定在 z_1,z_2 的连线上,所以直线方程是 $z-z_1=\lambda(z_2-z_1)$,其中 λ 为任意实数.

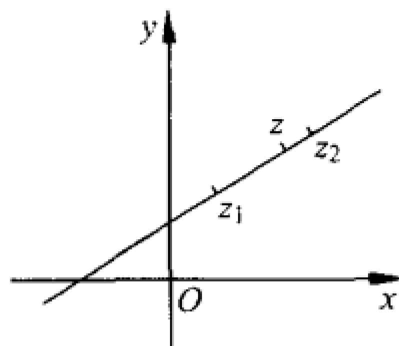


图 15.3

15.3.2 乘法

定义 15.3.5 两个复数 z_1,z_2 相乘规定为关于 i 的两个一次式相乘(multiplication):

$$\begin{aligned} z_1z_2 &=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2) \\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)=z_2z_1. \end{aligned}$$

由定义式可知,乘法是可以交换的.

变换成极坐标时,令

$$x_k=\rho_k\cos\phi_k,\quad y_k=\rho_k\sin\phi_k\qquad(k=1,2),$$

则有

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\phi_1+\phi_2)+\mathrm{i}\sin(\phi_1+\phi_2)],$$

或

$$z_1z_2=(\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1})(\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2})=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)}.$$

性质 15.3.6

(1) 乘积的模等于模的乘积;乘积的辐角等于辐角的和.

(2) 几何意义是:将 $z_2(z_1)$ 旋转 $\phi_1(\phi_2)$ 角,再伸缩 $|z_1|(|z_2|)$ 倍,见图 15.4.

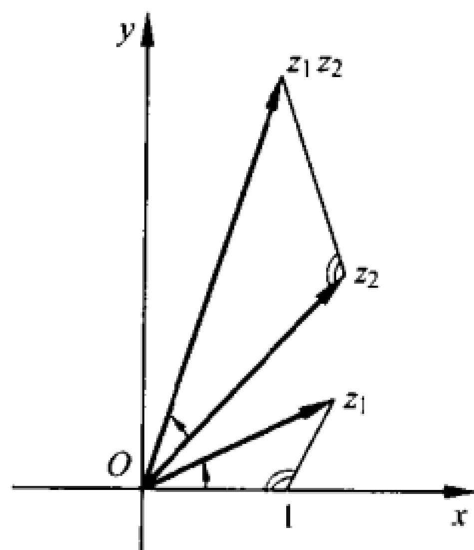


图 15.4

(3) 设 $z=x+\mathrm{i}y=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$,则有

$z\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=x^2+y^2=|z|^2$,

$z\bar{z}=(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})(\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\phi)})=\rho^2=|z|^2$.

(4) de Moivre 公式(de Moivre formula) 设 n 是自然数,$z=\rho(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)$,则

$$z^n=\rho^n(\cos n\phi+\mathrm{i}\sin n\phi).$$

15.3.3 除法

定义 15.3.7 当 $z_2\neq0$ 时,规定除法(division)为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}.$$

变换成极坐标时,有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cos(\phi_1-\phi_2)+\mathrm{i}\,\frac{\rho_1}{\rho_2}\sin(\phi_1-\phi_2),$$

或

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)}.$$

性质 15.3.8

(1) 商的模等于模的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角.

(2) 几何意义是：将 z_1 旋转 $-\phi_2$ 角，再伸缩 $\frac{1}{|z_2|}$ 倍，见图 15.5.

(3) 当 $z\neq 0$ 时，$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|=1$，$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{z}{|z|^2}$.

15.3.4 倒数

定义 15.3.9 当 $z\neq 0$ 时，其倒数为

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2},$$

如图 15.6 所示. 变换成极坐标时，有

$$\frac{1}{z}=\frac{\cos\phi}{\rho}+\mathrm{i}\,\frac{-\sin\phi}{\rho}=\frac{1}{\rho}(\cos\phi-\mathrm{i}\sin\phi)$$

$$=\frac{1}{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\phi)}.$$

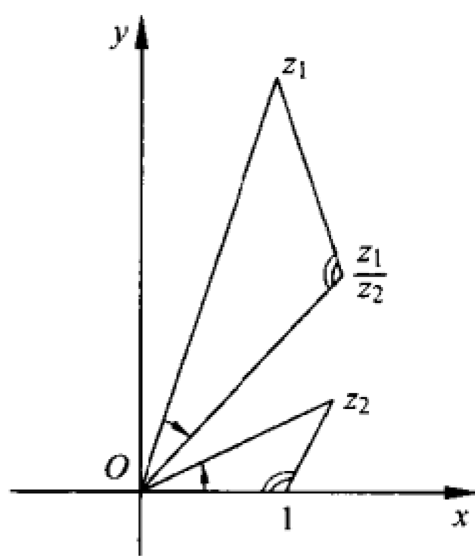


图 15.5

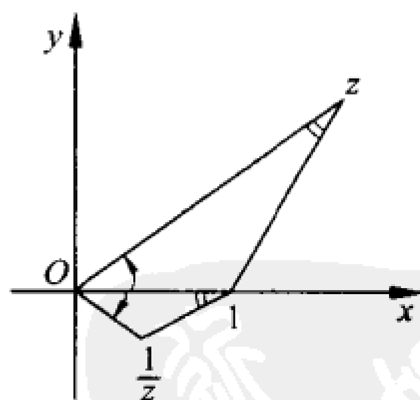


图 15.6

定义 15.3.10

两点 z_1, z_2 称为关于圆周 $C: |z-a|=R$，对称(symmetry)是指：

(1) z_1, z_2 在从 a 发出的同一射线上；

(2) $|z_1-a||z_2-a|=R^2$.

倒数$\frac{1}{z}$的几何意义是:关于单位圆周(unit circle) $|z|=1$ 作对称变换$\left(由 z 得到\left(\overline{\frac{1}{z}}\right)\right)$与关于实轴作对称变换$\left(由\left(\overline{\frac{1}{z}}\right)得到\frac{1}{z}\right)$的复合. 参见图 15.7.

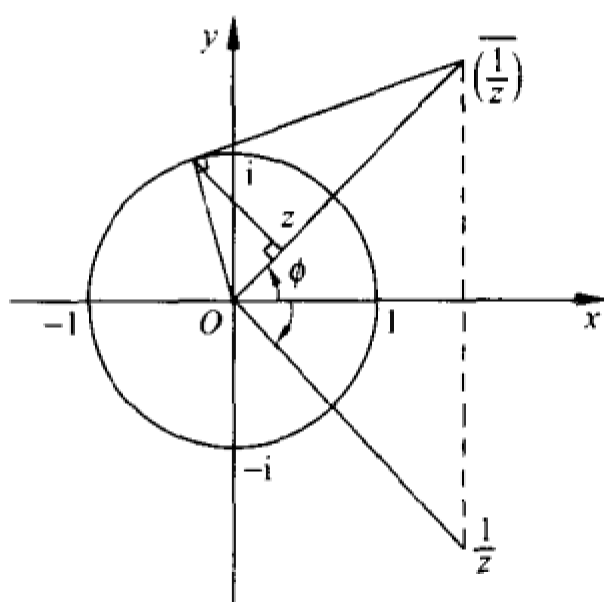


图 15.7

15.3.5 方根

定义 15.3.11 设 n 是大于 1 的正整数,并且 $z=\rho e^{i\phi}$,规定 n 次(方)根(nth roots)$\sqrt[n]{z}=w$ 是$w^n=z$ 的逆运算. 有

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\phi+2k\pi}{n}}, \qquad k=0,1,\cdots,n-1.$$

性质 15.3.12

(1) 开 n (>1)次方就有 n 个不同的根,其模都是 $\sqrt[n]{\rho}$,其辐角依次为$\frac{\phi}{n},\frac{\phi+2\pi}{n},\cdots,\frac{\phi+2(n-1)\pi}{n}$.

(2) 所有的根都位于以原点为心以 $\sqrt[n]{\rho}$ 为半径的圆周上. 当 $n\geqslant 3$ 时,辐角依次相差$\frac{2\pi}{n}$,因而以所有的根为顶点构成一个圆内接正 n 边形,如图 15.8所示.

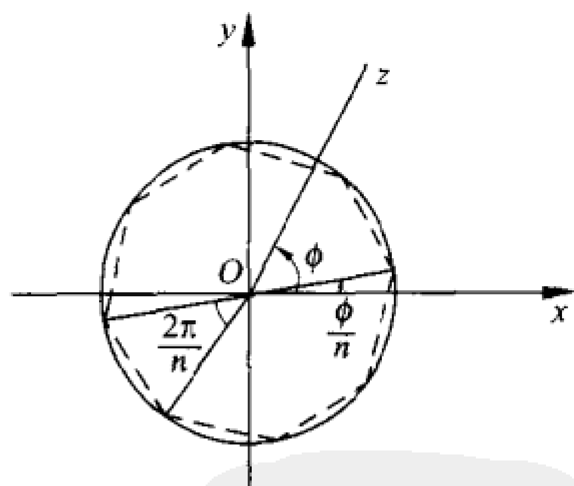


图 15.8

15.4 复平面上的点集

定义 15.4.1 设 a 为复平面内一点,δ 为一正实数. 满足$|z-a|<\delta$ 的点 z 所组成的集称为 a 点的一个 δ -**邻域**(neighbor-

hood),记为

$$\overline{U_a}(\delta)=\{z\,|\,|z-a|<\delta,\ \delta>0\}.$$

定义 15.4.2 满足不等式 $0<|z-a|<\delta$ 的全体点所组成的集称为 a 点的一个去心 δ-邻域,简称**去心邻域**(deleted neighborhood).

定义 15.4.3 如果当 a 属于某一集时,存在一正数 δ 使 $\overline{U_a}(\delta)$ 也全属于该集,则称点 a 为该集的一个**内点**(interior point).

定义 15.4.4 已知一集 M 及一点 ζ. 如果 ζ 的每一个邻域 $\overline{U_\zeta}(\delta)$ 内都有属于 M 的点,同时也有不属于 M 的点,则称 ζ 为 M 的一个**边界点**(boundary point).

定义 15.4.5 一集的全部边界点构成该集的**边界**(boundary).

定义 15.4.6 设点 ζ 属于集 M. 如果存在一个正数 δ 使满足 $0<|z-\zeta|<\delta$ 的全体点都不属于 M,则称 ζ 为 M 的一个**孤立点**(isolated point).

定义 15.4.7 如果点 ζ 的每一个邻域 $\overline{U_\zeta}(\delta)$ 内都有无限多个点属于集 M,则称 ζ 为 M 的一个**极限点**(limit point).

定义 15.4.8 纯由内点组成的集称为**开集**(open set).

定义 15.4.9 包含其全部极限点的点集称为**闭集**(closed set).

定义 15.4.10 如果集 M 可以包围在以原点为心的某个圆内,则称 M 为一个**有界集**(bounded set). 即存在一正数 K 使 $|z|<K(z\in M)$.

定义 15.4.11 不是有界集的集称为**无界集**(unbounded set).

定理 15.4.12 **Bolzano-Weierstrass 定理**(Bolzano-Weierstrass theorem) 凡有界无限集至少有一个极限点.

内点一定是极限点,极限点一定不是孤立点. 极限点或者是内

点或者是边界点.

例 15.4.13* 下列各集分别是开集、闭集、有界集.

$M_1=\{z \mid z=x+\mathrm{i}y; x,y$ 都是整数$\}$为闭集且是无界集；

$M_2=\{z \mid |z-a|=\delta;\ \delta>0\}$为闭集且是有界集；

$M_3=\{z \mid |z-a|<\delta;\ \delta>0\}$为有界开集；以 M_2 为界；

$M_4=\{z \mid 0<|z|\leqslant\delta;\ \delta>0\}$为有界集，不是开集也非闭集；

$M_5=\{z \mid |z-a|>\delta;\ \delta>0\}$为开集，不是闭集也非有界集；

$M_6=\{z \mid r\leqslant|z-a|\leqslant R\}$为有界闭集；

$M_7=\{z \mid \operatorname{Im} z>0\}$为开集、无界集.

15.5 球极投影

为了某些系统性的叙述或简化的目的，例如使当 $z=0$ 时，$\frac{1}{z}$ 也有意义；简化**亚纯函数**(meromorphic functions)的某些性质等，数学家们引进了一个理想的点作为(在倒数的情况)与原点相对应的点，称为无穷远点，记为∞. 它的模就规定为$+\infty$；辐角无意义，或说：辐角不定. 达到这个目的的最常用的经典方法就是**球极投影**(stereographic projection).

取直径为 1 的球与复平面切于坐标原点. 建立空间直角坐标系 $O_{\xi\eta\zeta}$. 令 $O\xi$,$O\eta$ 分别与实轴、虚轴重合，方向一致. 于是球面方程为

$$\xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

称球面上点(0,0,1)为北极，记为 N(见图 15.9). 平面上每一个点 $z(x,y)$与北极的连线交球面于另一点 $P(\xi,\eta,\zeta)$. 这样，除了 N 点外，复平面上的点与球面上的点**一一对应**(one to one correspondence)，并且 $P\to N\Leftrightarrow|z|\to+\infty$.

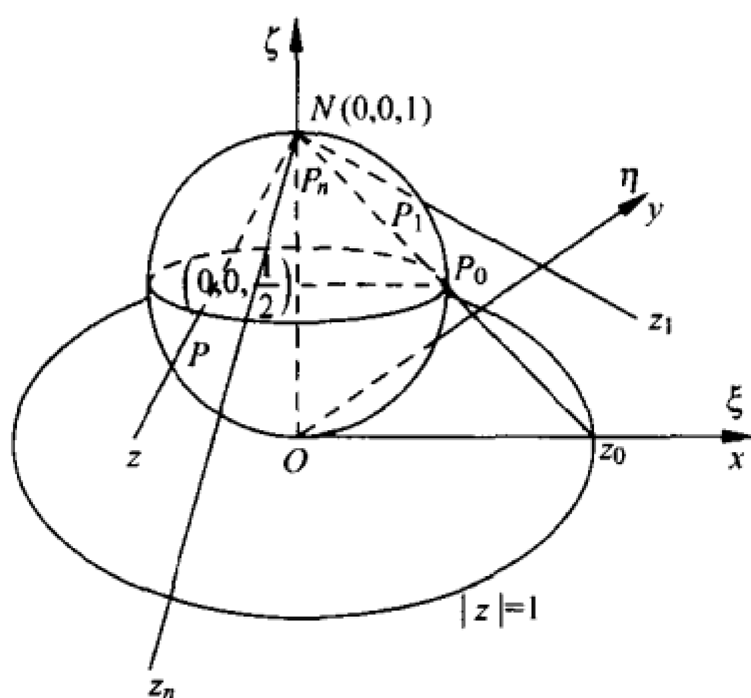


图 15.9

定义 15.5.1 复平面上与 N 点成一一对应的点为"∞"点(infinity).

定义 15.5.2 在球极投影下,复平面上加进了∞点,形成了同球面一样的一个闭集.称为**扩充了的复平面**(extended complex plane),简称**闭复平面**(closed complex plane).

定义 15.5.3 在球极投影下,球面上的点与复数等同(identify),北极等同于∞点.球面称为**复球面**(complex sphere),也称为Riemann 球面.

公式 15.5.4 球极投影中点与点的对应关系可以通过复平面上点的坐标与球面上点的空间坐标解析地表示如下:设平面上的点为 $z(x,y)$,球面上的点为 $P(\xi,\eta,\zeta)$,则

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{x}{1+|z|^2}=\dfrac{z+\bar{z}}{2(1+|z|^2)},\\ \eta=\dfrac{y}{1+|z|^2}=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}(1+|z|^2)},\\ \zeta=\dfrac{|z|^2}{1+|z|^2};\end{cases}$$

$$z=\frac{\xi+\mathrm{i}\eta}{1-\zeta},\quad |z|^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

15.6 复数列的极限

定义 15.6.1 如果复平面内集 M 的点都可以按照一定规律与全体自然数集N 成一一对应，则称集 M 是**可列的**(enumerable). M 可以记为 $\{z_n\}$ 或 $\{z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots\}$. 也称 M 为复数列(sequence of complex number).

定义 15.6.2 如果对于复数列 $\{z_n\}$ 存在一个复常数 a(不依赖于 n)具有以下性质：对于任意给定的正实数 ε，都存在一个正整数 N 使当 $n>N$ 时恒有 $|z_n-a|^*<\varepsilon$，则称数列 $\{z_n\}$(当 $n\to+\infty$ 时)以 a 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$，或 $z_n\to a$.

定义 15.6.3 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$，则称复数列 $\{z_n\}$ 是收敛(convergence)的，或收敛到 a，见图 15.10. 如果极限不存在，则称复数列 $\{z_n\}$ 发散(divergence).

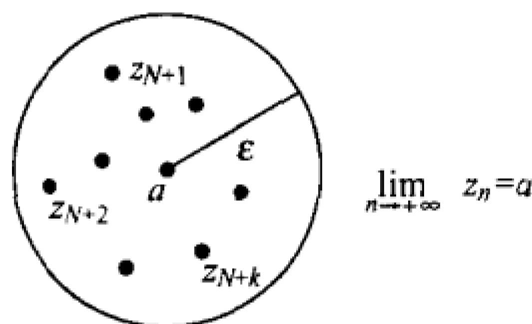


图 15.10

定理 15.6.4 设 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n (n=1,2,3,\cdots)$，$a=\alpha+\mathrm{i}\beta$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\alpha$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\beta$.

定理 15.6.5 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|=|a|$.

* 这里 $|z_n-a|$ 是复数 z_n-a 的"模".

15.7 复数项级数的收敛性

15.7.1 收敛定义及判别法

定义 15.7.1 复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$，$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n (n = 1,2,3,\cdots)$ 的前 n 项之和称为该级数的第 n 部分和(partial sum)，记为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n .$$

定义 15.7.2 如果部分和数列$\{S_n\}$的极限存在，即 $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛(convergence)，其和为 S. 如果$\{S_n\}$发散就说 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散.

定理 15.7.3 级数收敛的必要条件是：如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$.

定理 15.7.4 设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n (n=1,2,3,\cdots)$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 均收敛.

定理 15.7.5 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

定义 15.7.6 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛(absolute convergence). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则称

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛(conditional convergence).

例 15.7.7 判断下列各复数项级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2\mathrm{i})^n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}$; (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{2}}$.

解

(1) 各项取模,所得正项级数可用比值法判敛:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{(2\mathrm{i})^{n+1}}\right|\left|\frac{(2\mathrm{i})^n}{n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

故知所给复数项级数绝对收敛.

(2) 各项的模都等于 1,从而通项不趋于 0,因此级数发散(定理 15.7.3).

(3) 各项取模后成为**调和级数**(harmonic series) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,发散.故知原给级数不是绝对收敛的.为了判断收敛与否,将级数的实、虚部两个级数分开考虑.由

$$z_n=\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{2}}=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\mathrm{i}\,\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2},$$

当 n 为奇数时实部为 0;当 n 为偶数时虚部为 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\, z_n=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\, z_{2k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Im}\, z_n=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Im}\, z_{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

两个级数都是交错的且满足 Leibniz 准则,都是条件收敛的.所以原级数条件收敛.

15.7.2 绝对收敛级数的性质

设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (a_n, b_n 都是复数)都绝对收敛,则

(1) 把它们各自的项按任一种次序重新排列之后所得的级数仍绝对收敛.

(2) 相乘后

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1),$$

等号右端的级数仍绝对收敛.

15.8 路径与域

在复平面上,变量 z 的变化范围最常见的有两种:路径、域.

定义 15.8.1 如果 $x(t)$,$y(t)$是当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时的连续(实)函数,则 $x=x(t)$,$y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,因而 $z=z(t)$ 或 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 就是连续曲线的**参数方程**(parametric equation). 称 $z(t)$ 为**有向连续曲线**(oriented continuous curve),称 $z(\alpha)$ 为该曲线的**起点**(initial point);$z(\beta)$ 为**终点**(terminal point). 曲线的方向取为 t 增大的方向.

定义 15.8.2 一连续有向曲线如果没有**重点**(multiple point),即当 $t_1\neq t_2$ 时 $z(t_1)\neq z(t_2)(\alpha\leqslant t_1,t_2\leqslant\beta)$,就称之为一条 Jordan **弧**(Jordan arc).

定义 15.8.3 当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时,如果函数 $x'(t)$,$y'(t)$ 连续且不同时为零,即以 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ 为参数方程的曲线具有连续转动的切线,此时称该曲线是**可求长的连续曲线**(rectifiable continuous curve),或称之为**光滑**(smooth)曲线.

定义 15.8.4 一可求长的 Jordan 弧称为一**路径段**(path segment).

定义 15.8.5 将有限条路径段做一排列,使每一段的起点与前一段的终点连接起来,就得到一条**路径**(path). 它可以表示为

$$z=z(t)\qquad(\alpha_1\leqslant t\leqslant\alpha_2).$$

定义 15.8.6 如果路径 $z=z(t)$ $(\alpha_1\leqslant t\leqslant\alpha_2)$满足 $z(\alpha_1)=z(\alpha_2)$,就称该路径为**闭路径**(closed path).

定义 15.8.7 如果闭路径除 $z(\alpha_1)=z(\alpha_2)$外没有其他的重点就称为**简单闭路径**(simple closed path),见图 15.11.

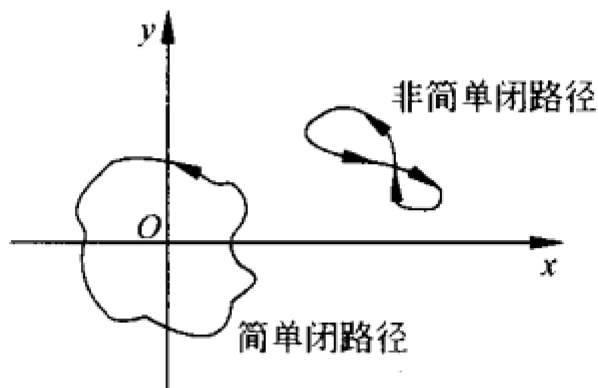


图 15.11

定义 15.8.8 平面上的一个点集 M 称为一个**域**(region),如果:

(1) M 是一开集(定义 15.4.8),即它的每一个点都是内点(定义 15.4.3);

(2) M 是**连通的**(connected),即对 M 内任意两点 z_1,z_2 都可用一折线(这折线上的点全部属于 M)连接起来.

定义 15.8.9 一个域与其全部边界点的并(和)集称为一个**闭域**(closed region).

定义 15.8.10 如果全部位于域 D 内的任意一条简单闭路径所包围的点都属于 D,则称该域 D 为一**单连通域**(simply connected region).

定义 15.8.11 不是单连通的域称为**多(复)连通域**(multiply connected region).

设 $C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 $n+1$ 条互不相交的简单闭路径满足:

(1) $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 中的每一条都不被其余的任意一条简单闭路径包围;

(2) $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 全都被 C_0 包围.

以这 $n+1$ 条简单闭路径为边界的域是多连通的,这时也称该域是 $n+1$ 连通的,见图 15.12.

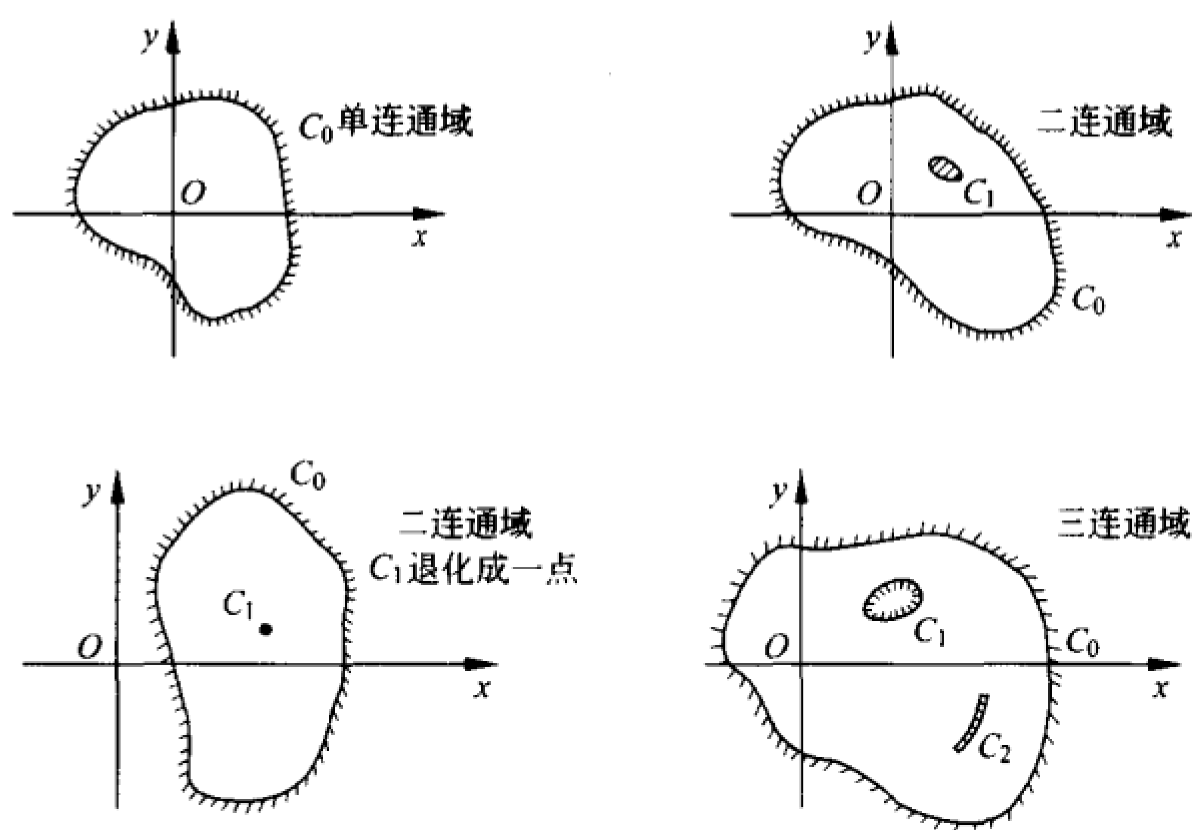


图 15.12

定理 15.8.12 Jordan 定理(Jordan theorem) 一条简单闭路径 C 将复平面分成两个域,其中一个是有界的,称为 C 的内部,另一个是无界的,称为 C 的外部,C 是两个域的公共边界.

15.9 复变函数

定义 15.9.1 设 M 是复平面内的一个点集,z 表示属于 M 的任一元素,称 z 是复变量.点集 M 称为 z 的**变化域**(domain of variation).如果有一复变量 w 随着 z 而变,即对于变量 z 所取的每一个值,按照一定的规律 f 总有惟一确定的复数值 w 与之对应,则称 w 为 z 的一个(**单值**)**复变函数**(function of a complex variable).z 为自变量.记为 $w=f(z)$.M 称为函数的**定义域**(domain of definition).复变量 w 所取得的值的全体称为函数 $w=f(z)$的**值域**(domain of values).记为 N.

如果令 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$,则

$$w=f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y).$$

所以研究一个复自变量的复函数相当于研究两个有顺序的实自变量的二元实函数.

定义 15.9.2 函数 $w=f(z)$ 使 z 平面上集 M 的点 $z=x+\mathrm{i}y$ 与 w 平面上集 N 的点 $w=u+\mathrm{i}v$ 相对应,这种对应关系称为集 M 上的一个**映射**(mapping)(映象、写象、变换)f.

定义 15.9.3 映射 f 将点 z 映成点 w, w 称为 z 的**象点**(image point),简称为象(image),z 称为 w 的原象(inverse image).

例 15.9.4 已知映射 f 使 $w=|z|$. 求 z 平面内点的象.

解 因为,对 z 平面内所有点,$|z|$ 总不小于零. 所以象点的全体组成了正 u 轴及原点 $w=0$. 而且模相等的点具有相同的象.

例 15.9.5 在映射 $w=z^2$ 下,求下列各点集的象:

(1) 直线 $x=1$; (2) 域 $y>x$.

解 (1) 令 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$,由 $w=z^2$ 知 $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. 将 $x=1$ 代入消去 y 得 u,v 的方程 $v^2=-4(u-1)$. 所以直线 $x=1$ 的象点的集合是一条抛物线. 可参见图 15.13.

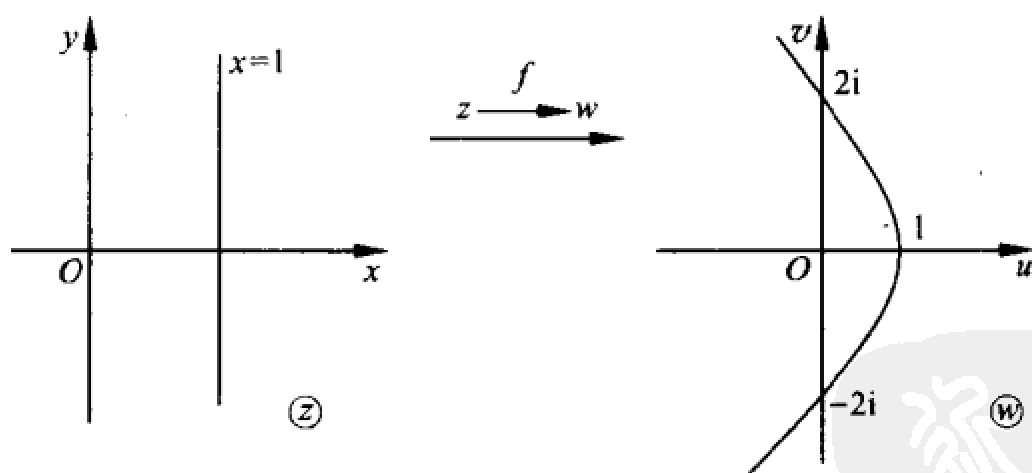


图 15.13

(2) 凡在域内的点 z,其辐角范围为 $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{5}{4}\pi$. 由乘方(定义 15.3.6),$\frac{\pi}{2}<\arg w<\frac{5}{2}\pi$. 所以象域是去掉正 v 轴的 w 平

面(或说沿正 v 轴有割缝(cut)的 w 平面),可参见图 15.14.

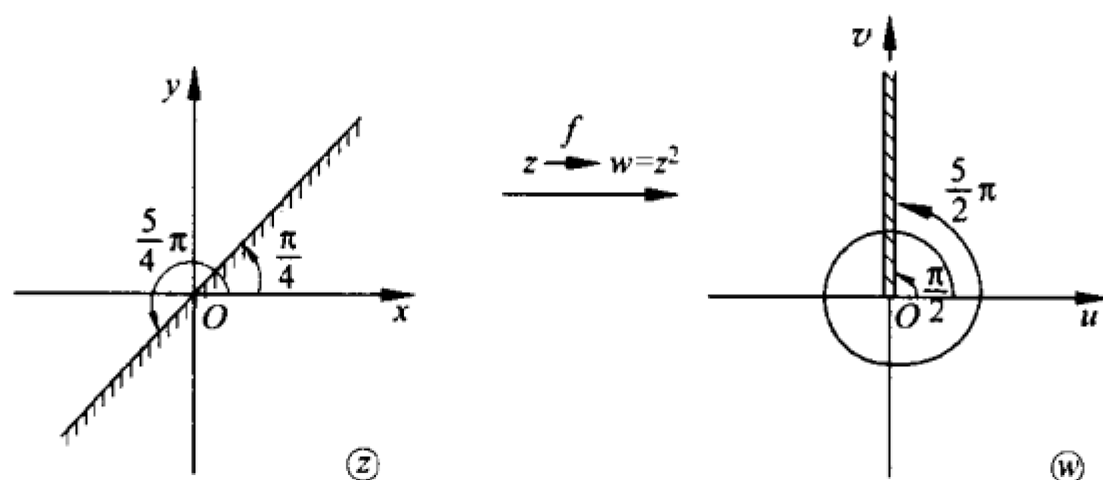


图 15.14

例 15.9.6 在映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下,求 z 平面内下列图形的象:

(1) 直线; (2) 圆周.

解 (1) 设 α,β,γ 为任意实常数,z 平面上的直线方程为 $\alpha x+\beta y+\gamma=0$. 令 $z=x+\mathrm{i}y$, $w=u+\mathrm{i}v$,由 $w=\dfrac{1}{z}$,将 $z=\dfrac{1}{w}$分开实、虚部,从下列联立方程组:

$$\begin{cases}\alpha x+\beta y+\gamma=0,\\ x=\dfrac{u}{u^2+v^2},\\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}\end{cases}$$

消去 x,y 得

$$\alpha u-\beta v+\gamma(u^2+v^2)=0.$$

① $\gamma\neq 0$ 时,象曲线是一过原点 $w=0$ 的圆,原象是不过原点 $z=0$ 的直线(过 $z=\infty$点).

② $\gamma=0$ 时,象曲线是过原点 $w=0$ 的直线,原象是过原点 $z=0$的直线.

(2) z 平面上的圆周方程为 $|z-a|=R$,其中 a 为任意复数,R 为正实数. 将 $w=\dfrac{1}{z}$代入得 $\left|\dfrac{1}{w}-a\right|=R$.

① $a=0$，象是圆周 $|w|=\dfrac{1}{R}$，原象是圆周 $|z|=R$.

② $a\neq 0$，方程变形为 $\dfrac{\left|w-\dfrac{1}{a}\right|}{|w|}=\dfrac{R}{|a|}$.

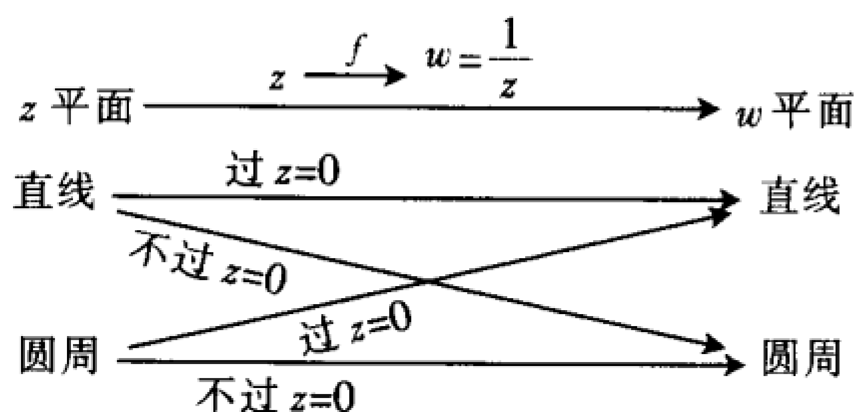
当 $R=|a|$ 时，象是一直线 $\left|w-\dfrac{1}{a}\right|=|w|$，不过原点 $w=0$，而原象 $|z-a|=|a|$ 是过原点 $z=0$ 的圆周.

当 $R\neq|a|$ 时，象是一圆周

$$\left|w-\frac{\bar{a}}{|a|^2-R^2}\right|=\frac{R}{\left||a|^2-R^2\right|}$$

$\left(\text{由方程}\dfrac{\left|w-\dfrac{1}{a}\right|}{|w|}=\dfrac{R}{|a|}\text{可得}\right)$. 象与原象都不过原点.

例 15.9.6 可总结如下：



16 解析函数

16.1 引言

存在不同的引进解析性的途径.一个基本的途径是,先由Cauchy,后由Riemann给出一种函数的构造性质——关于复变量存在着导数,或者复微分.这个途径紧密联系着几何.另一途径,是由Weierstrass系统地发展起来的,是基于可以表达成幂级数的可能性上的复变函数.

复变函数论的基本事实在于,在复平面上的任意域内,由上述不同途径所考察的相应的函数类是相同的.

Cauchy-Riemann方程把数学物理中的问题与复变函数论联系起来,而Riemann面则是Riemann用来处理多值函数的一个关键性的概念.

16.2 复变函数的极限与连续性

定义 16.2.1 设已知平面域(连通开集)D, z_0 为 D 内一点,单值函数 $w=f(z)$ 在域 D 内(不考虑 z_0 点)有定义.如果存在一个复常数 A(不依赖于 z)具有性质:对于任意给定的正数 ε,都存在一个正数 δ,使当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时恒有 $|f(z)-A|<\varepsilon$.我们就称复常数 A 为函数 $f(z)$ 当自变量 z 趋于 z_0 时的**极限**(limit),记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

定义 16.2.2 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点有定义,且极限值 A 等

于函数值 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，则称函数 $f(z)$ 在 z_0 点**连续**(continuity).

定理 16.2.3 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件是 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处都连续.

如果令 $\Delta z=z-z_0$，$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$. 则极限式为

$$\lim_{\Delta z\to 0} f(z_0+\Delta z)=f(z_0), \tag{16.1}$$

或

$$\lim_{\Delta z\to 0}[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)]=0, \tag{16.2}$$

或

$$\lim_{\Delta z\to 0}\Delta w=0. \tag{16.3}$$

函数的连续性还可以表述如下：

定义 16.2.4 如果对于域 D 内任意选择的一串数列 z_1，z_2，…，z_n，…，当 z_n 在 n 趋向 ∞ 的过程中趋于 z_0，而函数值 $w_n=f(z_n)$ 趋于 $f(z_0)$，就说 $f(z)$ 在点 z_0 处连续.

定义 16.2.5 如果函数 $f(z)$ 在域 D 内的每一点处都连续，就说函数在 D 内连续.

定义 16.2.6 如果函数 $f(z)$ 在一路径 L 的每一点 z_0 处，当 $z\in L$ 时 $|f(z)-f(z_0)|$ 小于任意给定的正数 ϵ 只要 $|z-z_0|<\delta$，即对每一点 $z_0\in L$ 都有 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(z\in L)}} f(z)=f(z_0)$，则称 $w=f(z)$ 沿该路径 L 连续.

定义 16.2.7 函数 $f(z)$ 在域 D 的一个边界点 z_0 处连续是指：函数在 z_0 点有定义，并且 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\(z\in D)}} f(z)=f(z_0)$.

定义 16.2.8 设平面上给定了一类开域 $\{\sigma\}$ 和一个集 M. 如果 M 的每一点至少属于 $\{\sigma\}$ 中的某个域 σ，则说这类开域 $\{\sigma\}$ **覆盖**(cover)集 M.

定理 16.2.9 Heine-Borel 定理 如果有界闭域 $\overline{D}$ 的每一点

z 都是一个(开)圆 K_z 的中心,则在这些圆中必存在有限多个圆覆盖 $\overline{D}$.

定义 16.2.10 如果函数 $f(z)$在闭域 $\overline{D}$ 的每一点处都连续,就说函数在闭域 $\overline{D}$ 上连续.

定义 16.2.11 设函数 $w=f(z)$在 D 内有定义. 设 z_1, z_2 为 D 内任意两点. 如果对于任意正实数 ε,总存在正数 δ(不依赖于 z_1, z_2)使当$|z_1-z_2|<\delta$时恒有$|w_1-w_2|=|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$,就说函数 $w=f(z)$在 D 内**一致连续**(uniform continuity).

定理 16.2.12 有界闭域 $\overline{D}$ 上的连续函数在该闭域 $\overline{D}$ 上一致连续.

性质 16.2.13 在有界闭域$\overline{D}$(或路径 L)上连续函数的几个重要性质:

(1) $w=f(z)$有界,即存在正数 K(不依赖于 z)能满足 $|f(z)|\leqslant K$ 当 $z\in\overline{D}$(或 $z\in L$).

(2) 在闭域$\overline{D}$(或路径 L)上函数模$|w|=|f(z)|$达到最大值、最小值.

(3) 对于任意两个值$|w_1|<|w_2|$,必有一值$|w|$存在使 $|w_1|<|w|<|w_2|$.

16.3 复变函数的导数

定义 16.3.1 设单值函数 $w=f(z)$在域 D 内有定义. 又设 $z, z_0\in D, z\neq z_0$. 如果极限 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在,就说单值函数 $w=f(z)$在点 z_0 处**可导**(differentiable). 并称该极限值为函数 $w=f(z)$在点 z_0 的**导数**(derivative)或**微商**(differential quotient),记为 $f'(z_0)$.

若令 $z=z_0+\Delta z, f(z)-f(z_0)=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\Delta w$,则

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=z_0}=w'\big|_{z=z_0}. \qquad (16.4)$$

定义 16.3.2 如果等式 $\Delta w=A\Delta z+o(\Delta z)$ $\left(\text{其中 } A \text{ 是一复常数}, \Delta z=z-z_0 \text{ 并且} \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{o(\Delta z)}{\Delta z}=0\right)$成立，就说函数 $w=f(z)$在 z_0 点**可微**(differentiable)，表达式 $A\Delta z$ 称为函数 $w=f(z)$ 在 z_0 点的**微分**(differentiation)．记为 $\mathrm{d}w$，$\mathrm{d}w=A\Delta z$.

定理 16.3.3 函数 $f(z)$在 z_0 点可微的充要条件是 $f(z)$在 z_0 点可导，并且 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\Delta z$. 这时，常用 $\mathrm{d}z$ 代替 Δz 而写成

$$\mathrm{d}w=f'(z_0)\mathrm{d}z. \qquad (16.5)$$

例 16.3.4 求函数 $w=\dfrac{1}{z}$在 $z(\neq 0)$点的导数.

解 根据定义，函数在 z 点的导数是

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}\right)$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{z(z+\Delta z)}=\frac{-1}{z^2}.$$

算法 16.3.5 根据定义可知导数的运算法与一元实自变量的实函数的求导法一致：如果两个不同的函数 $f(z)$，$g(z)$在同一点 z 有导数存在，则有

(1) $[f(z)+g(z)]'=f'(z)+g'(z)$，

(2) $[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$，

(3) 当 $g(z)\neq 0$ 时，$\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]'=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$.

而且有复合函数求导法：如果 $\zeta=h(z)$在点 z_0 处可导；$w=f(\zeta)$在相应点 $\zeta_0(=h(z_0))$处可导，则 $w=f(h(z))$在点 z_0 处可导，并且

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=z_0}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta}\bigg|_{\zeta=\zeta_0}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=z_0}=f'(\zeta_0)h'(z_0).$$

定理 16.3.6 函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在点 $z_0=$

$x_0+\mathrm{i}y_0$处可导的一个充要条件是：

(1) $u(x,y),v(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微；

(2) $u(x,y),v(x,y)$的一阶偏导数满足下列方程(Cauchy-Riemann 方程组(定义 16.3.7)).

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)};\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}. \tag{16.6}$$

这时

$$\begin{aligned} f'(z_0)&=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+\mathrm{i}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}+\frac{1}{\mathrm{i}}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\\ &=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}-\mathrm{i}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}+\mathrm{i}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}. \end{aligned} \tag{16.7}$$

定义 16.3.7 偏微分方程组$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_z=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_z;\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_z=-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_z$称为 Cauchy-Riemann 方程组(Cauchy-Riemann equations)，简称C-R条件.

在极坐标系 $z=\rho e^{\mathrm{i}\phi}$中，C-R 条件具有如下形式：

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \phi};\qquad \frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi}, \tag{16.8}$$

从而

$$f'(z_0)=\left.\frac{1}{e^{\mathrm{i}\phi}}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{z_0}+\mathrm{i}\left.\frac{1}{e^{\mathrm{i}\phi}}\frac{\partial v}{\partial \rho}\right|_{z_0}=\left[\frac{1}{\rho e^{\mathrm{i}\phi}}\left(\frac{\partial v}{\partial \phi}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)\right]_{z_0}. \tag{16.9}$$

16.4 复变函数的解析性

复数的向量表示法使得平面向量场都可以用复变量进行研究;C-R 条件的成立导出了复变函数在调和场的应用.

定义 16.4.1 如果函数 f 在域D 内每一点处都可导，就说函数 f 在域D 内是**正则解析的**(regular analytic)，简称**解析的**或**正则的**(regular). 也说 f 是 D 内的一个**解析函数**(analytic function)，并

称 D 为函数 f 的一个**解析域**(region of regularity).

定义 16.4.2 如果对于域 D 内一点 z,存在一个邻域,使函数 f 在此邻域内是解析的,就称点 z 为 f 的一个**正则点**(regular point)(或**解析点**(analytie point)).

非解析点称为**奇异点**(singular point),简称**奇点**.

定义 16.4.3 如果路径 L 上的每一点都是函数的解析点,就说这函数在 L **上(正则)解析**(regularity along a path L).

例 16.4.4 判断下列各函数在何处可导?在何处解析?

(1) $w=\bar{z}$;(2) $w=z\,\mathrm{Re}\,z$;(3) $w=x^2+\mathrm{i}y^3$;

(4) $w=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y$.

解 (1) 这里 $u(x,y)=\mathrm{Re}\,w=x$, $v(x,y)=\mathrm{Im}\,w=-y$. 4 个一阶偏导数都存在并且连续. 由 $\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial v}{\partial y}=-1$ 知不满足 C-R 条件,因而函数恒不可导.

(2) 这时 $u(x,y)=x^2$, $v(x,y)=xy$ 在复平面内处处可微. 由 C-R 条件有 $2x=x$, $y=0$,所以函数 $w=z\mathrm{Re}\,z$ 只在原点可导(导数值为 0),没有解析点.

(3) 因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial v}{\partial y}=-2y$; $\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial u}{\partial y}=0$. 由 C-R 条件可知,凡在直线 $y=-x$ 上的点都可导,导数值为 $2x(=-2y)$. 没有解析点.

(4) 因为 $u(x,y)=\sin x\mathrm{ch}y, v(x,y)=\cos x\mathrm{sh}y$ 处处可微并且 C-R 条件恒成立,所以 w 在复平面内处处可导、处处解析,导函数为 $w'=\cos x\mathrm{ch}y-\mathrm{i}\sin x\mathrm{sh}y$.

定义 16.4.5 偏微分方程 $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$ 称为二维调和方程或 Laplace 方程. 该方程的解称为**调和函数**(harmonic function).

定理 16.4.6 解析函数 $w=f(z)$ 的实部 $u(x,y)$、虚部 $v(x,y)$ 都是调和函数.

定义 16.4.7 如果 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y)$是解析函数,就说 $u(x,y)$和 $v(x,y)$是共轭调和函数.这时 $-v(x,y)$和 $u(x,y)$也是**共轭调和函数**(harmonic conjugates function).

例 16.4.8 证明 $u(x,y)=2xy$ 是调和函数.并求以 u 为实部的解析函数 $w=f(z)=u+\mathrm{i}v$.

解 首先验证 $u(x,y)=2xy$ 满足调和方程:$\frac{\partial u}{\partial x}=2y$,$\frac{\partial u}{\partial y}=2x$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$,$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. 所以 $u(x,y)$确是调和函数.

现在由 C-R 条件求虚部 $v(x,y)$. 根据$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2y$ 有 $v(x,y)=y^2+\phi(x)$,其中 $\phi(x)$是 x 的实函数与 y 无关. 又由$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$得 $\phi'(x)=-2x$. 积分得到 $\phi(x)=-x^2+\alpha$, α 为一实常数. 所以求得虚部 $v(x,y)=y^2-x^2+\alpha$,因而所求解析函数是

$$w=f(z)=2xy+\mathrm{i}(y^2-x^2+\alpha)=-\mathrm{i}z^2+\mathrm{i}\alpha.$$

16.5 初等超越函数

16.5.1 指数函数

定义 16.5.1 **指数函数**(exponential function)e^z 定义为

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

性质 16.5.2

(1) 对于任意两个复数 z_1,z_2 有

$$\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}. \tag{16.10}$$

当 $z_1=x$,$z_2=\mathrm{i}y$ 时,根据 Euler 公式,有

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y). \tag{16.11}$$

(2) 它是周期函数. 当 k 为任意整数时恒有 $e^{z+2k\pi i}=e^z$. 具有虚周期 $2\pi i$.

(3) $|e^z|=e^x>0$,因此函数值 e^z 恒不等于 0.

(4) 在复平面内处处解析,且 $\frac{d(e^z)}{dz}=e^z$.

(5) 当 $z\to\infty(|z|\to+\infty)$时,$e^z$ 没有极限.
例如当 $x\to+\infty$时 $e^z\to\infty$;当 $x\to-\infty$时 $e^z\to0$.

(6) **映射** 令 $w=re^{i\theta}$, $z=x+iy$,则在映射 $w=e^z$ 下有 $r=e^x$,

$$\theta=y+2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

① 函数 $w=e^z$ 把 z 平面内的直角坐标系映射成 w 平面内的极坐标系;

② $w=0$ 不是象点;

③ 这映射不是一一对应的.

如果限制 y 的区间长度不大于 2π,任意取定 k 值,则映射成为一一对应. 例如取 $0<y<2\pi$, $k=0$,则 z 平面内的**带形域**(strip-like region)$0<y<2\pi$ 一对一地映射成沿正 u 轴有割缝的 w 平面,如图 16.1 所示.

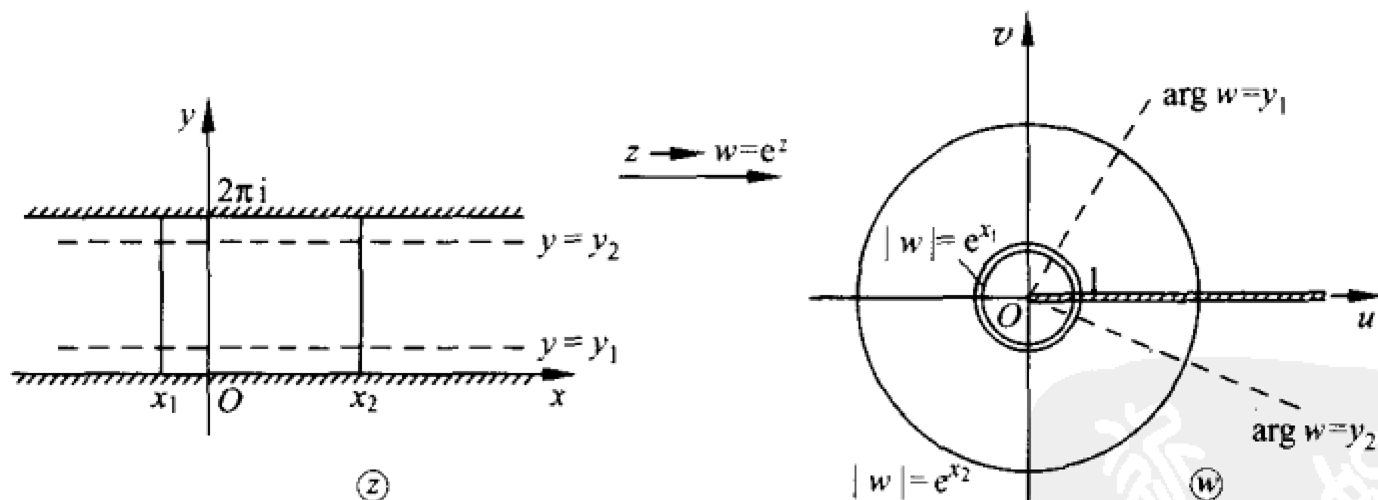


图 16.1

定义 16.5.3 如果域 D 内的解析函数是双方单值的,即映射是一一对应的,就说域 D 是该解析函数的一个**单叶性域**(single sheet region). 这时也说该函数在域 D 内是**单叶的**(single sheet).

例 16.5.4 $2k\pi<y<2(k+1)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$与$(2k-1)\pi<y<(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$都是指数函数$w=e^z$的单叶性域.

16.5.2 三角函数

定义 16.5.5 正弦(sine)、余弦(cosine)、正切(tangent)、余切(cotangent)函数定义如下：

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots,\qquad |z|<+\infty;\tag{16.12}$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\cdots,\qquad |z|<+\infty;\tag{16.13}$$

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z};\tag{16.14}$$

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}.\tag{16.15}$$

性质 16.5.6

(1) 奇偶性

$$\sin(-z)=-\sin z,\qquad \cos(-z)=\cos z,$$

$$\tan(-z)=-\tan z,\qquad \cot(-z)=-\cot z.$$

(2) 通过 Euler 公式与指数函数联系着：

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,\tag{16.16}$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\qquad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\tag{16.17}$$

$$\tan z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}=\frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}=-i+\frac{2i}{e^{2iz}+1},\tag{16.18}$$

$$\cot z=\frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}=i+\frac{2i}{e^{2iz}-1}. \tag{16.19}$$

(3) 周期性　$\sin z,\cos z$ 以 2π 为周期，$\tan z,\cot z$ 以 π 为周期.

(4) 恒等式　平面三角学的一切三角公式对复的三角函数都适用.

(5) **零点**(zero)

$$(\sin z)_{z=k\pi}=0,\quad (\cos z)_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}=0\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

并且这两个函数没有其他零点.

(6) 解析性

$$\frac{d(\sin z)}{dz}=\cos z,\quad \frac{d(\cos z)}{dz}=-\sin z,\quad |z|<+\infty; \tag{16.20}$$

$$\frac{d(\tan z)}{dz}=\frac{1}{\cos^2 z},\quad z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots; \tag{16.21}$$

$$\frac{d(\cot z)}{dz}=-\frac{1}{\sin^2 z},\quad z\neq k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{16.22}$$

(7) 无界性　$|\sin z|,|\cos z|$ 当 $|y|$ 充分大时都可以任意大，因此与实的情形截然相反，复的正弦、余弦函数都是无界的.

(8) 映射　由于具有周期性，三角函数在包含全体有限复数的平面($|z|<+\infty$)内都不是单叶的，因此都不是一对一的映射.

例 16.5.7　求出 $w=\cos z$ 的一个单叶性域.

解　因为 $\cos z$ 以 2π 为周期，其单叶性域首先应考虑在一个周期内，例如 $0<\mathrm{Re}\, z<2\pi$.

由 $w=\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$，令 $w_1=iz$，$w_2=e^{w_1}$，则 $w=\dfrac{1}{2}\left(w_2+\dfrac{1}{w_2}\right)(w_2\neq0)$. 设 $w_2\neq w_2{}^*$ 而对应的 w 值相等. 则 w_2 与 $w_2{}^*$ 有下列关系：

$$\frac{1}{2}\left(w_2+\frac{1}{w_2}\right)=\frac{1}{2}\left(w_2{}^*+\frac{1}{w_2{}^*}\right),$$

$$w_2 w_2^*(w_2 - w_2^*) = w_2 - w_2^*.$$

由此推得 $w_2^* = \dfrac{1}{w_2}$. 可见，上（下）半 w_2 平面或单位圆内（外）$|w_2|<1$ 都是 $w=\dfrac{1}{2}\left(w_2+\dfrac{1}{w_2}\right)$的单叶性域. 今取上半 w_2 平面 $0<\arg w_2<\pi$.

由 $w_2 = e^{w_1}$ 有 $\arg w_2 = \mathrm{Im}\, w_1 = \mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}\, z$，所以 $0<\arg w_2<\pi \rightarrow 0<\mathrm{Re}\, z<\pi$.

于是得到 $w=\cos z$ 的一个单叶性域为带形域 $0<\mathrm{Re}\, z<\pi$.

16.5.3 双曲函数

定义 16.5.8 双曲正弦(hyperbolic sine)、双曲余弦(hyperbolic cosine)、双曲正切(hyperbolic tangent)、双曲余切函数(hyperbolic cotangent)定义如下：

$$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$\tanh z=\frac{\sinh z}{\cosh z}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}, \quad \coth z=\frac{\cosh z}{\sinh z}=1+\frac{2}{e^{2z}-1}.$$

性质 16.5.9

(1) 奇偶性

$$\sinh(-z)=-\sinh z, \qquad \cosh(-z)=\cosh z,$$

$$\tanh(-z)=-\tanh z, \qquad \coth(-z)=-\coth z.$$

(2) 周期性 $\sinh z$，$\cosh z$ 以 $2\pi i$ 为周期，$\tanh z$，$\coth z$ 以 πi 为周期.

(3) 与三角函数间满足关系式

$$\sinh z=-i\sin(iz), \qquad \cosh z=\cos(iz).$$

$$\tanh z=-i\tan(iz), \qquad \coth z=i\cot(iz).$$

（4）解析性

$$\frac{\mathrm{d}(\sinh z)}{\mathrm{d}z}=\cosh z,\quad \frac{\mathrm{d}(\cosh z)}{\mathrm{d}z}=\sinh z,\quad |z|<+\infty. \tag{16.23}$$

16.6 多值函数

16.6.1 根式函数 $w=\sqrt{z}$ 及其解析分支

根式函数 $w=\sqrt{z}$ $(w^2=z)$是最简单的多值函数．当 $z\neq 0$ 时，函数 w 有两个值：

$$w=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z+2k\pi}{2}},\qquad k=0,1. \tag{16.24}$$

当限定幅角的主值范围，譬如规定 $0<\arg z<2\pi$，则得到 $w=\sqrt{z}$不同的两个单值支：

$$w=\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}},$$

$$w=\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z+2\pi}{2}}=-\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}.$$

而且每一支都是解析的，分别有（见图 16.2）

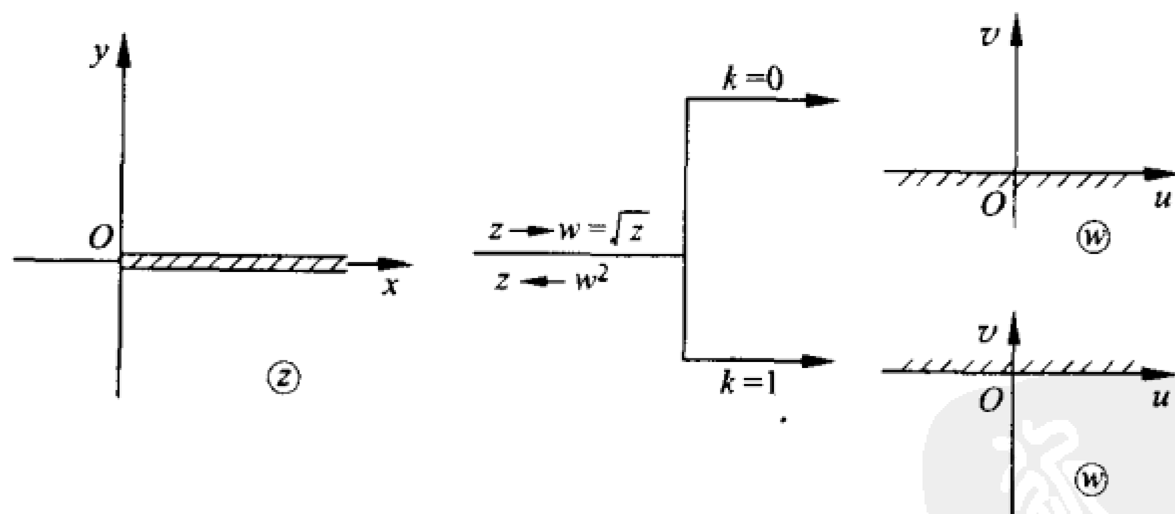


图 16.2

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{2\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}}\quad 与\quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{-1}{2\sqrt{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{2}}},\qquad z\neq 0.$$

原点 $z=0$ 是一特殊的点：

(1) 当 $z=0$ 时 $w=0$(只有一个值);

(2) 当点 $z(\neq 0)$围绕原点转一周后对应的函数由一个分支连续地进入另一分支.

定义 16.6.1 如果当点 z 绕某点 a 转一圈后,函数的值不复原而变成新的值,就称点 a 为该多值函数的一个**分支点**(branch point),简称**支点**.

定义 16.6.2 凡不包含多值函数的支点的任何一个域,都是该多值函数的一个单叶性域,在该单叶性域内可以分出多值函数的一个解析的单值支,称为多值函数的一个**解析分支**(analytic branch).

例 16.6.3 $z=0,z=\infty$都是函数 $w=\sqrt{z}$的分支点.沿这两个支点的连线剪开 z 平面,就得到函数 $w=\sqrt{z}$ 的一个单叶性域(参看图 16.2).

对 $w=\sqrt{z}$的每一分支引进一个沿支点连线剪开(例如沿正 x 轴剪开)的 z 平面.这两个平面(或称为**叶**)被看做是一个位于另一个的上方,并且首先是在支点处连接起来;而在割缝处则使一叶的上(下)**岸**(bank)与另一叶的下(上)岸相粘连.这就得到了函数 $w=\sqrt{z}$的Riemann 面(Riemann surface),确切地说,它是二叶 Riemann 面,参见图 16.3 及图 16.4.

当 z 在 Riemann 面上变动时,w 就成为 z 的一个单值函数.

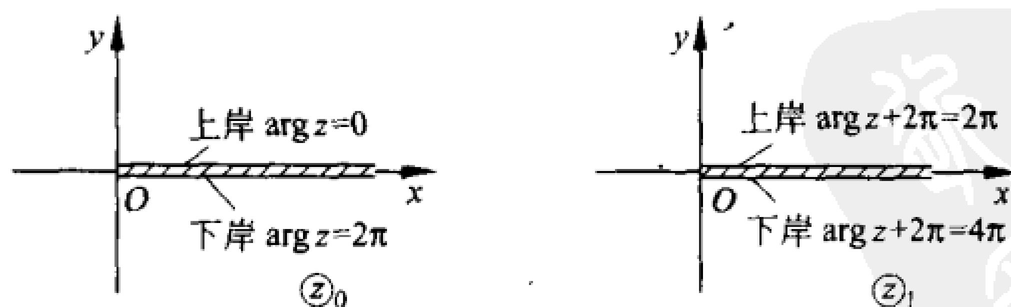


图 16.3

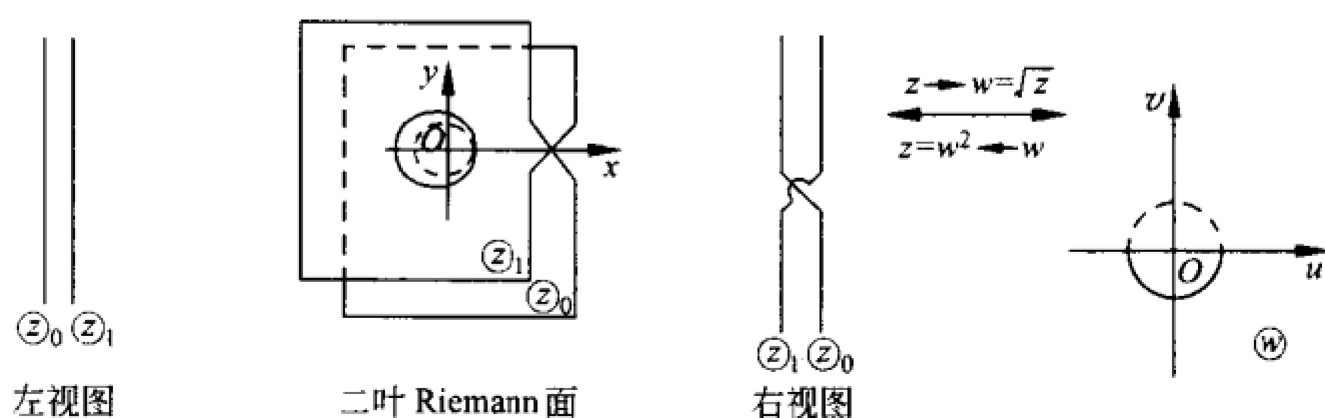


图 16.4

16.6.2 对数函数

对数函数 $w=\mathrm{Ln}\ z$ 即 $e^w=z$.

性质 16.6.4

(1) $z=e^w\neq 0$.

(2) $\mathrm{Ln}(z_1z_2)=\mathrm{Ln}\ z_1+\mathrm{Ln}\ z_2$.

(3) w 平面上边界平行 u 轴宽为 2π 的带形域都是函数 $z=e^w$ 的单叶性域.

(4) 若令 $z=\rho e^{i\phi}$, $w=u+iv$,则由 $e^w=z$ 有 $\rho=e^u$, $\phi+2k\pi=v$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 所以

$$\mathrm{Ln}\ z=\mathrm{Ln}\ \rho+i(\phi+2k\pi)\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{16.25}$$

或写成

$$\mathrm{Ln}\ z=\ln|z|+i\ \mathrm{Arg}\ z.\tag{16.26}$$

对数函数是无穷多值的.

(5) 支点为 $z=0$, $z=\infty$. 在沿两个支点的连线剪开 z 平面所得域内,可以分出对数函数 $w=\mathrm{Ln}\ z$ 无穷多个解析分支.

(6) 当 $\mathrm{Arg}\ z$ 取主值时,称为对数函数的主值分支,记为(这时 $\mathrm{Arg}\ z$ 改记为 $\arg z$)

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,\tag{16.27}$$

其导数为

$$\frac{\mathrm{d}(\ln z)}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{z}.$$

并且与其主值分支的关系如下：

$$\mathrm{Ln}\ z=\ln z+\mathrm{i}\ 2k\pi,\qquad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.\qquad(16.28)$$

例 16.6.5 求 $w=\mathrm{Ln}\ z$ 在 $z_0=1+\mathrm{i}$ 的对应值为 $w=\ln\sqrt{2}-\mathrm{i}\frac{7}{4}\pi$那一分支时，$z=-2\mathrm{i}$ 所对应的函数值.

解 按一般公式有

$$w=\mathrm{Ln}\ z=\ln z+2k\pi\mathrm{i}=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+2k\pi\mathrm{i}$$
$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

代入给定条件 $w|_{z_0=1+\mathrm{i}}=\ln\sqrt{2}-\mathrm{i}\frac{7}{4}\pi$，又有

$$\arg(1+\mathrm{i})+2k\pi=-\frac{7}{4}\pi.$$

从而，由于 $\arg(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$，我们定出 $k=-1$. 于是

$$w=\mathrm{Ln}(z)=\ln z+\mathrm{i}2(-1)\pi,$$

所以

$$w|_{z=-2\mathrm{i}}=\mathrm{Ln}(-2\mathrm{i})=\ln|-2\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(-2\mathrm{i})+2(-1)\pi\mathrm{i}.$$

随着辐角主值范围取为 $0\leqslant\arg z<2\pi$ 或 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，有

$$\arg(-2\mathrm{i})=\begin{cases}\frac{3}{2}\pi,\\ -\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

因而相应地有

$$w|_{z=-2\mathrm{i}}=\mathrm{Ln}(-2\mathrm{i})=\begin{cases}\ln 2+\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}\pi-2\pi\right)=\ln 2-\mathrm{i}\frac{\pi}{2},\\ \ln 2+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2}-2\pi\right)=\ln 2-\mathrm{i}\frac{5}{2}\pi.\end{cases}$$

映射如图 16.5 所示.

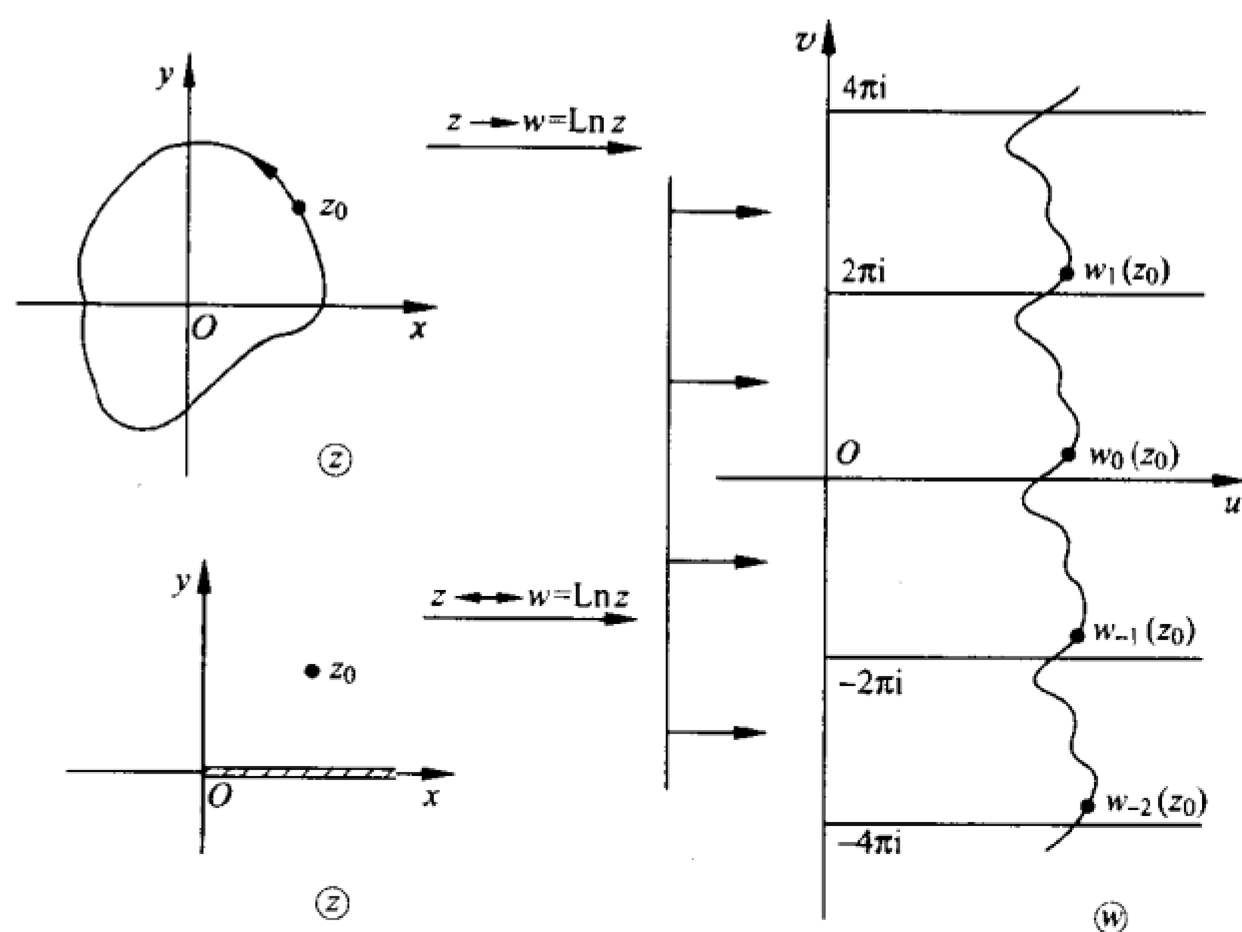


图 16.5

对数函数的 Riemann 面是无穷多叶的,如图 16.6 所示.

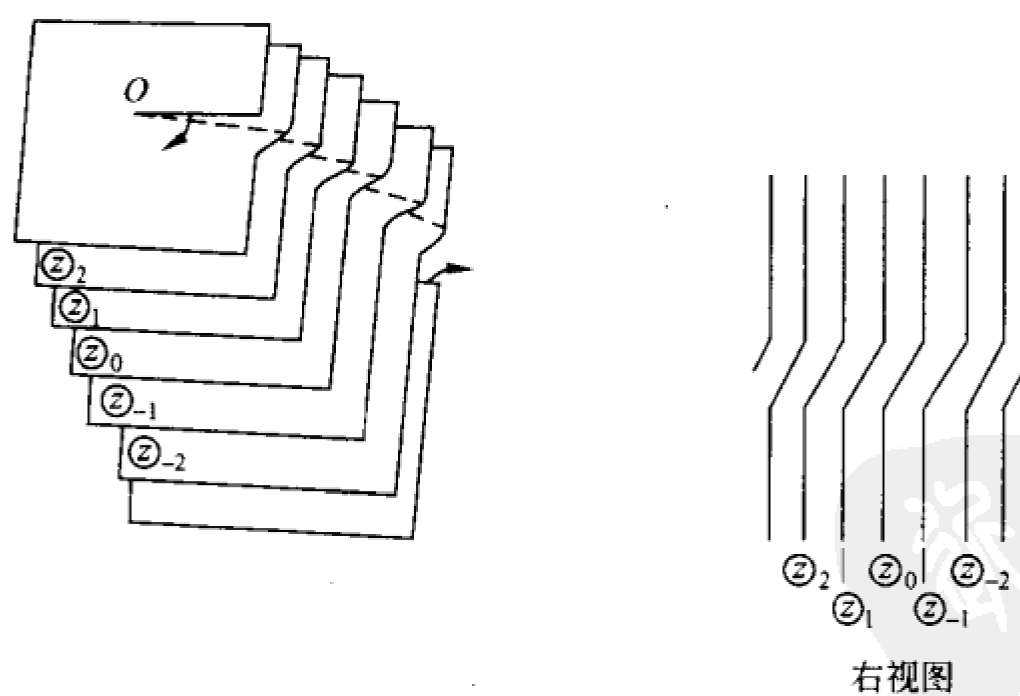


图 16.6

16.6.3 一般幂函数

定义 16.6.6 对任意复常数 a,一般幂 z^a 的定义如下：

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}. \tag{16.29}$$

特别地,当 $a=\dfrac{1}{n}$(n 是大于 2 的自然数)时,

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln|z| + i\frac{1}{n}(\arg z + 2k\pi)} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \qquad k=0,1,\cdots,n-1.$$

这时 $z^{\frac{1}{n}}$ 的 Riemann 面是 n 叶的,如图 16.7 所示.

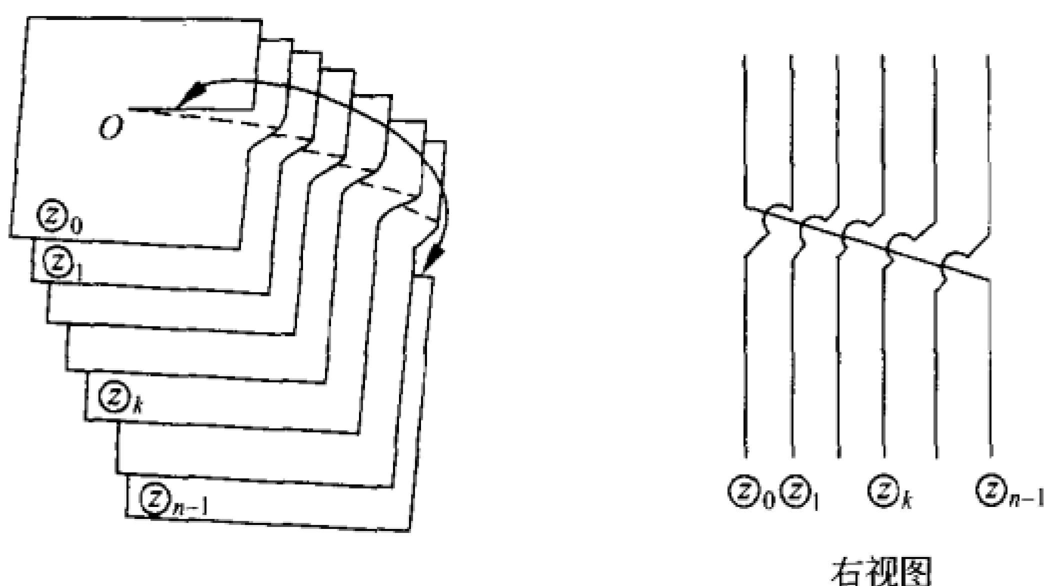


图 16.7

应该注意的是,Riemann 面不仅是描绘多值函数的一个方法,而且有效地使这样的函数在曲面上单值,与 z 平面上的情形相对立. 这样,关于单值函数的定理(例如 Cauchy 积分定理等)可以推广到多值函数. 但是不可能在三维实空间里准确地表示出 Riemann 面,而且多值函数越复杂,它的支点可能很多,于是 Riemann 面也就更复杂.

16.6.4 反三角函数

由正弦函数 $z=\sin w=\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$解出 w,即得反正弦函数：

$$\operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i}\,\operatorname{Ln}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1-z^2}\right). \tag{16.30}$$

同理可得

$$\operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i}\,\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \tag{16.31}$$

$$\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\operatorname{Ln}\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, \tag{16.32}$$

$$\operatorname{Arccot} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\operatorname{Ln}\frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}. \tag{16.33}$$

16.6.5 反双曲函数

反双曲函数是由双曲函数的表达式解出 z 后，再将 z,w 互换得到的：

$$w = \operatorname{Arsinh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right), \tag{16.34}$$

$$w = \operatorname{Arcosh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right), \tag{16.35}$$

$$w = \operatorname{Artan} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}, \tag{16.36}$$

$$w = \operatorname{Arcoth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}. \tag{16.37}$$

17 复变函数的积分

17.1 引言

复变函数的积分起源于利用复函数计算定积分的值及研究流体力学中的线积分问题. Cauchy 继承前人的成果，从实函数的积分计算转到复函数的积分概念，用以研究解析函数的基本性质. 他所得到的积分定理成为整个解析函数的理论基础. 这个定理的最直接最重要的结果——Cauchy 积分公式把解析函数表成了积分形式，成为研究解析函数的一个基本工具.

17.2 复变函数的积分

定义 17.2.1 设 C 为复平面内一路径，z_0 为起点，s 为终点(见图 17.1). 又设单值函数 $f(z)$在 C 上有定义.

(1) 将 C 沿正方向任意分为 n 个子弧段，分点为 $z_0, z_1, \cdots, z_n = s$，并令 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

(2) 在每一子弧段上任取一点 ζ_k $(k=1,2,\cdots,n)$.

(3) 考虑和式的极限 $\lim\limits_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$. 这个极限存在时，就称它的值为函数 $f(z)$沿路径 C 的**积分**(definite integral). 记为 $\int_{z_0(C)}^{s} f(z)\mathrm{d}z$，简记为

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z. \tag{17.1}$$

我们称 $f(z)$ 为**被积函数**(integrand);$f(z)\mathrm{d}z$ 为**被积分式**(integrand expression);z 为**积分变量**(variable of integration);C 为**积分路径**(path of integration);z_0 与 s 分别为积分**下限**(lower limit)与**上限**(upper limit).

当 C 为 x 轴上一线段$[\alpha,\beta]$时,有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x .$$

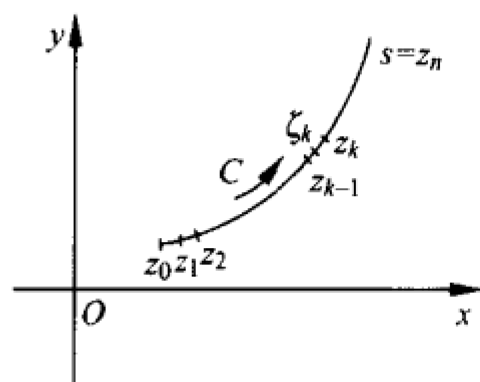


图 17.1

当 C 为闭路径时,称积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 为沿闭路径的积分或**回路积分**(contour integral),记为

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z. \qquad (17.2)$$

通常取反时针方向为正向,相反的方向为负向.

定理 17.2.2 如果被积函数 $f(z)$ 在积分路径 C 上连续,则积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 一定存在.

性质 17.2.3 同实的线积分一样,有:

(1) $\int_C [f_1(z)+f_2(z)]\mathrm{d}z = \int_C f_1(z)\mathrm{d}z + \int_C f_2(z)\mathrm{d}z.$

(2) $\int_C af(z)\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\mathrm{d}z$,其中 a 是复常数.

(3) $\int_{z_0(C)}^{Z} f(z)\mathrm{d}z + \int_{Z(C')}^{Z'} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0(C+C')}^{Z'} f(z)\mathrm{d}z.$

(4) $\int_{z_0(C)}^{Z} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_0(C_1)}^{Z'} f(z)\mathrm{d}z + \int_{Z'(C_2)}^{Z} f(z)\mathrm{d}z$, 其中 Z' 是路径C 上任一点将 C 分为 C_1, C_2 两段.

(5) $\int_{z_0(C)}^{Z} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{Z(C^-)}^{z_0} f(z)\mathrm{d}z$, 或简记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z.$

(6) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s$，其中 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}z|$ 是弧微分.

定理 17.2.4 如果函数 $f(z)$ 在路径 C 上有界，即有常数 M 使得 $|f(z)|\leqslant M\ (z\in C)$，又如果 C 的弧长为 l，则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant Ml. \tag{17.3}$$

算法 17.2.5

(1) 设路径的参数方程为 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(z(t))[x'(t)+\mathrm{i}y'(t)]\mathrm{d}t. \tag{17.4}$$

(2) 如果令 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y. \tag{17.5}$$

例 17.2.6 设 n 是整数，C 是由圆周 $|z|=R$ 正向构成的圈. 求 $\oint_C z^n\mathrm{d}z$.

解 圆周 C 具有参数方程 $z=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，是一条简单闭路径，不妨设 ϕ 从 0 增到 2π. 我们有

$$\oint_C z^n\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})^n R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\phi = \begin{cases} 0, & n\neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i}, & n=-1. \end{cases}$$

一般地，对任意复数 a 与整数 n，有重要的公式

$$\oint_{|z-a|=R}\frac{1}{(z-a)^n}\mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n\neq 1, \\ 2k\pi\mathrm{i}, & n=1, \end{cases} \tag{17.6}$$

其中 $|k|$ 是点 z 围绕点 a 旋转的圈数；取正向时 $k>0$，取负向时 $k<0$.

17.3 Cauchy 积分定理及其简单的推论与扩充

定理 17.3.1 Cauchy 定理　设函数 $f(z)$在单连通域 D 内解析,则沿 D 内任意一条闭路径 C 的积分等于 0:$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$.

定理 17.3.2 设函数 $f(z)$在单连通域 D 内连续.又设 z_0, z 为 D 内两点.如果当 z_0 固定,且连接 z_0, z 的路径全部属于 D,因此积分 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关时,则积分是上限 z 的一个解析函数 $F(z)$,并且

$$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right) = f(z). \tag{17.7}$$

定义 17.3.3 函数 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 称为 $f(z)$的一个**原函数**(primitive function)或**不定积分**(indefinite integral).

定理 17.3.4 每一个在单连通域内解析的函数都(在该解析域内)具有原函数.而且任意两原函数相差一复常数.

定理 17.3.5 如果函数 $f(z)$在单连通域 D 内解析,而 $F(z)$是 $f(z)$在 D 内的一个原函数,则对 D 内任意两点 z_1, z_2 有

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = F(z_2) - F(z_1).$$

定理 17.3.6 设域 D 是简单闭路径 C 的内部.如果函数 $f(z)$在 D 内解析,在 $\overline{D}$ 上连续,则 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$.

定理 17.3.7 设函数 $f(z)$在域 G 内单值解析.又设 C_0, C_1 为 G 内两不相交的同向简单闭路径,C_1 整个被包围在 C_0 之内,两者之间的环形域完全属于 G(参见图 17.2).则

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

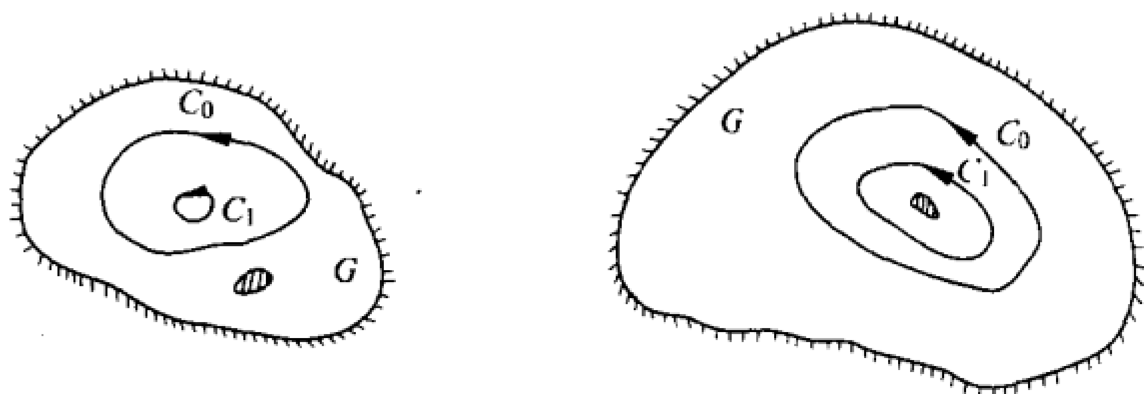


图 17.2

定理 17.3.8 设 $C_0,C_1,\cdots,C_n$ 为 $n+1$ 条互不相交的简单正向闭路径. $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 彼此互不包围但都被 C_0 包围在内部,如图 17.3 所示. 设函数 $f(z)$ 在以这 $n+1$ 条路径为边界的 $n+1$ 连通域上解析,则

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z. \quad (17.8)$$

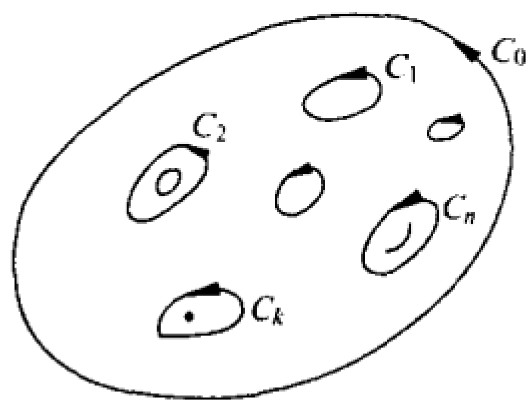


图 17.3

例 17.3.9 计算 $\oint_C \frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}\mathrm{d}z$,其中 C 是圆周 $|z+1|=3$ 取正向.

解 被积函数在 $z=\mathrm{i}$, $z=-\mathrm{i}$ 处不解析,C 所围成域是三连通的. 分别以 i 与 $-$i 为心作小圆周 $C_1:|z-\mathrm{i}|=\frac{1}{3}$, $C_2:|z+\mathrm{i}|=\frac{1}{3}$,互不相交,都取正向,将被积函数分解成部分分式,就有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}\mathrm{d}z &= \oint_{C_1} \frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2\mathrm{i}}{z^2+1}\mathrm{d}z \\ &= \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}} - \oint_{C_1} \frac{1}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}} - \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{i}} \\ &= 2\pi\mathrm{i} - 0 + 0 - 2\pi\mathrm{i} = 0.\end{aligned}$$

例 17.3.10 试讨论 $\int_{1(C)}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta$ 的值.

解 当 $z=0$ 时 $\frac{1}{z}$ 不可导，其解析域不包括原点. 在包含原点的域内积分与路径 C 有关，积分所确定的函数是无穷多值的.

首先，我们设 C 为一位于右半平面内的路径，记为 γ_0. 这时 γ_0 上的点 z 都满足不等式 $-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$，因此积分值是对数函数的主值，记为 $\ln z=\int_{1(\gamma_0)}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta$.

对于其他路径，取决于该路径与 γ_0^- 组成的回路是否围绕原点. 如果不绕，则两值相等；如果绕，则两值之和等于 $2\pi i$ 乘以所绕的圈数，正向时取正整数，负向时取负整数，如图 17.4 所示.

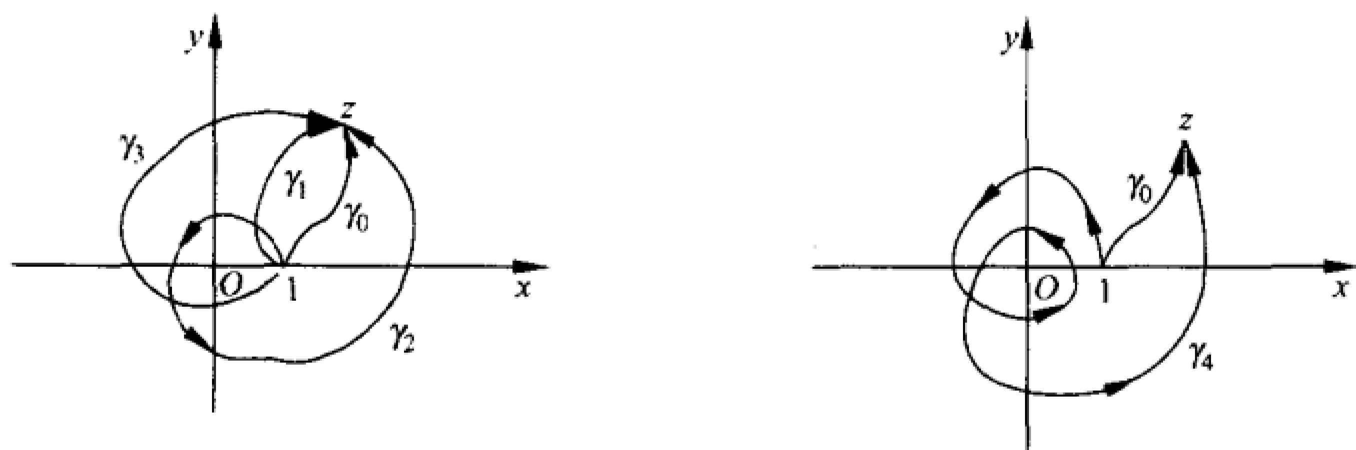


图 17.4

$$\int_{1(\gamma_1)}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta=\int_{1(\gamma_0)}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta=\ln z,$$

$$\int_{1(\gamma_2)}^{z}=\int_{1(\gamma_0)}^{z}+2\pi i=\ln z+2\pi i,$$

$$\int_{1(\gamma_3)}^{z}=\int_{1(\gamma_0)}^{z}-2\pi i=\ln z-2\pi i,$$

$$\int_{1(\gamma_4)}^{z}=\int_{1(\gamma_0)}^{z}+2(2\pi i)=\ln z+2(2\pi i).$$

所以

$$\int_{1(C)}^{z} \frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta = \ln z + k(2\pi\mathrm{i}), \qquad k \text{ 由 } C \text{ 确定}.$$

当 C 在其他位置(不在右半平面)时，只要 C 不经过原点，讨论的方法与上同，仅只由 arg z 的范围不同而得 $\ln z$ 不同的单值支.

17.4 Cauchy 积分公式

Cauchy 积分公式(Cauchy formula)是 Cauchy 积分定理的最重要的推论.

定理 17.4.1 设函数 $f(z)$在单连通域 D 内解析. 设 z 为 D 内一点，C 为 D 内包围点 z 的一条简单正向闭路径，见图 17.5，则函数 $f(z)$在 D 内可以表示成回路积分：

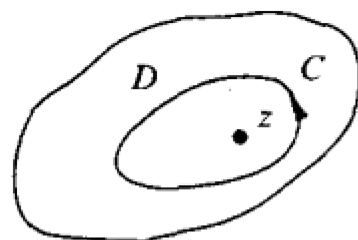


图 17.5

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta. \tag{17.9}$$

定义 17.4.2 公式(17.9)称为 Cauchy 积分公式.

Cauchy 积分公式说明了解析函数的数值彼此之间有着密切的联系：沿闭路径的值完全决定了路径内部的值.

Cauchy 积分公式可以扩充到多连通域(参见图 17.6，图 17.7).

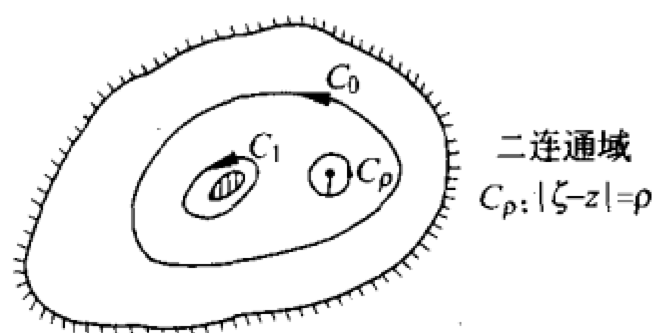


图 17.6

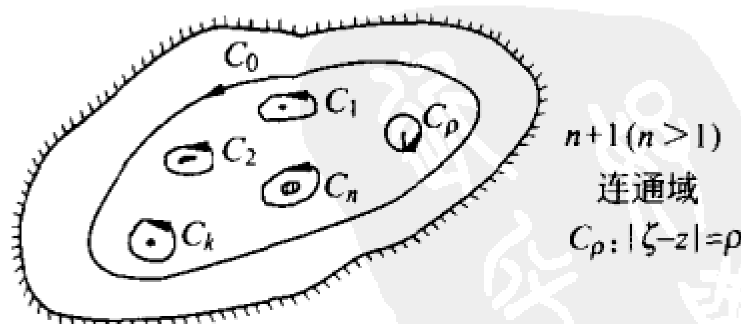


图 17.7

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (17.10)$$
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (17.11)$$

定义 17.4.3 设 L 是 z 平面内任意路径，函数 $\phi(z)$ 在 L 上连续，则积分表达式
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad (17.12)$$
称为 **Cauchy 型积分**(integrals of the Cauchy type).

式(17.12)对于每一个不在 L 上的点 z 都有确定的值，因此也就确定了 z 的一个单值函数 $F(z)$：$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$.

定理 17.4.4 函数 $F(z)\left(=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right)$ 在每一个不包含 L 上点的单连通域 D 内解析，其导函数是 $F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta$. 同时在域 D 内存在着任意阶导数：
$$F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_L\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \qquad n=1,2,3,\cdots. \qquad (17.13)$$

定理 17.4.5 如果单值复变函数 f 在域 G 内每一点处都有一阶导数，则在该域内 f 有任意阶导数存在，而且
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, \qquad n=1,2,3,\cdots. \qquad (17.14)$$
其中 z 为 G 内一点，C 为 G 内围绕 z 的一条正向简单闭路径，并且 C 的内部全属于 G.

在域内只要解析，就有任意阶导数存在，而且函数值以及各阶

导数值都可以用回路积分表示. 这是复变函数的又一个特性，非实自变量的实函数所可比拟的.

定理 17.4.6 如果函数 $f(z)$ 在闭圆域 $|z-z_0|\leqslant R(R>0)$ 上解析，在圆周 $|z-z_0|=R$ 上有界：$|f(z)|\leqslant M$，则

$$|f^{(n)}(z_0)|\leqslant\frac{n!\,M}{R^n}\qquad(\text{Cauchy 不等式})\qquad(17.15)$$

对所有的自然数 n 成立.

定理 17.4.7 Liouville 定理　在全复平面内解析的有界函数必是常数.

定理 17.4.8 Morera 定理　如果函数 $f(z)$ 在域 D 内是连续的，而且对 D 内任意闭路径 C 总有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$，则 $f(z)$ 在 D 内是解析的.

例 17.4.9 已知 $\frac{1}{z^2}$ 在去掉原点 $z=0$ 的复平面内连续，对任意不过原点的闭路径 C，回路积分 $\oint_C\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z=0$. 所以，由 Morera 定理，$\frac{1}{z^2}$ 在去掉原点的复平面内解析.

现在回到 Cauchy 型积分(17.12)式，当 L 是一简单闭路径，$\Phi(z)$ 在 L 上解析时，$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_L\frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$ 表出了一个在闭路径 L 的内部解析的函数 $F(z)$，与一个在 L 的外部解析的函数 $F_1(z)$.

当点 z 从 L 的内部逼近 L 上任一点 z_0 时，函数 $F(z)$ 趋向一个确定的有限极限，而这些极限值就构成一个函数 $\Phi_i(z_0)$：

$$\Phi_i(z_0)=\lim_{z\to z_0}f(z).$$

同理，当点 z 从 L 的外部逼近 z_0 点时，得到函数 $\Phi_e(z_0)$：$\Phi_e(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}F_1(z)$. $\Phi_i(z_0)$，$\Phi_e(z_0)$ 确定在闭路径 L 的一切点上. 可参见图 17.8.

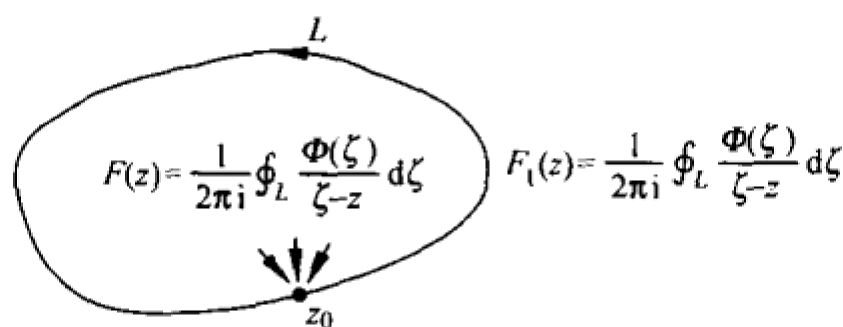


图 17.8

定理 17.4.10 Cauchy 型积分的极限值 $\Phi_i(z_0)$,$\Phi_e(z_0)$与边界函数 $\Phi(z_0)$及积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta$ 之间有下列关系:

$$\begin{cases}\Phi_i(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta+\dfrac{1}{2}\Phi(z_0), \\ \Phi_e(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta-\dfrac{1}{2}\Phi(z_0);\end{cases} \tag{17.16}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{\Phi(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta=\dfrac{\Phi_i(z_0)+\Phi_e(z_0)}{2}, \\ \Phi(z_0)=\Phi_i(z_0)-\Phi_e(z_0).\end{cases} \tag{17.17}$$

17.5 最大模原理与调和函数

定理 17.5.1 如果函数 $f(z)$在圆域$|z-z_0|<R$ 内解析,则有平均值公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\phi})d\phi. \tag{17.18}$$

平均值公式表明:解析函数 $f(z)$在圆心 z_0 处的值等于它在圆周上的值的算术平均值.

定理 17.5.2 **最大模原理**(principle of the maximum modulus) 如果函数 $f(z)$在域 D 内解析,且不是常数,则$|f(z)|$在 D 内取不到最大值.

推论 17.5.3 如果函数 $f(z)$ 在有界域 D 内解析，在闭域 $\overline{D}$ 上连续，并且不是常数，则 $|f(z)|$ 在而且只在 D 的边界上达到最大值.

引理 17.5.4 Schwarz 引理 如果函数 $f(z)$ 在圆域 $|z|<1$ 内解析，且满足条件 $f(0)=0$，$|f(z)|\leqslant 1$，则在圆域内必有 $|f(z)|\leqslant|z|$，$|f'(0)|\leqslant 1$.

如果对于 $|z|<1$ 内任一点 $z_0(\neq 0)$ 有 $|f(z_0)|=|z_0|$，则 $|f(z)|\equiv|z|$，$|z|<1$，因而又有 $f(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}z$，其中 α 是一实常数.

定义 17.5.5 下列的"调和函数第一边界问题"也称为 Dirichlet 问题. 求出满足下列条件的函数 $u(z)$，

(1) 在某域 D 内是调和函数；

(2) 在闭域 $\overline{D}$ 上是连续的；

(3) 在 D 的边界 C 上取已知值 $\tilde{u}(\zeta)$.

定理 17.5.6 对于给定的域 D 与边界值 $\tilde{u}(\zeta)$，Dirichlet 问题的解不能多于一个.

定理 17.5.7 如果 $u(z)$ 是圆域 $|z|<R$ 内的调和函数，$u(z)$ 在闭圆域 $|z|\leqslant R$ 上连续，记 $z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，则当 $\rho<R$ 时有 Poisson（泊松）公式

$$u(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi})=\frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\phi)+\rho^2}\mathrm{d}\theta. \tag{17.19}$$

特别地，当 $\rho=0$ 时，Poisson 公式有如下形式：

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta. \tag{17.20}$$

这表明调和函数在圆心处的值等于它在该圆周界上的值的算术平均值.

18 幂级数

18.1 引言

Cauchy 积分定理不仅产生解析函数的积分表示，可用以建立解析函数的许多特有的性质；而且，由于被积分式可以展成适当的等比级数，它还进一步产生解析函数的幂级数表示. 等比级数的收敛性要求公比的模小于 1. 这个条件在圆域内导致 Taylor(1685—1713)级数，在环域内导致 Laurent(1813—1854)级数.

Weierstrass 在幂级数的基础上创建解析函数的理论，并建立起**解析开拓**(analytic continuation)的方法.

为了得到在 $z=\infty$ 附近的展开式，Weierstrass 使用 $\frac{1}{z}$ 的级数. 如果函数的幂级数展开式在复平面内收敛，Weierstrass 就称它为一个**整函数**(entire function). 如果它不是一个多项式，那么它在 ∞ 处便有一个**本性奇点**(essential singularity)，例如 $\sin z$.

18.2 函数项级数的一致收敛性

定义 18.2.1 一致收敛性(uniform convergence) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在域 D 内收敛于 $s(z)$. 如果对于任意给定的正数 ε，存在只依赖于 ε 的正整数 N，使当 $n>N$ 时，不等式 $|r_n(z)| = |s(z)-s_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon$ 对于 D 内的一切点 z 都成立，就

说函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内是一致收敛(均匀收敛)的.

定理 18.2.2 Weierstrass M-判别法 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 所有的项在域 D 内都满足条件 $|f_n(z)| \leqslant M_n (n=1, 2, \cdots)$，其中 M_n 都是正的实常数，而且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内一致收敛.

定理 18.2.3 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内一致收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 与 $p\geqslant 1$ 时，不等式 $|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)|<\varepsilon$ 在 D 内恒成立.

定义 18.2.4 如果对于任意给定的正数 ε，存在只依赖于 ε 的正整数 N，使当 $n>N$ 时，不等式 $|r_n(z)| = |s(z)-s_n(z)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)\right| < \varepsilon$ 对于曲线 C 上的一切点 z 都成立，我们就说函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 C 上一致收敛.

定理 18.2.5 如果函数 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 在域 D 内(或路径 L 上)连续；级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内(或路径 L 上)一致收敛到 $s(z)$，则 $s(z)$ 在 D 内(或 L 上)连续.

定理 18.2.6 如果 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$ 在路径 L 上连续；级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 L 上一致收敛到 $s(z)$，则该级数可以沿 L 逐项积分

$$\int_L s(z)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_L f_n(z)\mathrm{d}z.$$

定义 18.2.7 设：

(1) 函数 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$在域 D 内有定义；

(2) 当 $z\in D$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 收敛；

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内任一有界闭域$\overline{D^*}$ ($\overline{D^*}\subsetneqq D$)上一致收敛. 则说级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内闭一致收敛.

定理 18.2.8 Weierstrass 第一定理　如果：

(1) $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$在域 D 内解析；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内闭一致收敛到 $s(z)$，则：

① $s(z)$在 D 内解析；

② $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(z)$ 在 D 内闭一致收敛到 $s^{(p)}(z)(p=1,2,\cdots)$.

这说明解析函数项级数在一致收敛的前提下可以逐项微分任意次，进一步说明了解析性的原有特点，即一阶导数在域内的存在蕴含着各阶导数的存在. 这成了解析函数理论的一个基本定理.

定理 18.2.9 Weierstrass 第二定理　设函数 $f_n(z)(n=1,2,\cdots)$在有界域 D 内解析，在闭域 $\bar{D}$ 上连续. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 的边界上一致收敛，则它在整个闭域 $\bar{D}$ 上也一致收敛.

18.3 幂级数

函数项级数中重要的一类是幂级数.

定义 18.3.1 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数，其中 c_n 是复常数，称为它的系数，a 也

是复常数.

当 $a=0$,这时幂级数形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots. \tag{18.1}$$

定理 18.3.2 Abel 第一定理 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在点 $z_0(\neq 0)$处收敛,则在圆域 $|z|<|z_0|$ 内绝对收敛,且在任意闭圆域 $|z|\leqslant\lambda|z_0|(0<\lambda<1)$上一致收敛.

定义 18.3.3 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,总有一个非负的 $R(0\leqslant R\leqslant +\infty)$使得这个级数在 $|z|<R$ 时绝对收敛,在 $|z|>R$ 时发散,我们称 R 为收敛半径(radius of convergence),圆 $|z|=R$ 为收敛圆(circle of convergence).

收敛半径的求法 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\sigma\ (\leqslant +\infty)$或 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\sigma\ (\leqslant+\infty)$. 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径 R 适合 Cauchy-Hadamard 公式 $R=\frac{1}{\sigma}$. 当 $\sigma=+\infty$时 $R=0$;当 $\sigma=0$ 时 $R=+\infty$.

定义 18.3.4 实数列 $|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \cdots, \sqrt[n]{|c_n|}, \cdots$ 的上极限(upper limit),就是该数列的最大的极限点(小于等于$+\infty$)(定义 15.4.7). 记为 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$.

定理 18.3.5 设 $\sigma=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$,则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径 R 等于$\frac{1}{\sigma}$.

例 18.3.6 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[8+(-1)^n]^n z^n$ 的收敛半径 R.

解 因为 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{[8+(-1)^n]^n}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}[8+(-1)^n]=9$,所以

$R = \dfrac{1}{9}$.

性质 18.3.7 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 具有性质：

(1) 在其收敛圆 $|z|=R$ 内的任一闭圆域 $|z|\leqslant g(g<R)$ 上一致收敛；

(2) 和函数 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内连续，并且可以沿圆域 $|z|<R$ 内任意路径逐项积分；

(3) $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内解析，其 p 阶导数由逐项微分给出：

$$f^{(p)}(z) = p!c_p + (p+1)p(p-1)\cdots 2c_{p+1}z + (p+2)(p+1)\cdots 3c_{p+2}z^2 + \cdots, \qquad |z|<R.$$

定理 18.3.8 幂级数的恒等定理(identity theorem for power series) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ 都在圆域 $|z-z_0|<R$ 内收敛. 如果它们的和函数在点 z_0 的某个邻域内处处相等，则这两个幂级数在 $|z-z_0|<R$ 内恒等，即它们的系数完全相同($a_n\equiv b_n$).

这个结论在较弱的条件下也成立，即只须这两个幂级数在圆域内部有极限点的点列 $\{z_k\}$ 处有相同的和.

定理 18.3.9 Abel 第二定理 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在收敛圆周 $|z|=R$ 上的一点 $z_0(0<|z_0|=R<+\infty)$ 处收敛到 s，则当 z 在圆 $|z|<R$ 内，在以 z_0 为顶点，以过 z_0 的半径为分角线，且张开度为 $2\theta_0<\pi$ 的角域内趋向于 z_0 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的和函数趋于 s(参见图 18.1).

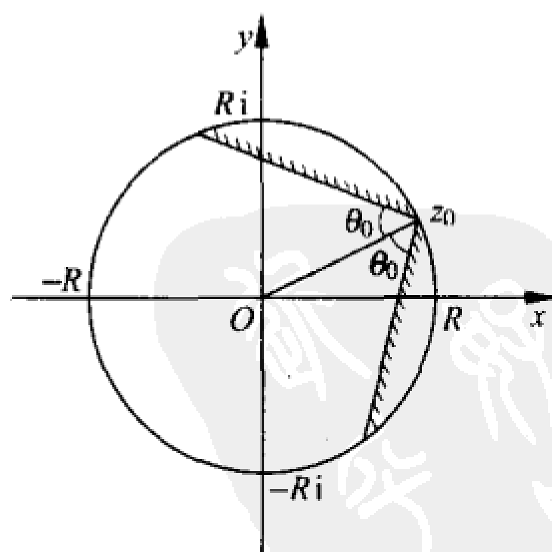


图 18.1

例 18.3.10 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ 的收敛圆与和函数,并讨论后者的连续性.

解 (1) 因为系数之比的极限 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{(-1)^n(n+2)}\right|=1$,所以 $R=1$ 而收敛圆是 $|z|=1$.

(2) 在域 $|z|<1$ 内对级数逐项微分,就得到和函数 $f(z)$ 的导数:

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n=\frac{1}{1+z}\qquad(|z|<1).$$

于是

$$f(z)=\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\ln(1+z)\qquad(|z|<1),$$

因而得到和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\ln(1+z)\quad |z|<1.$$

(3) 和函数 $\ln(1+z)$ 在圆域 $|z|<1$ 内连续(性质 18.3.7 的性质(2)). 在单位圆周 $|z|=1$ 上, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}$ 显然在 $z=-1$ 处发散;在 $z=1$ 处收敛,因此有 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}=\ln 2$. 在其他点 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(-\pi<\phi<\pi,\ \phi\neq 0)$ 处级数也是收敛的. 这是由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\phi}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(n-1)\pi+n\phi]}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(n-1)\pi+n\phi]}{n}$$

$$+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(n-1)\pi+n\phi]}{n},$$

实部、虚部都满足 Dirichlet 判别法：如果

① $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界；

② 当 $n \to +\infty$ 时 b_n 单调地趋于零，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

以实部为例，注意到 $b_n = \frac{1}{n}$，$a_n = \cos[-\pi + n(\pi + \phi)]$，

$$
\begin{aligned}
|A_n| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \cos[-\pi + k(\pi + \phi)] \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\sin\frac{\pi+\phi}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\cos[-\pi + k(\pi+\phi)] \sin\frac{\pi+\phi}{2} \right| \\
&= \frac{1}{\left| 2\sin\frac{\pi+\phi}{2} \right|} \left| \sin\left[-\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right)(\pi + \phi)\right] \right. \\
&\qquad \left. - \sin\left[-\pi + \frac{1}{2}(\pi + \phi)\right] \right| \\
&\leqslant \frac{1}{\left| \sin\frac{\pi+\phi}{2} \right|} \qquad (-\pi < \phi < \pi),
\end{aligned}
$$

有界. 因此有 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{in\phi}}{n} = \ln(1 + e^{i\phi})$ (定理 18.3.8). 从而得到

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((n-1)\pi + n\phi)}{n} = \ln 2\cos\frac{\phi}{2} \qquad (-\pi < \phi < \pi),
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((n-1)\pi + n\phi)}{n} = \frac{\phi}{2} \qquad (-\pi < \phi < \pi).
$$

特别地，当 $\phi = \frac{\pi}{2}$ $(z = i)$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = \ln 2\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2,$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

利用 Abel 第二定理还可以把绝对收敛级数的乘法(绝对收敛级数的性质(2))扩充到条件收敛级数的情形. 对两个复数项的收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma,$$

作乘积

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1).$$

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ 收敛到 S, 则 $S=s\sigma$.

18.4 Taylor 级数

在幂级数的收敛圆内,和函数是解析的. 反过来解析函数也可以表示成幂级数.

定理 18.4.1 如果函数 $f(z)$ 在圆域 $|z-a|<R$ 内解析,则它在该域内可以表示成幂级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \tag{18.2}$$

定义 18.4.2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ 称为 $f(z)$ 在点 a 处的 Taylor 级数. 恒等式 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ 称为函数 $f(z)$ 在点 a 处的 Taylor 展开.

由定理 18.3.8 知展开式(18.2)是惟一的.

如果点 a 是 $f(z)$的一个正则点，则 $f(z)$在点 a 的邻域内可以展开成关于$(z-a)$的幂级数(18.2)式，并且级数的收敛圆以点 a 为中心同时通过 $f(z)$距点 a 最近的一个极限不存在的奇点.

这又是一个截然不同于实自变量的实函数的情形. 那里，即便函数在某一点处具有任意阶导数，也不一定能展开成幂级数；而这里，一切均可由解析性推得.

一个正则点，或称解析点，有时也称为全纯点.

定义 18.4.3

(1) 如果函数 f 在点 a 的某一邻域内可以展开成 Taylor 级数，则称 f 在点 a 处是全纯的(holomorphic).

(2) 如果一个函数在域 D 内每一点处都是全纯的，就说它在域 D 内是全纯的.

显然，"f 在 D 内全纯"与"f 在 D 内解析"等价.

定理 18.4.4 Weierstrass double-series 定理 设一序列解析函数$\{f_n(z)\}$都至少在圆域 $|z-z_0|<r$ 内解析：$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(n)}(z-z_0)^k$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 又设它们的级数

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}f_n(z) \\
&=[a_0^{(0)}+a_1^{(0)}(z-z_0)+\cdots+a_k^{(0)}(z-z_0)^k+\cdots] \\
&\quad+[a_0^{(1)}+a_1^{(1)}(z-z_0)+\cdots+a_k^{(1)}(z-z_0)^k+\cdots]+\cdots \\
&\quad+[a_0^{(n)}+a_1^{(n)}(z-z_0)+\cdots+a_k^{(n)}(z-z_0)^k+\cdots]+\cdots
\end{aligned}
$$

在每个内闭圆域$|z-z_0|\leqslant\rho$ $(0<\rho<r)$内一致收敛. 则上式各列的系数形成收敛级数：$a_k^{(0)}+a_k^{(1)}+\cdots+a_k^{(n)}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_k^{(n)}=A_k$ $(k=0,1,2,\cdots)$，并且综合级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A_k(z-z_0)^k$ 在总的圆域$|z-z_0|<r$ 内收敛，成为 $F(z)$的 Taylor 级数.

定理 18.4.5 设两个解析函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在一域 D 内的一个无穷集合 E 上有相等的值：$f(z)=g(z)\ (z\in E)$，又设这个集合 E 在 D 内至少有一个极限点. 则这两个函数在 D 内恒等：$f(z)\equiv g(z)\ (z\in D)$.

这显然是幂级数恒等定理(定理 18.3.8)的推广. 这定理给出了解析函数的又一个突出的特性，由局部的值确定它在整个域 D 内的值. 一般的连续函数就没有这个性质.

定理 18.4.6 如果函数 $f(z)$ 在域 D 内解析，且不恒为零，则在 D 内的零点是孤立的. 这就是说，如果 $f(z_0)=0$，则在 D 内存在一个 δ-邻域 $|z-z_0|<\delta$ 使得 $f(z)$ 在其内只有 z_0 这惟一的一个零点.

一般地，如果 $f(z_0)=a$，就称 z_0 为 $f(z)$ 的一个 a-点. 这时 z_0 是 $f(z)-a=F(z)$ 的一个零点.

定义 18.4.7 设函数 $f(z)$ 在域 D 内解析，$z_0\ (z_0\in D)$ 是 $f(z)$ 的一个零点. 又设 $f(z)$ 在 z_0 处的 Taylor 展开式为

$$f(z)=c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+c_3(z-z_0)^3+\cdots.$$

如果 $c_1=c_2=\cdots=c_{m-1}=0, c_m\neq 0$，则

$$f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

这时 Taylor 级数化为

$$\begin{aligned}f(z)&=c_m(z-z_0)^m+c_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\\&=(z-z_0)^m\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)+\cdots\right],\end{aligned}$$

我们就说点 z_0 是函数 $f(z)$ 的一个 m 阶零点(zeros of order m).

定理 18.4.8 点 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的一个 m 阶零点 $\Leftrightarrow$ $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$，其中 $g(z)$ 在 z_0 的某个邻域 $|z-z_0|<\delta$ 内解析且不等于 0.

常见的初等函数的 Taylor 展开式：

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad (|z| < +\infty), \qquad (18.3)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|z| < +\infty), \qquad (18.4)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < +\infty), \qquad (18.5)$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \qquad (|z| < 1), \qquad (18.6)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \qquad (|z| < 1), \qquad (18.7)$$

这里:(1) α 是一复常数,$(1+z)^\alpha$ 表示函数的主值支.

(2) $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

18.5 解析开拓

定义 18.5.1 设函数 $f(z)$在域 D 内解析.又设域 G 包含 D 为一**子域**(subregion),如图 18.2 所示,并且存在一个函数 $F(z)$在 G 内解析,而在 D 内恒等于 $f(z)$:$F(z) \equiv f(z)\ (z \in D)$.对此我们说函数 $f(z)$可以解析开拓到 $G \backslash D$,并称 $F(z)$是 $f(z)$向 $G \backslash D$ 的一个解析开拓(analytic continuation).

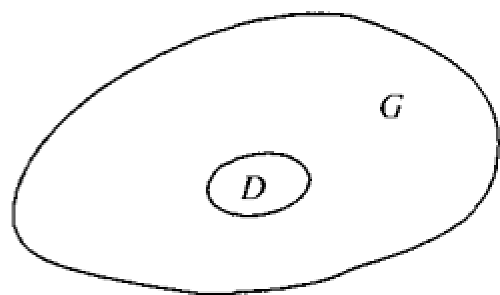


图 18.2

当然,函数 $F(z)$可能不存在;然而,如果 $F(z)$存在,则根据定理 18.4.5 这样的 $F(z)$一定是惟一的.

定理 18.5.2 解析开拓原理 已知不同的两域 D_1 与 D_2,它们的交集 D_3 是非空的(见图 18.3).设函数 $f_1(z)$在 D_1 内解析.这时如果在 D_2 内有一个解析函数 $f_2(z)$,它在 D_3 内与 $f_1(z)$相等,则这样的函数是惟一的.

这时 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 互为解析开拓. 它们共同确定一个函数 $F(z)$，它们都构成 $F(z)$ 的部分表示式或**元素**或**元**(element)，而 $F(z)$ 在域 $D_1 \cup D_2$ 内解析.

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1, \\ f_1(z)=f_2(z), & z\in D_3, \\ f_2(z), & z\in D_2. \end{cases}$$

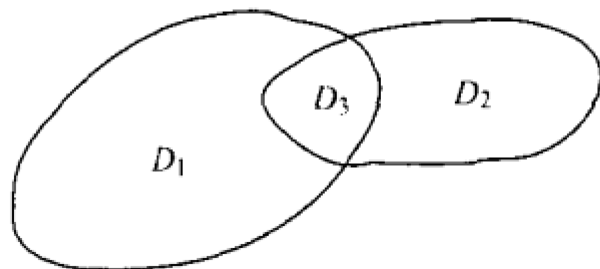


图 18.3

现在的问题是：

(1) 定义在域 D_1 内的解析函数 f_1 何时能解析开拓到 $D_2 \setminus D_1$? 如果能开拓，如何求得 f_2?

(2) 还有没有其他的域 $D_3, D_4, \cdots$，它们每一个都与前面的一个有一公共的子域，而在这些域 $D_3, D_4, \cdots$ 内，也有解析函数 f_3，$f_4, \cdots$，每个按照(定理 18.5.2)为前面一个的开拓? 就是说：什么时候能继续开拓?

(3) 若已给定一个解析函数的一个元，我们如何找出其他一切可能的元，或者说，一切在相衔接的域内的开拓?

Weierstrass**“幂级数的解析开拓”方法**：

(1) 设已知 $f(z)$ 在域 D 内解析. 则在 D 内任一点 z_1 处都有 $f(z)$ 的 Taylor级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(z-z_1)^n = f_1(z)\ (|z-z_1|<R_1)$. 这个幂级数的和函数 $f_1(z)$ 在收敛圆内属于 D 的点处与 $f(z)$ 相等；在不属于 D 的点处就扩大了 $f(z)$ 的定义范围，而我们可以规定 $f(z)\equiv f_1(z)$.

(2) 当 $R_1<+\infty$ 时，又可在收敛圆域 $|z-z_1|<R_1$ 内选一点 $z_2(\neq z_1)$，如图 18.4 所示，而类似地考虑 $f_1(z)$ 在 z_2 处的 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(z-z_2)^n = f_2(z)\ (|z-z_2|<R_2)$. 由于左边级数在圆域 $|z-z_1|<R_1$ 内收敛，必有

$$|z_1 - z_2| + R_2 \geqslant R_1.$$

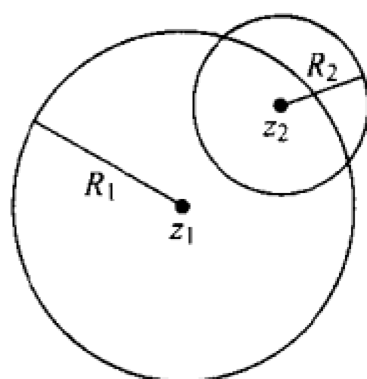


图 18.4

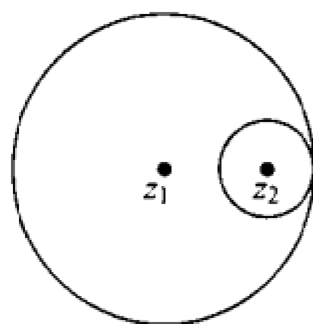


图 18.5

(3) 当 $R_2 > R_1 - |z_1 - z_2|$（如图 18.4）时，新的收敛圆已越过旧的，而 $f_1(z)$ 已沿 z_1 到 z_2 的（半径）方向开拓到旧收敛圆以外；从而又可扩大范围规定 $f(z) \equiv f_2(z)$.

所以只要沿着某个半径的方向开拓是可能的，就可以扩展 $f(z)$ 的定义域，从而把函数 $f(z)$ 的定义域与解析范围开拓出去.

(4) 现在想像运用这种幂级数方法，将函数的第一个元素 $f_1(z)$ 向一切可能的方向开拓，再将这许多新的元素，又从新得的域向一切可能的方向开拓. 如此继续进行，以不断扩大 $f(z)$ 的定义域与解析范围. 根据恒等定理（定理 18.4.5）我们所得到的函数总是惟一的.

在开拓的过程中，可能出现 $R_1 = +\infty$ 的情形. 这时 $f(z)$ 已经开拓到整个复平面，其解析开拓就是 $f_1(z)$.

也可能出现 $R_2 = R_1 - |z_1 - z_2|$ $(R_1 < +\infty)$ 的情形（如图 18.5）. 这时两收敛圆相切，没有达到开拓的目的. 或说 $f_1(z)$ 不能向沿 z_1 到 z_2 半径方向开拓. 这时，切点一定不属于解析域，它必是由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(z - z_1)^n$ 所确定的函数 $f_1(z)$ 的奇点.

还可能出现这样的情形，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(z - z_1)^n = f_1(z)$ $(|z - z_1| < R_1)$ 沿任何方向都不能开拓. 这就意味着没有任何一个函数

能够以它为元素而同时又在一个比圆域 $|z-z_1|<R_1$ 更大的域内是解析的. 这时我们就说这个函数 $f_1(z)$ 是不可开拓的，圆周 $|z-z_1|=R_1$ 是 $f_1(z)$ 的 **自然边界**（natural boundary）. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}\ (|z|<1)$.

幂级数不可能沿一切方向都能够开拓到收敛圆外. 如下定理.

定理 18.5.3 幂级数的收敛圆周上至少有其和函数的一个奇点.

定义 18.5.4 （Weierstrass **意义下的**）**完全解析函数**（complete analytic function） 在一切按 Weierstrass 提出的"幂级数的解析开拓"的方法证实为解析的点的函数值 w，其全部构成一个完全解析函数.

全体解析点形成这个解析函数的存在域或解析域，其边界称为它的自然边界，而对应于这全体点的全部值 w 称为它的值域.

例 18.5.5 已知 $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $D_1(|z|<1)$ 内解析，求由 $f_1(z)=\frac{1}{1-z}(|z|<1)$ 所确定的完全解析函数.

解 首先，我们注意到 $z=1$ 是 $f_1(z)$ 的一个奇点，所以不能沿 x 轴正方向开拓. 下面的选点注意避开朝向 $z=1$.

在 $D_1: |z|<1$ 内任选一点 $z_1(\neq 0)$，则由

$$f_1^{(n)}(z)=\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n)}_{z=z_1}=\frac{n!}{(1-z_1)^{n+1}}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

得到

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-z_1)^{n+1}}(z-z_1)^n(|z-z_1|<|1-z_1|).$$

重复上述的做法，有

$$f_{k+1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-z_k)^{n+1}}(z-z_k)^n(|z-z_k|<|1-z_k|)$$

$(k=2,3,4,\cdots)$.

于是得到函数 $F(z)=\dfrac{1}{1-z}$,它在除去 $z=1$ 的复平面内解析,而 $z=1$ 是它的惟一奇点.

这里,如果选择的点 $z_1, z_2, z_3, \cdots$ 刚好围绕 $z=1$ 转了一圈(如图 18.6),开拓得到新的元素与 $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 重合了.

一般地,有可能,某个函数沿着围绕某一非解析点的诸点依次开拓后,又回到原始的位置,但新的幂级数值与最初那个幂级数的值不相同,这时完全解析函数就是多值的.

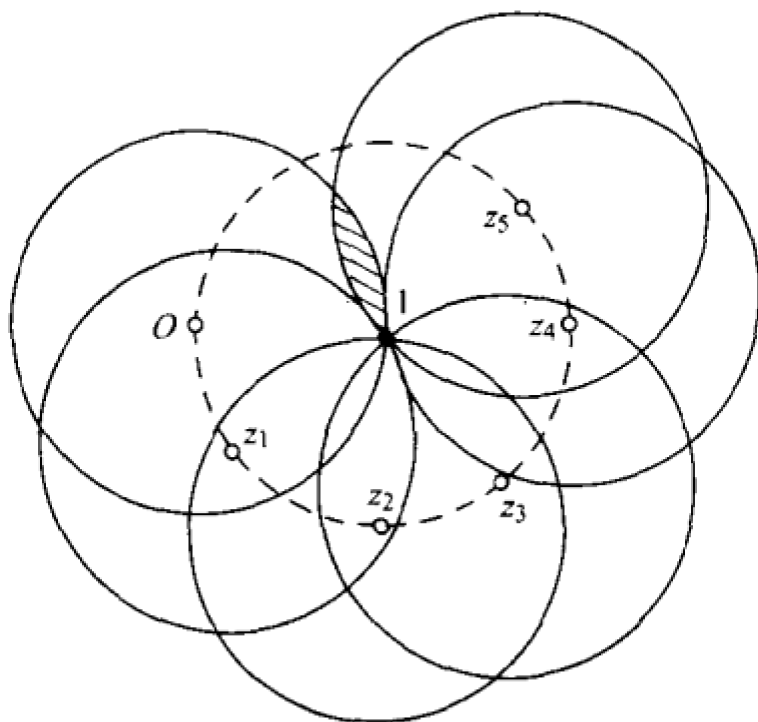


图 18.6

定理 18.5.6 单值性定理(monodromy theorem) 设 a 是单连通域 D 内一点,又设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是在 a 点附近的一个解析函数. 如果 $f(z)$ 可以沿 D 内以 a 为起点的任一路径解析开拓,则开拓得到的解析函数在整个域 D 内是单值的.

试想像我们从第一个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}(z-z_1)^n=f_1(z)$ 开始,

用红色的纸剪一(收敛)圆域$|z-z_1|<R_1$,贴在坐标面相应的位置上.每开拓一次就剪出经开拓得到的新的圆域部分,贴在相应的位置上.如果当幂级数的收敛圆心绕$f_1(z)$的某一奇点旋转一圈后,新的元素与$f_1(z)$重合,我们就不必再剪新的圆域了:这时得到的完全解析函数是单值的.

如果当幂级数的收敛圆心绕$f_1(z)$的某一奇点旋转一圈后,新的元素与$f_1(z)$不相同,我们就用蓝色的纸(以示区别)剪出经开拓得到的新的圆域部分,与前面的一个元素(该新元素是由它(直接)开拓得来的)的域连接起来,但不能与$|z-z_1|<R_1$重合,只能置于其上(或下),这实际是在另一层 Riemann 面上,而$f_1(z)$的该奇点就是由$f_1(z)$所确定的完全解析函数的一个支点.

定理 18.5.7 Painleve 定理 设D_1与D_2是两个没有公共点的域,在它们的边界上有一段路径γ(不包括起点和终点)是公共的.如果函数$f_1(z)$与$f_2(z)$分别在D_1与D_2内解析;分别在$D_1\cup\gamma$与$D_2\cup\gamma$上连续;且在γ上$f_1(z)=f_2(z)$,则函数

$$f(z)=\begin{cases}f_1(z), & z\in D_1,\\ f_1(z)=f_2(z), & z\in\gamma,\\ f_2(z), & z\in D_2\end{cases}$$

在$D_1\cup D_2\cup\gamma$内解析.

这时我们说函数$f_1(z)$与$f_2(z)$越过边界γ互为解析开拓(见图 18.7).

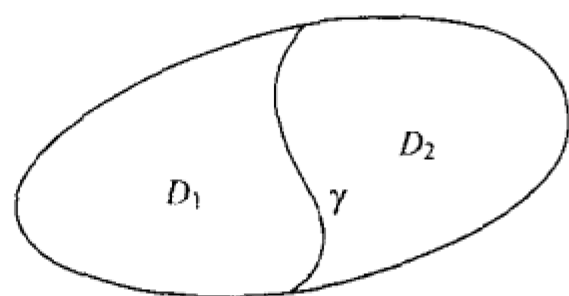


图 18.7

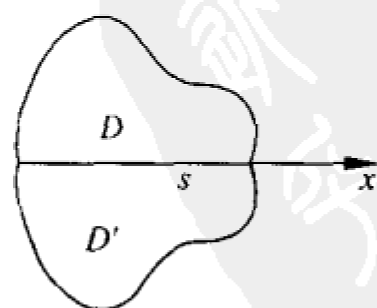


图 18.8

定理 18.5.8 Schwarz 对称原理(reflection principle) 设域 D 位于实轴的一侧,其边界包含实轴上的一线段 s(两端点不包括在内);又设函数 $f(z)$在 D 内解析,在$D\cup s$ 上连续,并且 $f(z)$在 s 上取实数值. 则存在一函数 $F(z)$具有下列性质(见图 18.8):

(1) $F(z)$在 $D\cup D'\cup s$ 内解析,并且在 D 内 $F(z)=f(z)$,其中 D'是 D 关于实轴对称的域;

(2) $F(\bar{z})=\overline{F(z)}$.

Schwarz 对称原理具有下述更一般的形式.

定理 18.5.9 设域 D 位于直线 l 的一侧,其边界包含 l 上的某一线段 s(两端点不在内);又设函数 $f(z)$在 D 内解析,在 $D\cup s$ 上连续,并且 $f(z)$在 s 上的值位于直线 L 上. 则存在一函数 $G(z)$具有下列性质(见图 18.9):

(1) $G(z)$在 $D\cup D'\cup s$ 内解析,并且在 D 内 $G(z)=f(z)$,其中 D'是 D 关于 l 对称的域;

(2) 当两点 z_1 与 z_2 在 $D\cup D'\cup s$ 内关于 l 对称时,$G(z_1)$与 $G(z_2)$一定是关于 L 对称的两点.

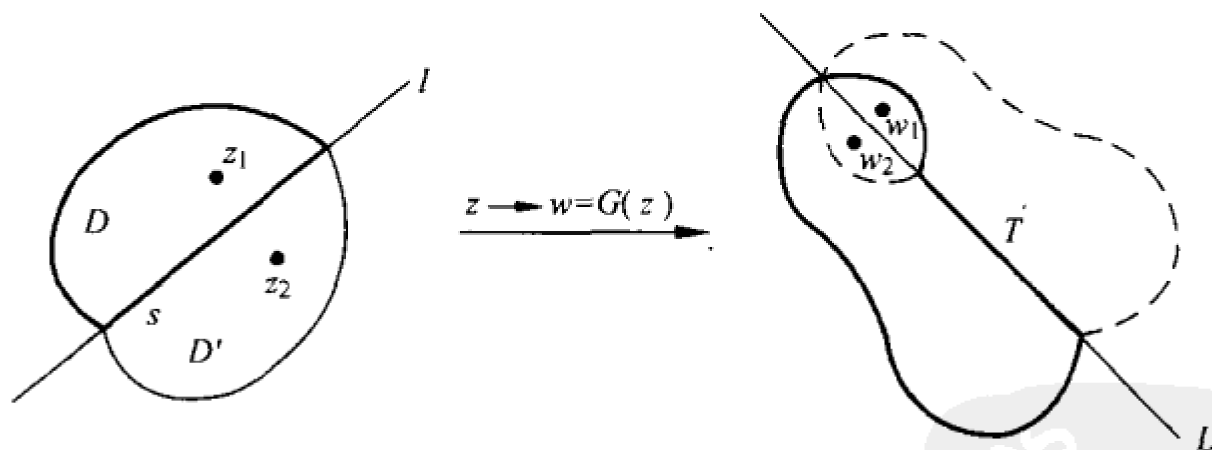


图 18.9

Weierstrass 提出的幂级数的解析开拓在理论上有重要意义. 它使我们只要知道函数 $f(z)$在一点的某个邻域内解析,就足以确定一个完全解析函数 $F(z)$,在(点的)该邻域内与 $f(z)$重合.

对于解析函数在∞点的性质,我们可以利用变换 $z_1=\frac{1}{z}$ 将 $z=\infty$ 变换成 $z_1=0$,然后将它展开成 z_1 的幂级数.

18.6 Laurent 级数

18.6.1 Laurent 展开式

定理 18.6.1 如果函数 $f(z)$ 在环域 $r<|z-a|<R(0\leqslant r<R\leqslant+\infty)$ 内(单值)解析,则它在该域内可以表示成(双侧)幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-a)^n\ ,\tag{18.8}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta-a|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta-a|=\rho}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\mathrm{d}\zeta\qquad(n=1,2,\cdots),\quad r<\rho<R.$$

定义 18.6.2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ 称为解析函数 $f(z)$ 在以点 a 为中心的环域 $r<|z-a|<R$ 内的 Laurent 级数(Laurent series),而恒等式(18.8)称为解析函数 $f(z)$ 的 Laurent 展开.

定义 18.6.3 Laurent 展开的正幂项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\tag{18.9}$$

称为 Laurent 级数的解析部分(analytic part);负幂项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}\tag{18.10}$$

称为 Laurent 级数的主要部分(principle part).

性质 18.6.4 如果函数 $f(z)$在以点 a 为中心的环域内解析，则：

(1) $f(z)$的 Laurent 级数展开是惟一的.

(2) 级数(18.9)在圆域$|z-a|<R$ 内绝对收敛到一个解析函数 $f_1(z)$，在圆周$|z-a|=R$ 上有 $f_1(z)$的奇点.

(3) 级数(18.10)在$\left|\frac{1}{z-a}\right|<\frac{1}{r}$，即环域$|z-a|>r$内绝对收敛到另一解析函数$f_2(z)$，在圆周$|z-a|=r$ 上有 $f_2(z)$的奇点.

(4) 幂级数(18.8)在环域 $r<|z-a|<R$ 内绝对收敛到解析函数 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$，在内外边界圆周$|z-a|=r$ 及$|z-a|=R$ 上都有 $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$的奇点. 并且在环域内任一闭环域 $(r<)r_1\leqslant|z-a|\leqslant R_1(<R)$上一致收敛.

例 18.6.5 将下列函数在指定的环域内展成 Laurent 级数，并指出其收敛域：

(1) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，$r<|z|<R$(就 r,R 讨论各种情形)；

(2) $f(z)=\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ $(0<|z|<R)$.

解 (1) 因为 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$在复平面内只有两个奇点 $z=1,z=2$. 在以 0 为中心的域内展开幂级数时，

① 当 $r=0,R=1$ 时，这是一圆域，展开成 Taylor 级数：利用等比级数，注意公比的模应小于 1($|z|<1$)，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)}&=\frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{1-z}\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}z^n.\end{aligned}$$

② 当 $r=1, R=2$ 时，$1<|z|<2$，展开成 Laurent 级数，

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

③ 当 $r=2, R=+\infty$ 时，$2<|z|<+\infty$，展开式为

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}.$$

(2) 利用 $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\,(|z|<+\infty)$ 可以展开 $f(z)=e^z+e^{\frac{1}{z}}$：

$$f(z)=e^z+e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}.$$

18.6.2 孤立奇点及其分类

定义 18.6.6 设 $a(\neq\infty)$ 是单值函数 $f(z)$ 的一个奇点. 如果 $f(z)$ 在环域 $0<|z-a|<R$ 内解析，则称点 a 为该函数的一个**孤立奇点**(isolated singularity).

定义 18.6.7 如果 $f(z)$ 在环域 $0<|z-a|<R$ 内的 Laurent 展开式中

(1) 没有主要部分，则称 a 为一个**可去奇点**(removable singularity).

(2) 主要部分只有有限项，则称 a 为一个极点(pole). 当

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m},$$

$c_{-m}\neq 0$ 时，称 a 为 $f(z)$的一个 m 阶极点. 当 $m=1$ 时，也称为**单极点**(simple pole).

(3) 主要部分有无穷多个系数不为零，则称 a 为一个**本性奇点**(essential singularity).

当令 z 趋于孤立奇点 a 时，根据 $f(z)$的趋势也可以判定孤立奇点的类型.

定理 18.6.8 点 a 是解析函数 $f(z)$的一个

(1) 可去奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在(有穷)；

(2) 极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$；

(3) 本性奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a}f(z)$ 没有固定的趋势.

在可去奇点的情形下，如果我们令 $f(a)=\lim\limits_{z\to a}f(z)$，则函数 $f(z)$在 a 点的邻域内解析.

定理 18.6.9 Riemann 定理　如果函数 $f(z)$在孤立奇点 a 的邻域内有界，则 a 是 $f(z)$的可去奇点.

定理 18.6.10 点 a 是函数 $f(z)$的一个 m 阶极点的一个充要条件是：点 a 是函数$\dfrac{1}{f(z)}$的一个 m 阶零点(定义 18.4.7). 或写成(定理 18.4.8)：a 是 $f(z)$的一个 m 阶极点$\Leftrightarrow f(z)=\dfrac{1}{(z-a)^m g(z)}=\dfrac{\phi(z)}{(z-a)^m}$，其中 $g(z)$与 $\phi(z)$在 a 的某个邻域$|z-a|<\delta$ 内解析且不等于 0.

定理 18.6.11 Weierstrass 定理　如果 a 是 $f(z)$的一个本性奇点，则对于任意常数 A(有穷或无穷)都有一个收敛到 a 的点列$\{z_n\}$存在，使得 $\lim\limits_{z_n\to a}f(z_n)=A$.

定理 18.6.12 Picard 定理(Picard theorem) 如果 a 是 $f(z)$的一个本性奇点,则对于任意一个有穷复数 A,至多除去某个可能值 $A=A_0$ 外,必有趋于 a 的无限点列$\{z_n\}$使

$$f(z_n)=A, \qquad n=1,2,\cdots.$$

定义 18.6.13 A_0 称为 Picard 例外值.

例 18.6.14 点 $z=0$ 是函数 $e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点.对于任意的有穷复数 $A(A\neq 0)$,可取点列 $z_n=\dfrac{1}{\ln A+2n\pi i}$ 使

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0, \qquad f(z_n) = A.$$

这里 Picard 例外值 $A_0=0$.

18.6.3 解析函数在∞点的性质

定义 18.6.15 如果函数 $f(z)$在∞点的某个邻域 $R<|z|<+\infty$内解析,而当$|z|\to+\infty$时没有有限的极限,则称∞点为 $f(z)$的一个孤立奇点.

利用变换 $z_1=\dfrac{1}{z}$可将解析函数 $f(z)$在∞点的邻域 $R<|z|<+\infty$变换成 $z_1=0$ 的邻域 $0<|z_1|=\dfrac{1}{|z|}<\dfrac{1}{R}$. 这时 Laurent 级数呈如下形式:

$$\begin{aligned}f(z) = f\left(\frac{1}{z_1}\right) = \Phi(z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n {z_1}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{{z_1}^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n.\end{aligned}$$

定义 18.6.16 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{1}{z^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$ 称为函数 $f(z)$在∞点的邻域$|z|>R$ 内的 Laurent 级数.

定义 18.6.17 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \dfrac{1}{z^n}$ 称为 $f(z)$在 $z=\infty$处的 Laurent

展开的解析部分；而 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$ 称为主要部分.

定义 18.6.18 如果 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内展成 Laurent 级数时，

(1) 没有主要部分，则 ∞ 点为可去奇点.

(2) 主要部分只有有限项，则 ∞ 点为极点，当

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{1}{z^n} + c_{-1} z + c_{-2} z^2 + \cdots + c_{-m} z^m, \quad c_{-m} \neq 0$$

时，∞ 点为 m 阶极点. 当 $m=1$ 时也称为单极点.

(3) 主要部分有无穷多个系数不为零，则 ∞ 点为本性奇点.

定理 18.6.19 ∞ 点是 $f(z)$ 的

(1) 可去奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ 存在（有穷）；

(2) 极点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ ；

(3) 本性奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ 没有固定趋势.

在可去奇点的情形下，如果将极限值 $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$ 定义为函数 $f(z)$ 在 ∞ 点的值，则称此函数 $f(z)$ 在 ∞ 点解析.

定义 18.6.20 当 ∞ 点是可去奇点时，

$$f(z) = c_0 + c_1 \frac{1}{z} + c_2 \frac{1}{z^2} + \cdots + c_n \frac{1}{z^n} + \cdots.$$

特别地，如果

$$c_0 = f(\infty) = c_1 = c_2 = \cdots = c_{m-1} = 0, \qquad c_m \neq 0,$$

则称 ∞ 点为 $f(z)$ 的一个 m 阶零点.

性质 18.6.21 函数 $f(z)$ 在 ∞ 点处的性质：

(1) ∞ 是可去奇点时，在充分小的邻域内（原点的充分大邻域的外部），函数 $f(z)$ 是有界的；

(2) ∞ 点是极点时，在任意小的邻域内，$f(z)$ 是无界的；

(3) ∞ 是本性奇点时，在任意小的邻域内，$f(z)$ 的变化趋势都是不确定的.

定理 18.6.22 (1) ∞是解析函数 $f(z)$的一个 m 阶零点$\Leftrightarrow$ $f(z)=\frac{1}{z^m}g(z)$,其中 $g(z)$在∞点的某个邻域内解析且不等于 0.

(2) ∞是解析函数 $f(z)$的一个 m 阶极点$\Leftrightarrow f(z)=z^m\Phi(z)$,其中 $\Phi(z)$在∞点的某个邻域内解析且不等于 0.

18.7 整函数与亚纯函数

18.7.1 整函数

定义 18.7.1 在整个复平面内(∞点除外)解析的函数称为**整函数**(entire function).

根据∞点的类型,整函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ $(|z|<+\infty)$被分成三类.

定义 18.7.2 (1) ∞点是 m 阶极点时,称为**整有理函数**(entire rational function)或**多项式**(polynomial),并且称为 m 次(degree)多项式;

(2) ∞是本性奇点时,称为**整超越函数**(entire transcendental function);

(3) ∞是可去奇点时,则整函数是一常数.

18.7.2 亚纯函数

定义 18.7.3 在复平面的有限部分上,除极点外没有其他类型的奇点的单值函数称为**亚纯函数**(meromorphic function).

整函数、有理函数$\frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$都是亚纯函数,其中 $P_n(z)$是 n 次多项式,$Q_m(z)$是 m 次多项式

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n \qquad (a_n\neq 0),$$

$$Q_m(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m \qquad (b_m\neq 0),$$

并且 $P_n(z)$，$Q_m(z)$没有非常数的公因式.

定理 18.7.4 如果亚纯函数 $f(z)$在闭复平面上解析，则 $f(z)$必为一常数.

定理 18.7.5 如果 $z=\infty$是亚纯函数 $f(z)$的可去奇点或极点，则 $f(z)$必是有理函数.

19 留数定理及其应用

19.1 引言

借助于 Laurent 展开式，人们可以计算不是 Cauchy 型的积分. Cauchy 给出了关于沿着一条任意闭曲线的积分 $\oint f(z)\,\mathrm{d}z$ 的一个新的叙述：如果曲线只包围着一些极点，那么积分的值是函数在这些极点处的**留数**(residue)之和的 $2\pi\mathrm{i}$ 倍. 当然被积函数不一定是亚纯函数，就像 Cauchy 指出的那样. 理论上一经确定之后，人们就应当注意计算的方法与技巧.

然而，Cauchy 的留数概念仍是复变函数论中的一个重要概念，可用以计算许多重要的积分的值，并有大量实际应用.

19.2 留数定理

定义 19.2.1 设函数 $f(z)$ 在环域 $0<|z-a|<R$ 内解析，a 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点. 函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的**留数**，记作 $\mathrm{Res}\,(f,a)$，定义为

$$\mathrm{Res}\,(f,a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z-a|=\rho}f(z)\mathrm{d}z, \qquad (19.1)$$

其中 $0<\rho<R$，路径取正向.

算法 由

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}\quad(0<|z-a|<R)$$

知

$$\text{Res}\,(f,a) = c_{-1}. \tag{19.2}$$

因此有

(1) 当 a 为可去奇点时，$\text{Res}\,(f,a)=0$.

(2) 当 a 为单极点时

$$\text{Res}\,(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{19.3}$$

特别地，当 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，且 $P(a)\neq 0, Q(a)=0, Q'(a)\neq 0$ 时，

$$\text{Res}\,(f,a) = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \tag{19.4}$$

(3) 当 a 为 m 阶极点时

$$\text{Res}\,(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]. \tag{19.5}$$

定理 19.2.2 设 C 是复平面内一简单闭路径，域 D 是 C 的内部. 如果函数 $f(z)$ 在 D 内除去 n 个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外是解析的，并且 $f(z)$ 在闭域 $\overline{D}$ 上除去 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外是连续的，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\,(f,z_k). \tag{19.6}$$

定理 19.2.3 如果 $f(z)$ 在复平面内除去孤立奇点 $z_1, z_2,\cdots,z_n$ 外是解析的，则 $f(z)$ 在所有孤立奇点(包括∞点)处的留数之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\,(f,z_k) + \text{Res}\,(f,\infty) = 0. \tag{19.7}$$

定义 19.2.4 函数 $f(z)$ 在∞点(如果是一孤立奇点)处的留数 $\text{Res}\,(f,\infty)$定义为

$$\text{Res}\,(f,\infty) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=k} f(z)\mathrm{d}z, \tag{19.8}$$

其中积分路径取顺时针方向，$|z|=k$ 为∞点邻域$|z|>R$ 内的一圆周，$R<k<+\infty$.

利用 $\zeta=\dfrac{1}{z}$变换到 $\zeta=0$，则有

$$\operatorname{Res}\,(f,\infty)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{k}}f\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta. \tag{19.9}$$

例 19.2.5 求下列各函数 $f(z)$ 分别在各指定点 a 处的留数：

(1) $f(z)=\tan z$，$a=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ （k 是整数）；

(2) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^4}$，$a=1$；

(3) $f(z)=\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$，$a=\infty$；

(4) $f(z)=\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$，$a=1$.

解 首先要认准孤立奇点 a 在各个不同的函数中属于哪种类型，然后再选择适当的方法计算.

(1) $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 是单极点（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$），函数 $\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}$. 用式(19.4)计算：

$$\operatorname{Res}\,(f,a)=\left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi}=-1 \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(2) 1 是 $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^4}$ 的四阶极点，用式(19.5)计算.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^4},1\right)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}z^3}\left[(z-1)^4\,\frac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^4}\right]=\frac{\mathrm{e}}{6}.$$

(3) 用式(19.9)计算：

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}},\infty\right)&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{k}}\zeta\mathrm{e}^{\frac{1}{1-\frac{1}{\zeta}}}\,\frac{1}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta\\&=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=\frac{1}{k}}\frac{1}{\zeta}\mathrm{e}^{\frac{\zeta}{\zeta-1}}\mathrm{d}\zeta\\&=-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\zeta}\mathrm{e}^{\frac{\zeta}{\zeta-1}},0\right)=-1.\end{aligned}$$

(4) 函数$\frac{1}{z}e^{\frac{1}{1-z}}$在闭复平面上共有三个孤立奇点：$z=0, z=1$与$z=\infty$. 利用式(19.7)，有

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}e^{\frac{1}{1-z}},1\right)=-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}e^{\frac{1}{1-z}},\infty\right)-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}e^{\frac{1}{1-z}},0\right)$$

$$=-(-1)-\left(\frac{e^{\frac{1}{1-z}}}{z'}\right)_{z=0}=1-e.$$

应注意的是，即使∞点是一可去奇点，函数在∞点处的留数也不一定等于0. 例如$f(z)=\frac{1}{z}$，$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{z}=0$，而

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=k}\frac{1}{z}dz=-1\ (k\text{ 充分大}).$$

19.3 留数定理对亚纯函数的应用

设$f(z)$是域D内的一个亚纯函数，$\phi(z)$是D内的解析函数，C是D内的简单闭路径，其内部也全属于D. 在这个总前提下，有下述定理.

定理 19.3.1 设$f(z)$在C的内部只有有限多个极点$b_1, b_2, \cdots, b_p$，阶数分别为$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$，也只有有限多个零点$a_1, a_2, \cdots, a_n$，阶数分别为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$. 如果$f(z)$在$C$上没有零点和极点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi(a_k)-\sum_{j=1}^{p}\beta_j\phi(b_j),\ C\text{取正向}.\qquad(19.10)$$

当$\phi(z)=z$时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C z\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k-\sum_{j=1}^{p}\beta_j b_j.\qquad(19.11)$$

当$\phi(z)=1$时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k - \sum_{j=1}^{p}\beta_j = N - p$$

$$\left(N = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k, p = \sum_{j=1}^{p}\beta_j\right). \tag{19.12}$$

定义 19.3.2 积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$称为亚纯函数 $f(z)$ 关于闭路径 C 的**对数留数**$\left(因\frac{f'(z)}{f(z)} = d\ln f(z) 而得名\right)$.

(19.12)也可以叙述成下面的形式.

定理 19.3.3 亚纯函数 $f(z)$ 关于闭路径 C 的对数留数等于 $f(z)$ 在 C 的内部的零点个数与极点个数之差(n 阶就算 n 个).

将定理 19.3.3 应用到亚纯函数 $f(z)-a$,其中 a 是任意复常数,积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$就等于方程 $f(z)=a$ 在 C 内根的个数与 $f(z)$ 在 C 内极点的个数之差.

当 $f(z)$ 在 C 内全纯(解析)时,积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)dz}{f(z)-a}$给出方程 $f(z)=a$ 在闭路径 C 内根的个数.

利用定理 19.3.3 可以证明下述的“代数基本定理”.

定理 19.3.4 任何一个 n 次整有理函数

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

都恰有 n 个零点,其中每个零点是 k 阶的就算 k 个.

定义 19.3.5 定理 19.3.3 也称为**辐角原理**(principle of the argument).

从几何上看,映射 $w=f(z)$将 C 映射成 Γ 时,由于 $f(z)$在 C 上没有零点与极点,Γ 不过 $w=0$ 与 $w=\infty$两点(见图 19.1).

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dw}{w} = \Gamma \text{ 绕原点}(w=0)\text{ 的圈数}. \tag{19.13}$$

即：当点 w 沿 Γ 连续变化时，等于它的辐角的增量除以 2π. 记为

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \operatorname{Arg} w=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

$$N-P=\frac{1}{2\pi}\Delta_C \operatorname{Arg} f(z). \tag{19.14}$$

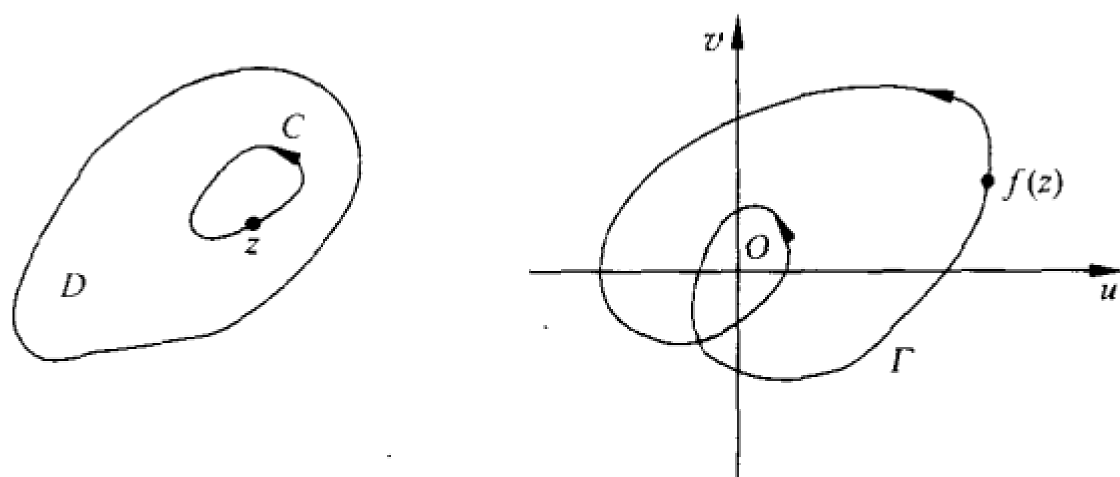


图 19.1

定理 19.3.6 Rouché 定理　设 C 是域 D 内的简单闭路径，其内部属于 D. 如果函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都在域 D 内解析，在 C 上满足条件 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|$，则 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 C 的内部有相同个数的零点.

例 19.3.7　求方程 $z^5-5z^3-2=0$ 在下列各域内根的个数.

(1)圆域 $|z|<1$；(2)环域 $1<|z|<5$.

解　利用(19.14)式注意选择 $f(z)$ 与 $g(z)$.

(1) 因为在单位圆周 $|z|=1$ 上，$|z^5-2|<|-5z^3|$，令 $f(z)=-5z^3$，$g(z)=z^5-5z^3-2$. 两个多项式 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都在复平面内解析. 根据式(19.14)知函数 $g(z)$ 在单位圆内有 3 个零点，即方程 $z^5-5z^3-2=0$ 在单位圆内有 3 个根.

(2) 当 $|z|=5$ 时，$|z^5|>|5z^3+2|$，此时令 $f(z)=z^5$，$g(z)=z^5-5z^3-2$. $f(z)$ 与 $g(z)$ 都在复平面内解析，由式(19.14)知 $g(z)$ 在 $|z|<5$ 内有 5 个零点.

在单位圆周 $|z|=1$ 上，因为 $|g(z)-f(z)|>|f(z)|$ ($|-5z^3-2|\geqslant 5-2>1=|z^5|$)，所以在 $|z|=1$ 上 $g(z)\neq 0$，因

此 $g(z)$ 在环域 $1<|z|<5$ 内有 $(5-3=)2$ 个零点，即原给方程在环域 $1<|z|<5$ 内有两个根.

作为 Rouché 定理的推论，我们有下面的定理.

定理 19.3.8 设函数 $f(z)$ 在域 D 内解析，$z_0 \in D$，$w_0 = f(z_0)$. 如果 z_0 是 $f(z)-w_0$ 的 m 阶零点，则对于充分小的 $\rho>0$，存在 $\delta>0$ 使得对于圆域 $|w-w_0|<\delta$ 内的每一个点 A，函数 $f(z)-A$ 在 $|z-z_0|<\rho$ 内恰有 m 个零点.

定理 19.3.9 Hurwitz 定理 设 C 为域 D 内一简单闭路径，其内部属于 D. 如果函数列 $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$ 中每一个函数 $f_n(z)$ 都在域 D 内解析，并且在 D 内的闭域上一致收敛到不恒等于零的函数 $f(z)$，$f(z)$ 的零点不在 C 上，则存在正整数 N，使当 $n \geqslant N$ 时，在 C 的内部 $f_n(z)$ 与 $f(z)$ 有相同个数的零点.

定理 19.3.10 如果函数列 $f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$ 在域 D 内单叶解析，并且在 D 内的每个闭域上一致收敛到 $f(z)$，且 $f(z)$ 不是常数，则 $f(z)$ 在 D 内单叶解析.

亚纯函数的部分分式表达式

$$\tan\frac{\pi z}{2} = \frac{4z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-z^2}. \tag{19.15}$$

$$\cot \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-n^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z+n}. \tag{19.16}$$

$$\tanh\frac{\pi z}{2} = \frac{4z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2+z^2}. \tag{19.17}$$

$$\coth \pi z = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^2+n^2}. \tag{19.18}$$

$$\sec\frac{\pi z}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi z}{2}} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{(2n-1)^2-z^2}. \tag{19.19}$$

$$\csc \pi z = \frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z+n}. \tag{19.20}$$

$$\sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1-z)^2} + \frac{1}{(2n-1+z)^2}\right]. \tag{19.21}$$

$$\csc^2(\pi z) = \frac{1}{\pi^2 z^2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2+n^2}{(z^2-n^2)^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}. \tag{19.22}$$

19.4 留数定理在积分计算中的应用

引理 19.4.1 (1) 如果函数 $f(z)$在域 $D:0<|z-a|\leqslant R$, $\phi_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\phi_2$ 上连续,且 $\lim\limits_{\substack{z\to a\\(z\in D)}}(z-a)f(z)=A$,则

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = A\mathrm{i}(\phi_2-\phi_1), \tag{19.23}$$

其中 $C_\rho: z=a+\rho e^{i\phi}$, $\phi_1\leqslant\phi\leqslant\phi_2$, $0<\rho<R$.

(2) 如果 $f(z)$在域 $D:R\leqslant|z-a|<+\infty$,

$\phi_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\phi_2$ 上连续,且

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\(z\in D)}}(z-a)f(z)=A,$$

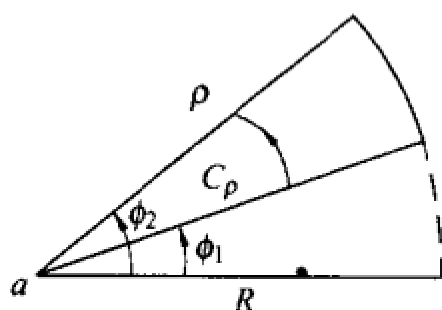


图 19.2

则

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = A\mathrm{i}(\phi_2-\phi_1), \tag{19.24}$$

其中 $C_\rho: z=a+\rho e^{i\phi}$, $\phi_1\leqslant\phi\leqslant\phi_2$, $\rho>R$(见图 19.2).

引理 19.4.2 Jordan 引理 如果函数 $f(z)$在 $R_0\leqslant|z|<+\infty$, $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ 上连续,且 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\\operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)=0$; $m>0$ 是一实常数,则

$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{C_R} e^{imz}f(z)dz = 0$,其中 $C_R: z = Re^{i\phi}, 0\leqslant\phi\leqslant\pi, R > R_0$.

利用引理可以推出下列各类型的积分公式.

利用留数定理计算实函数的积分时,主要步骤有二:一是选函数 $f(z)$,通常要求 $z=x$ 时,$f(z)=f(x)$;另一是选闭路径使该路径包含积分区间的一部分. 表 19.1 及表 19.2 列出常见的积分以及选择的相应函数和路径.

表 19.1　积分计算公式

类　　型	复变函数满足的条件	公　　式
(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	①当 $z=x$ 时,$f(z)=f(x)$ ② $f(z)$ 在上半平面 $\text{Im } z>0$ 内除去有限多个孤立奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外是解析的 ③ $f(z)$ 在 $\text{Im } z\geqslant 0$ 上除去 $a_1,\cdots,a_n$ 外连续 ④ $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \text{Im } z\geqslant 0}} zf(z)=0$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\text{Res}(f,a_k)$
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$	①当 $z=x$ 时,$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(x)}{Q(x)}$; ② $P(z),Q(z)$ 是既约多项式; ③ $Q(z)$ 在实轴上没有零点,在上半平面内有 p 个不相等的零点 $a_1,a_2,\cdots,a_p$; ④ $Q(z)$ 的次数至少比 $P(z)$ 的次数大 2	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ $= 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{p}\text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right)$
(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}f(x)dx$ $(m>0)$	①、②、③同(1) ④ $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \text{Im } z\geqslant 0}} f(z)=0$	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}f(x)dx$ $= 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\text{Res}(e^{imz}f(z),a_k)$

续表

类　型	复变函数满足的条件	公　式
(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx\,dx$ $(m>0)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx\,dx$ $(m>0)$	同(3)	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx\,dx=\mathrm{Re}\,I$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx\,dx=\mathrm{Im}\,I$
(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ $(m>0)$	①,②,③,同(2) ④$Q(z)$的次数比$P(z)$的次数至少大1	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ $=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}\left(e^{imz}\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right)$
(6) $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$	①$z=e^{i\theta}$; ②$F(z)=\frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$是$z$的有理函数 ③$F(z)$在单位圆周上没有极点,在单位圆内有$n$个极点$a_1,a_2,\cdots,a_n$	$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ $=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(F,a_k)$
(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	①②④同(1) ③在实轴上除有限个一阶极点$a_1,a_2,\cdots,a_p$外是连续的	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k)$ $+\pi i\sum_{j=1}^{p}\mathrm{Res}(f,\alpha_j)$
(8) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$	①②④同(2) ③$Q(z)$在实轴上只有一阶零点$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$,在上半平面内有p个不相同的零点$a_1,a_2,\cdots,a_p$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ $=2\pi i\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},a_k\right)$ $+\pi i\sum_{j=1}^{t}\mathrm{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\alpha_j\right)$

续表

类　　型	复变函数满足的条件	公　　式
(9) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x)dx$ $(m>0)$	①②③ 同(7) ④ $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)=0$	$I^* = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{imx} f(x)dx$ $= 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), a_k)$ $+ \pi i \sum\limits_{j=1}^{p} \operatorname{Res}(f(z), a_j)$
(10) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx\, dx$ $(m>0)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx\, dx$ $(m>0)$	同(9)	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx = \operatorname{Re} I^*$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx = \operatorname{Im} I^*$
(11) $\int_0^{+\infty} (x)^{\alpha-1} f(x)dx$ $(0<\alpha<1)$	①当 $z=x$ 时，$z^{\alpha-1} f(z) = x^{\alpha-1} f(x)$，其中 $z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln z}$，$0<\operatorname{Im}\ln z=\arg z<2\pi$ ②$f(z)$ 在闭复平面上除点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外是解析的 ③n 个点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都不等于 0，且都不在正实轴上 ④$z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 $m(m\geqslant 1)$ 阶零点	$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x)dx$ $= \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(z^{\alpha-1} f(z), a_k)$
(12) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)dx$ $(0<\alpha<1)$	①当 $z=x$ 时，$z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha} \cdot f(z) = x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} \cdot f(x)$，其中 $z^{\alpha-1}$，$(1-z)^{-\alpha}$ 都取主值 ②$f(z)$ 在闭复平面上除点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外是解析的 ③$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都不在线段 $[0,1]$ 上 ④$z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，故可令 $f(\infty)=c_0$	$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)dx$ $= \frac{c_0\pi}{\sin\pi\alpha} - \frac{\pi}{e^{\alpha\pi i}\sin\pi\alpha} \cdot$ $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(z^{\alpha-1}(1-z)^{-\alpha} f(z), a_k)$

续表

类　型	复变函数满足的条件	公　式
(13) $\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,dx$	①当 $z=x$ 时，$f(z)\ln z=f(x)\ln x$，其中 $0<\mathrm{Im}\ln z<2\pi$ ②$f(z)$ 在闭复平面上除点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外是解析的 ③$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都不是 0，且都不在正实轴上 ④$z=\infty$ 是 $f(z)$ 的 $m(m\geqslant 2)$ 阶极点	$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,dx$ $=\frac{-1}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\ln^2 z, a_k)\right\}$ 同时得到 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ $=\frac{-1}{2\pi}\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\ln^2 z,a_k)\right\}$
(14) $\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,dx$ $f(-x)=f(x)$	①当 $z=x$ 时，$f(z)\ln z=f(x)\ln x$，$0<\mathrm{Im}\ln z<2\pi$ ②$f(z)$在上半平面内除去点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外是解析的 ③$f(z)$ 在 $\mathrm{Im}\, z\geqslant 0$ 上除点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外是连续的 ④ 当 $\|z\|$ 充分大时，$\|f(z)\|\leqslant\frac{M}{\|z\|^m}$，$m\geqslant 2$，$M$ 是实常数	$\int_0^{+\infty} f(x)\ln x\,dx$ $=-\pi\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\ln z,a_k)\right\}$ 同时有 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ $=2\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\ln z,a_k)\right\}$
(15) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$	①$f(z)$只有有限多个极点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ ②$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全不是整数 ③ 当 $\|z\|$ 充分大时 $\|zf(z)\|<M$，M 是实常数	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$ $=-\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\pi\cot\pi z,a_k)$

表　19.2

积　分	公　式	函数 $f(z)$	路径 C
Laplace $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x$	$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\frac{1}{z^2+\alpha^2}$	y, $R\mathrm{i}$, C_R, $\alpha\mathrm{i}$, $-R$, O, R, x
Dirichlet $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$	$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$	y, $R\mathrm{i}$, C_R, C_r, O, $-R$, $-r$, r, R, x
Fresnel $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$	$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$	y, $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, C_R, $\frac{\pi}{4}$, O, R, x
$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$	$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$	
Euler $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$ $(0<\alpha<1)$	$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ $(0<\alpha<1)$	$\frac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{1+\mathrm{e}^z}$	y, $2\pi\mathrm{i}$, $\pi\mathrm{i}$, $-R$, O, R, x
Legendre $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi x}\frac{\sin\alpha x}{\sinh\pi x}\mathrm{d}x$ $(\alpha>0)$	$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\pi x}\frac{\sin\alpha x}{\sinh\pi x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\,\frac{1+\mathrm{e}^{-\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-\alpha}}-\frac{1}{2\alpha}$ $(\alpha>0)$	$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{\mathrm{e}^{2\pi z}-1}$	y, i, $R+\mathrm{i}$, O, R, x

续表

积　分	公　式	函数 $f(z)$	路径 C
Poisson $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x\,dx$	$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2e}$	e^{-z^2}	$-R+i$, i, $R+i$, $-R$, O, R, x, y
	$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos 2\beta x\,dx$ $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$ $(\alpha>0)$		
$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2}$ $(a>0,\ b>0)$	$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{(x+a)^2+b^2}$ $=\frac{\ln\sqrt{a^2+b^2}}{b}\arctan\frac{b}{a}$ $(a>0,\ b>0)$	$\frac{\ln^2 z}{(z+a)^2+b^2}$	y, C_R, $-a+bi$, r, I, O, $-R$, C_r, II, R, x, $-a-bi$
$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx$ $(0<\alpha<1)$	$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx=\pi\cot\alpha\pi$ $(0<\alpha<1)$	$\frac{z^{\alpha-1}}{1-z}$ $=\frac{e^{(\alpha-1)\ln z}}{1-z}$	y, C_R, C_ρ, O, $-R$, C_r, 1, R, x

20 保角(共形)映射

20.1 引言

保角(共形)映射在复变函数论及其应用中有着重要的作用.由此引出一个问题:要寻求一个保角映射,把一个域映射成一个具有给定的几何形状的域.在许多最简单然而很有用的情形,这一问题可利用初等函数来解决.真正要作出一个保角映射把一个域映射成另外一个域,有时是非常困难的,但对于研究函数的若干一般性的性质,通常并不需要真正知道把一个域映射成另一个域的保角映射,而只需知道这种映射的某些几何性质即可,这就使得我们要广泛地去研究保角映射的几何性质.

20.2 保角映射

20.2.1 导数模的几何意义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 附近有意义,且在 z_0 点可导,$f'(z_0)\neq 0$.这时有

$$|f'(z_0)|\approx\left|\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\right|=\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}. \qquad (20.1)$$

由此知 $|f'(z_0)|$ 表示在点 z_0 处有一个与方向无关的惟一确定的**伸缩率**(magnification).

20.2.2 导数辐角的几何意义

设 C_1, C_2 为域 D 内过点 z_0 的任意两条路径，它们在点 z_0 的切线倾角分别是 ϕ_1 与 ϕ_2，经映射 $w=f(z)$ 得象曲线 Γ_1, Γ_2，它们在 $w_0=f(z_0)$ 点的切线倾角分别是 θ_1 与 θ_2. 当 $f'(z_0)\neq 0$ 时，

$$\arg f'(z_0) = \theta_1 - \phi_1 = \theta_2 - \phi_2, \tag{20.2}$$

因而

$$\theta_1 - \theta_2 = \phi_1 - \phi_2. \tag{20.3}$$

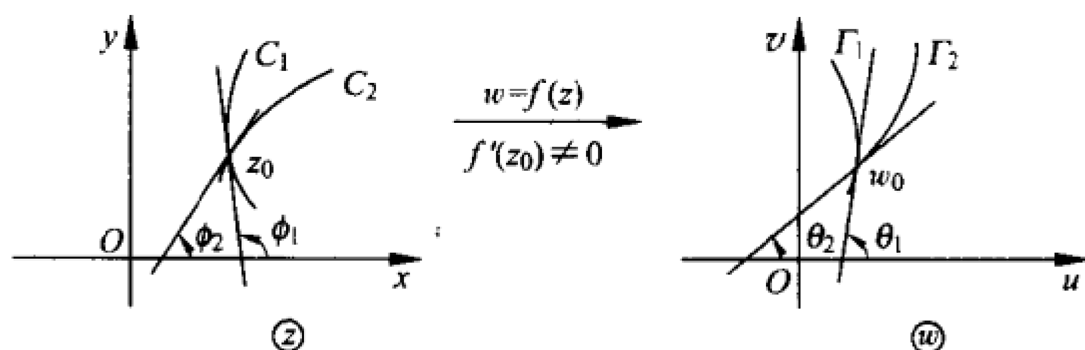


图 20.1

$\arg f'(z_0)$的惟一确定性表明在点 z_0 处由路径 C_1 到 C_2 的旋转角的大小及方向经 $w=f(z)$映射后保持不变:与 Γ_1 到 Γ_2 的旋转角的方向及大小都相同(见图 20.1).

20.2.3 保角映射及其性质

定义 20.2.1 一个具有旋转角度不变性与伸缩率确定性的映射称为保角映射(conformal mapping)(或第一类保角映射).

定义 20.2.2 如果映射保持了伸缩率的确定性及旋转角度的大小，而角的方向正好相反，就称它是第二类保角映射.

例 20.2.3 映射 $w=\bar{z}$ 就是一个第二类保角映射.

以后如果没有特殊的声明，我们所说的都是第一类保角映射.

定理 20.2.4 保域性定理 如果函数 $f(z)$在域 D 内解析，并且不是一个常数，则域 D 的象 $f(D)$是一个域.

定理 20.2.5 如果函数 $f(z)$在域 D 内单叶解析,则对于 D 内的每一点 z 都有 $f'(z)\neq 0$. 反之,如果点 $z_0\in D$, $f'(z_0)\neq 0$,则 $f(z)$在点 z_0 的某个邻域内是单叶的.

定理 20.2.6 如果函数 $w=f(z)$在域 D 内单叶解析;将 D 保角地映成域 G,则反函数 $z=g(w)$在 G 内单叶解析,把 G 保角地映成域 D.

定理 20.2.7 设函数 $f(z)$在域 G 内解析,C 为 G 内一简单闭路径,其内部 D 包含于 G. 如果 $f(z)$把 C 一一映射为简单闭路径 Γ,则 $w=f(z)$在 D 内单叶,并把 D 映成 Γ 的内部 Ω(见图 20.2).

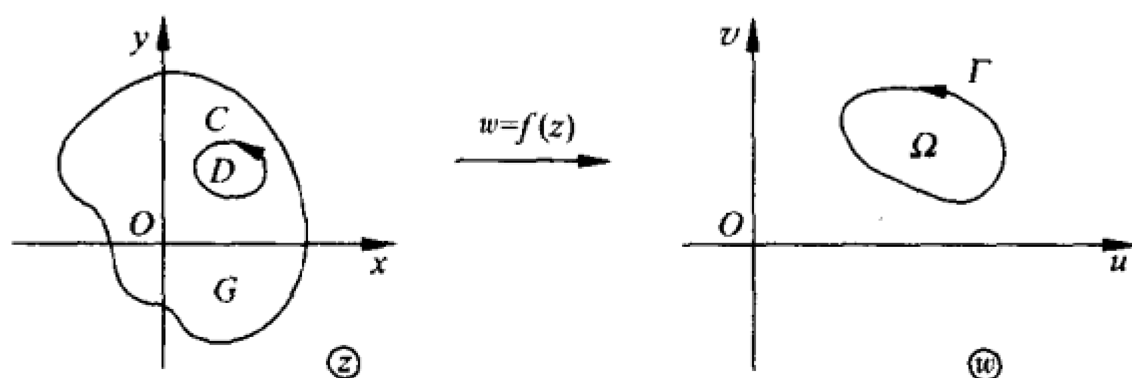


图 20.2

20.3 分式线性函数 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$

20.3.1 几何作用

当 $c=0$, $d\neq 0$ 时,成为线性函数 $w=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$.

当 $c\neq 0$, $ad=bc$ 时,是一常数.

当 $c\neq 0$, $ad\neq bc$ 时,可以写成

$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}}. \tag{20.4}$$

这是由 $w_1=z+\frac{d}{c}$, $w_2=\frac{1}{w_1}$, $w_3=\frac{bc-ad}{c^2}w_2$, $w=\frac{a}{c}+w_3$ 复合

而成的.由复数的运算法可知分式线性函数的几何作用依次是平移(加法)、关于单位圆周对称与关于实轴对称(倒数)、旋转(乘法)与伸缩(乘法)5 种.

20.3.2 解析性、单叶性、保角性

(1) 在去掉点 $z=-\dfrac{d}{c}$ 的复 z 平面内解析，并且 $w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\ \left(z\neq-\dfrac{d}{c}\right)$.

(2) 因为 w' 恒不等于 0，所以在去掉点 $z=-\dfrac{d}{c}$ 的复 z 平面内是单叶的，反函数 $z=\dfrac{-dw+b}{cw-a}$ 仍是一个分式线性函数，而且在去掉点 $w=\dfrac{a}{c}$ 的复 w 平面内也是单叶解析的.

(3) 在闭 z 平面与闭 w 平面上，$z=-\dfrac{d}{c}\leftrightarrow w=\infty$；$z=\infty\leftrightarrow w=\dfrac{a}{c}$. 我们规定象曲线在 $w=\infty$ 处的夹角等于原象曲线在 $z=-\dfrac{d}{c}$ 处的夹角；原象曲线在 $z=\infty$ 处的夹角等于象曲线在 $w=\dfrac{a}{c}$ 处的夹角. 于是 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(c\neq0, ad\neq bc)$ 将闭 z 平面双方单值的保角映射成闭 w 平面.

定理 20.3.1 如果函数 $w=f(z)$ 在闭复平面上除去点 $z=z_0$ 外处处解析，而且单叶，则 $f(z)$ 必是分式线性函数.

20.3.3 保圆性、保对称性

这里，我们将直线看作是过∞点的圆周. ∞点与圆心关于圆周对称.

定理 20.3.2 在 z 平面上,任意一个圆周都可以表示为

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k \qquad (k>0),$$

其中 z_1,z_2 是关于该圆周的两个对称点. 当 $k\neq 1$ 时,这个圆周的圆心 a 与半径 R 分别是

$$a_k=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}, \qquad R_k=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}.$$

定义 20.3.3 圆周族 $C_k:\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=k$ 称为 Apollonius 圆周族.

当 $k\to 0^+$ 时,圆周 C_k 上的点趋于点 z_1,并且 $\lim\limits_{k\to 0^+}a_k=z_1$, $\lim\limits_{k\to 0^+}R_k=0$;当 $k\to+\infty$时,圆周 C_k 上的点趋于 z_2,并且 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k=z_2$, $\lim\limits_{k\to+\infty}R_k=0$. 当 $k\to 1$ 时, $\lim\limits_{k\to 1}a_k=\infty$, $\lim\limits_{k\to 1}R_k=\infty$, C_k 以直线 $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=1$ 为极限位置(见图 20.3).

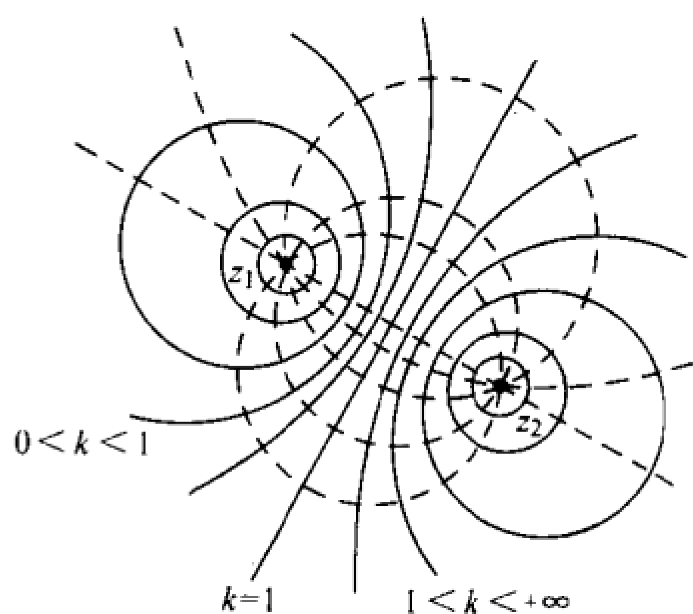


图 20.3

定理 20.3.4 每一个分式线性函数将任一圆周 K 映成某个圆周 H,并且将关于 K 的每两个对称点映成关于 H 的某两个对称点(见图 20.4).

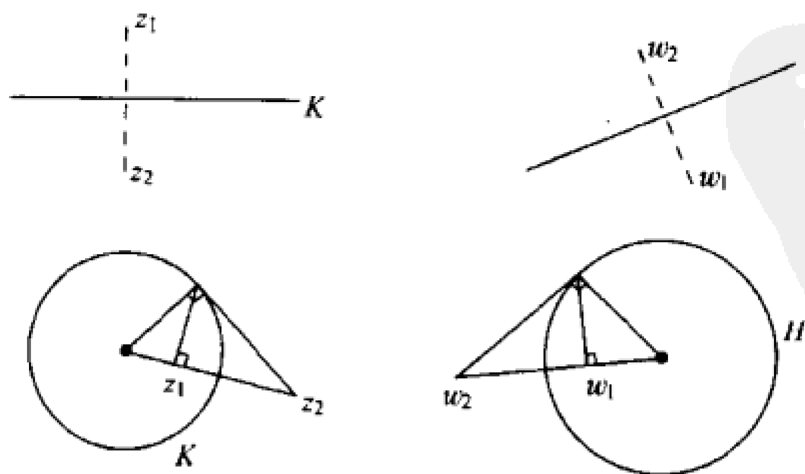


图 20.4

20.3.4 惟一确定分式线性函数的条件

定理 20.3.5 如果已知 z_1,z_2,z_3 与 w_1,w_2,w_3 分别是 z 平面与 w 平面上不同的 3 点，则有惟一的一个分式线性函数 $w=L(z)$满足下式，并且 $w_k=L(z_k)(k=1,2,3)$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \tag{20.5}$$

定义 20.3.6 比值$\frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}:\frac{z_3-z_2}{z_3-z_4}$称为 z_1,z_2,z_3,z_4 这 4 个点的**交比**(cross ratio)，记为(z_1,z_2,z_3,z_4).

定理 20.3.7 如果 z_k 或 $w_k(k=1,2,3)$中某一个是∞，则交比中包含它的那个因子被理解为 1.

定理 20.3.8 交比在任意分式线性函数映射下是不变的.

例 20.3.9 求分式线性函数 $w=L(z)$，使得 $L(0)=1$，$L(1)=0,L(\infty)=-1$.

解 由公式(20.5)及定理 20.3.7 有

$$\frac{w-1}{w-0}:\frac{-1-1}{-1-0}=\frac{z-0}{z-1}:\frac{1}{1},\qquad w=-\frac{z-1}{z+1}=\frac{-z+1}{z+1}.$$

20.3.5 几个重要的分式线性函数

(1) $w=L(z)=e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ (α 是实常数，$\text{Im } a>0$)

① 它将上半平面 $\text{Im } z>0$ 映成单位圆内部$|w|<1$.

② 它将以 $a,\bar{a}$为极限点的 Apollonius 圆周族$\left|\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right|=k$ $(0<k<1)$映成 w 平面上的圆周族$|w|=k$. 并把过 $a,\bar{a}$的圆周在上半平面的部分映成单位圆$|w|=1$ 的直径，见图 20.5.

(2) $w=L(z)=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ (α 是实常数，$|a|<1$)

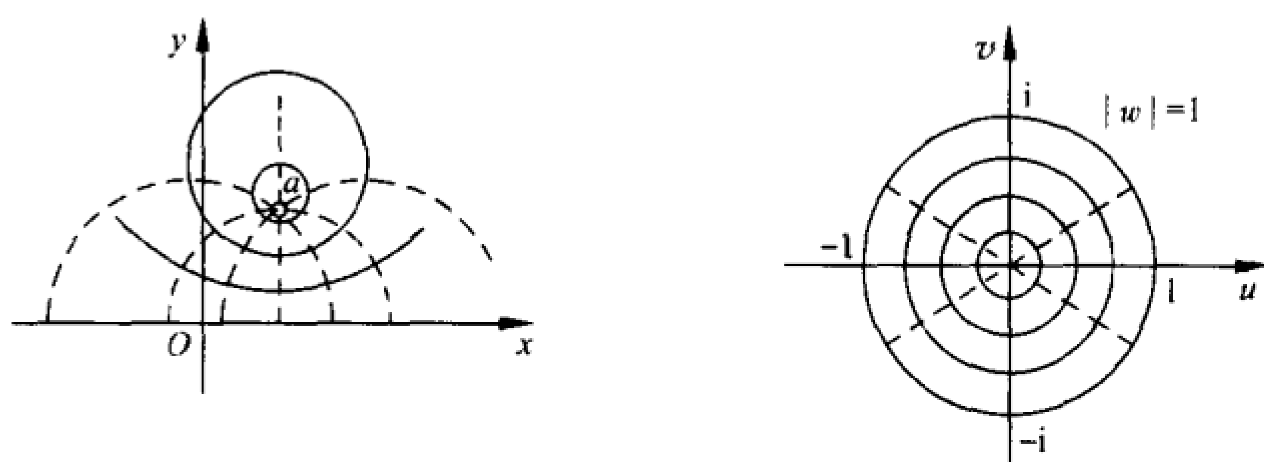


图 20.5

① 它将单位圆内部$|z|<1$映成单位圆内部$|w|<1$.

② 当$a=0$时$w=e^{i\alpha}z$.

③ 它将 Apollonius 圆周族$\left|\dfrac{z-a}{z-1/\bar{a}}\right|=k(0<k<|a|)$映成同心圆族$|w|=\dfrac{k}{|a|}$,而将过$a,\dfrac{1}{\bar{a}}$两点且在圆周$\left|\dfrac{z-a}{z-1/\bar{a}}\right|=|a|$内部(即$|z|<1$)的那些圆弧映成圆周$|w|=1$的直径,见图 20.6.

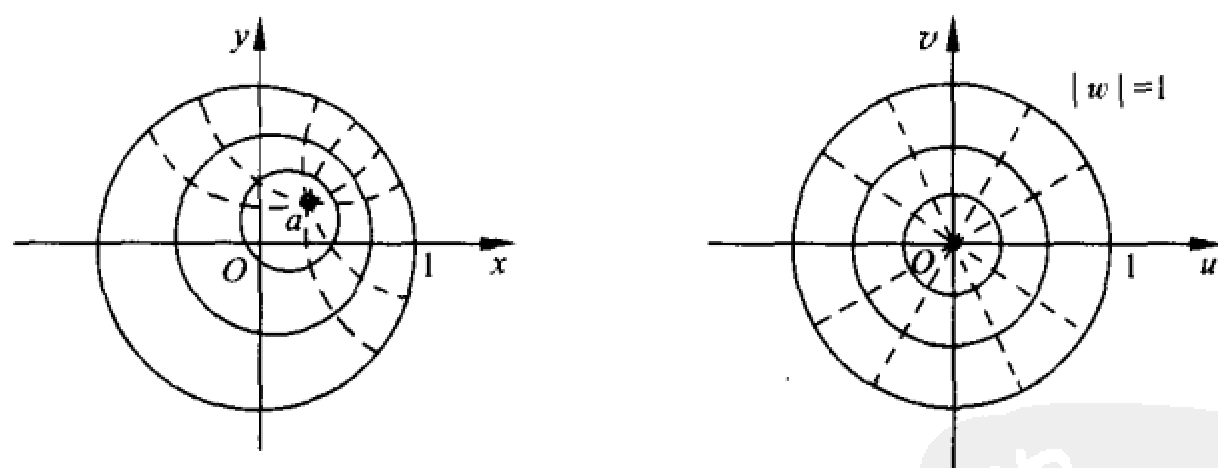


图 20.6

(3) $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$在系数a,b,c,d都是实数且$ad\neq bc$的情形

① $ad>bc\Leftrightarrow w=\dfrac{az+b}{cz+d}$将上半$z$平面映成上半$w$平面.

② $ad<bc \Leftrightarrow w=\dfrac{az+b}{cz+d}$将上半 z 平面映成下半 w 平面.

20.4 存在定理　边界对应定理

下面的存在定理是函数理论最重要的结果之一.

定理 20.4.1 Riemann 定理　如果 D 是 z 平面内一单连通域,$z_0\in D$, θ_0 是一实数($0\leqslant\theta_0<2\pi$),则惟一地存在一个函数 $w=f(z)$,满足下列条件:

(1) $w=f(z)$在 D 内单叶解析,把 D 保角地映成单位圆的内部$|w|<1$,并且 $f(z_0)=0$;

(2) $\arg f'(z)=\theta_0$.

下面的定理通常称为边界对应定理.

定理 20.4.2 设 D 是由一条简单闭路径 C 所围成的域. 如果函数 $w=f(z)$在 D 内单叶解析,将 D 映成单位圆内部$|w|<1$,则 $f(z)$可扩充到 C 上,使得 $f(z)$在闭域$\overline{D}$上连续,并且建立起 C 上的点与圆周$|w|=1$ 上的点之间的一个一一对应.

20.5 例题

要找出一个保角映射 $w=f(z)$将已知域 D 双方单值地映成已知域 G,一般说是很困难的. 但对特殊的域 D,当其边界为不多于两个圆弧(包括直线段)时,可以由分式线性函数及初等函数经过复合步骤映成上半 w 平面.

求一单叶解析函数将下列各域保角地映射成上半 w 平面(见图 20.7).

(1) 交圆域$\begin{cases}|z|<1,\\|z-1|<1.\end{cases}$

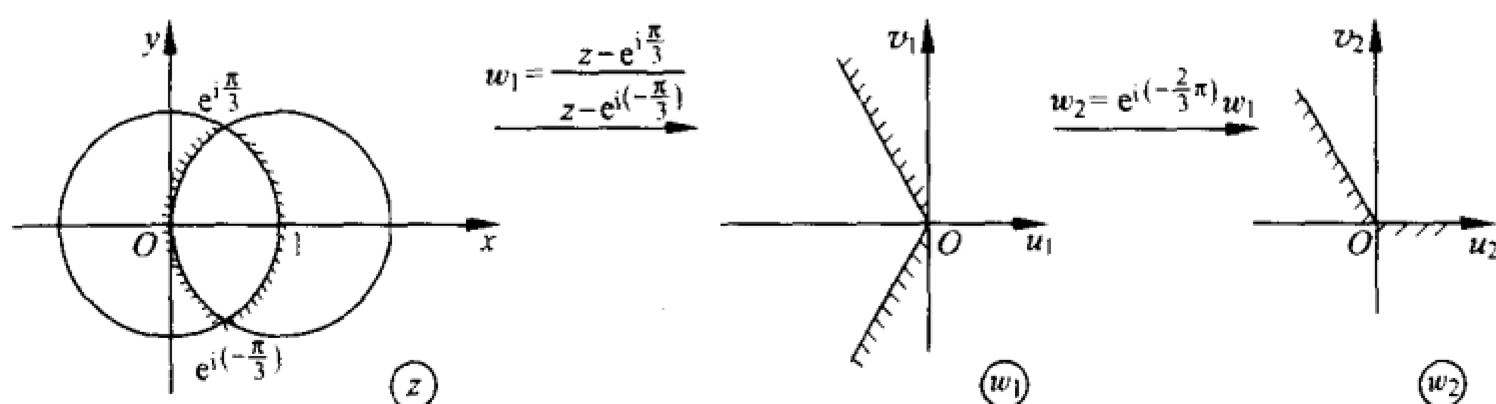


图 20.7

解 ① 求出两个边界圆弧的交点 $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}, z_2=e^{i(-\frac{\pi}{3})}$.

② 根据分式线性函数的保圆性选函数 $w_1=\dfrac{z-e^{i\frac{\pi}{3}}}{z-e^{i(-\frac{\pi}{3})}}$ 它将 $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$ 映成 $w_1=0$，将 $z_2=e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ 映成 $w_1=\infty$；而将 $z=0$ 映成 $w_1=e^{i\frac{2}{3}\pi}$，将 $z=1$ 映成 $w_1=e^{i\frac{4}{3}\pi}$. 于是两圆弧分别映成射线 $\arg w_1=\frac{2}{3}\pi$ 与 $\arg w_1=\frac{4}{3}\pi$.

③ 根据边界点的走向定出象域：

$$z:\quad e^{i(-\frac{\pi}{3})}\to 1\to e^{i\frac{\pi}{3}}\to 0\to e^{i(-\frac{\pi}{3})}$$

$$w_1:\quad \infty\to e^{i\frac{4}{3}\pi}\to 0\to e^{i\frac{2}{3}\pi}\to\infty$$

可见象域是 $\frac{2}{3}\pi<\arg w_1<\frac{4}{3}\pi$.

④ 旋转 $-\frac{2}{3}\pi$ 角，得 $w_2=e^{i(-\frac{2}{3}\pi)}w_1$，在 w_2 平面的角形域是 $0<\arg w_2<\frac{2}{3}\pi$.

⑤ 开平方 $\left(取\ 0<\arg w<\frac{\pi}{3}\right)$ 乘三次方，即得 $w=w_2^{\frac{3}{2}}$，$0<\arg w<\pi$.

⑥ 求得满足要求的一个函数是

$$w=\left(e^{i\left(-\frac{2}{3}\pi\right)}\frac{z-e^{i\frac{\pi}{3}}}{z-e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\left(\frac{z-e^{i\frac{\pi}{3}}}{z-e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

这种方法不是惟一的,例如也可以令 $e^{i\frac{\pi}{3}}\leftrightarrow\infty, e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\leftrightarrow 0$.

(2) 切圆域 $\begin{cases}|z|<2,\\|z-1|>1\end{cases}$ 见图 20.8.

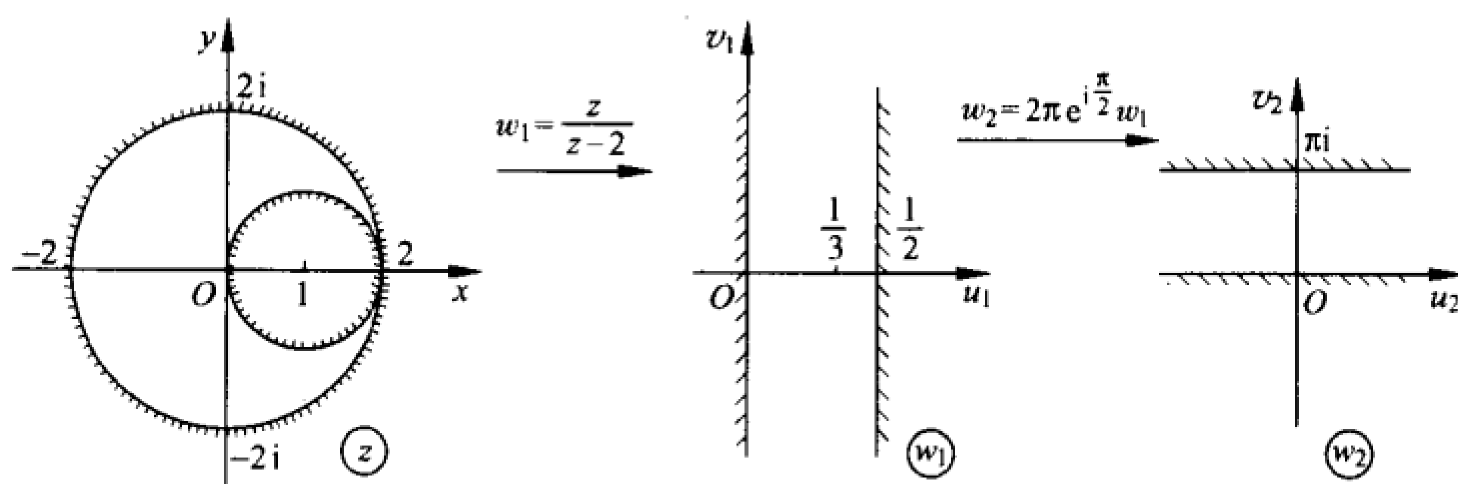


图 20.8

解 ① 令 $w_1=\frac{z}{z-2}$,由于系数都是实数,它将 x 轴映成实轴 $\mathrm{Im}\,w_1=0$.

② 切点 $z=2$ 映成 $w_1=\infty$,所以域的两个边界圆周 $|z|=2$, $|z-1|=1$ 都映成直线,又根据保角性,象直线必都垂直实轴 $\mathrm{Im}\,w_1=0$.

③ $w_1|_{z=0}=0$,说明 $|z-1|=1$ 的象是 $\mathrm{Re}\,w_1=0$; $w_1|_{z=-2}=\frac{1}{2}$,说明 $|z|=2$ 的象是 $\mathrm{Re}\,w_1=\frac{1}{2}$.

④ 因为 $z=-1$ 在切圆域内, $w_1|_{z=-1}=\frac{1}{3}$,由此定出象域是 $0<\mathrm{Re}\,w_1<\frac{1}{2}$.

⑤ 将域 $0<\mathrm{Re}\, w_1<\frac{1}{2}$ 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角，再放大成宽为 π 的带形域，得 $w_2=2\pi e^{i\frac{\pi}{2}}w_1$.

⑥ 指数函数 $w=e^{w_2}$ 将水平带域映成上半 w 平面. 因此有

$$w = e^{2\pi e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z}{z-2}} = e^{2\pi i\frac{z}{z-2}}.$$

(3) 沿连接 $1+i$ 到 $2+2i$ 的线段有割缝的 z 平面(见图 20.9).

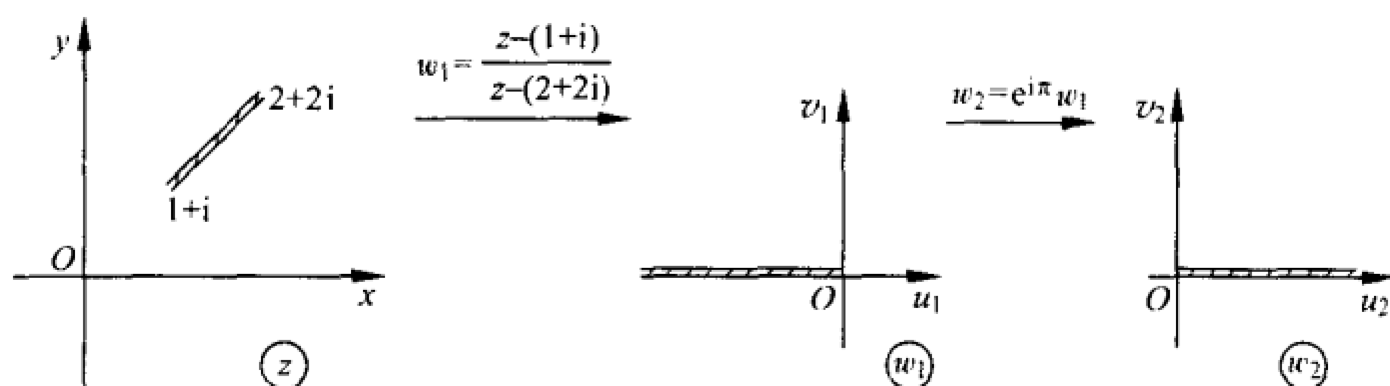


图 20.9

解 ① 令 $w_1=\frac{z-(1+i)}{z-(2+2i)}$，它将割缝伸长成一射线.

② 为了确定象射线的位置，我们取 $z=0$，$w_1|_{z=0}=\frac{1}{2}>0$. 由于 $z=0$ 与 $1+i$，$2+2i$ 共线，但不在割缝上，故象射线位于负实轴 $\mathrm{Im}\, w_1=0$，$\mathrm{Re}\, w_1<0$ 上.

③ 旋转 π 角，再开方(取单值支)就得到上半 w 平面.

④ 这样求得的函数是

$$w=\sqrt{e^{i\pi}\frac{z-(1+i)}{z-(2+2i)}}=\sqrt{-\frac{z-(1+i)}{z-(2+2i)}}$$

$$\left(0<\arg\left(-\frac{z-(1+i)}{z-(2+2i)}\right)<2\pi\right).$$

20.6 常见的保角映射

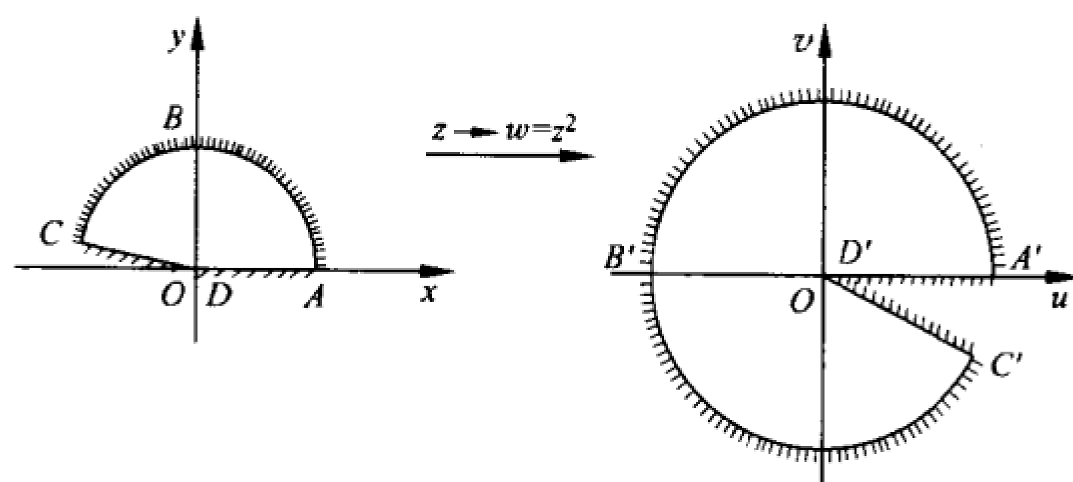


图 20.10

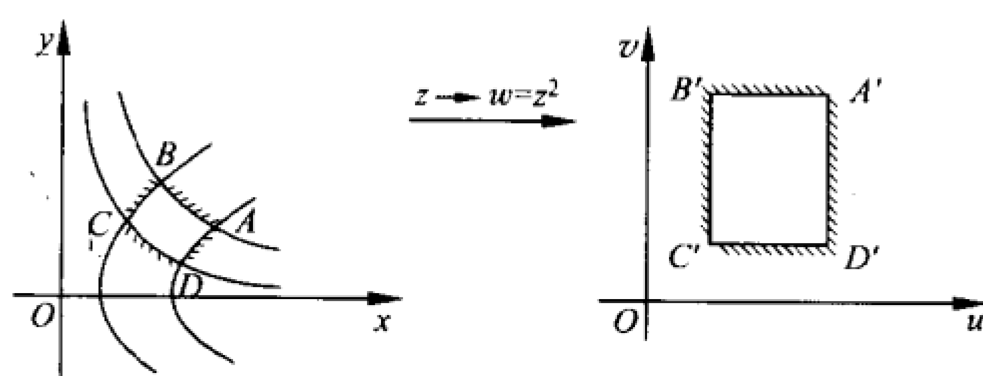


图 20.11

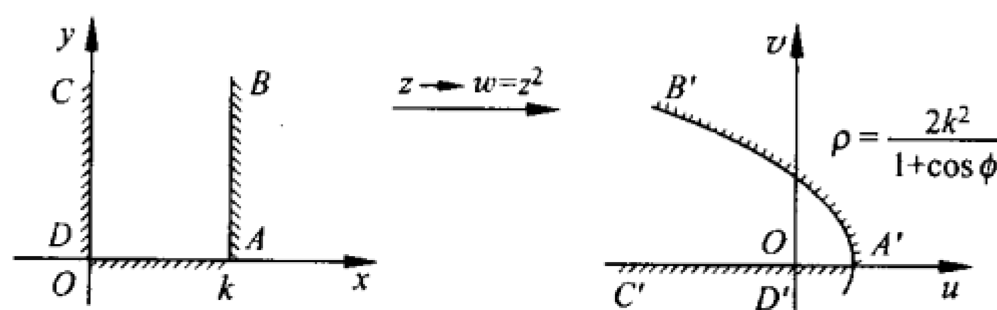


图 20.12

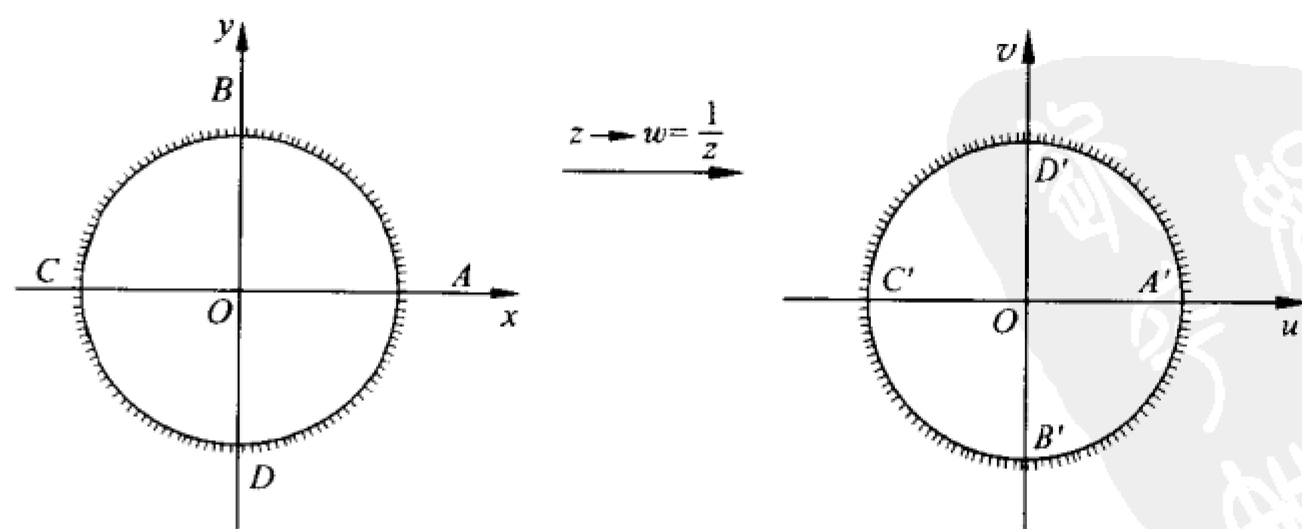


图 20.13

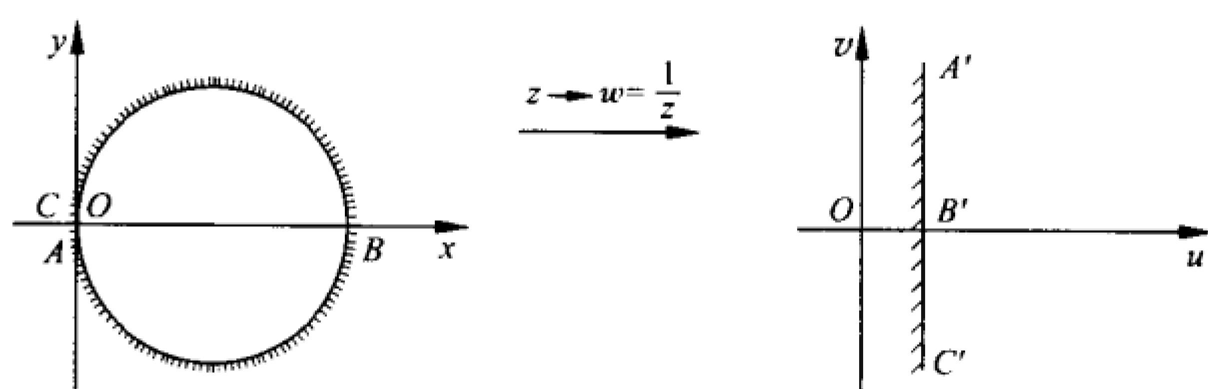


图 20.14

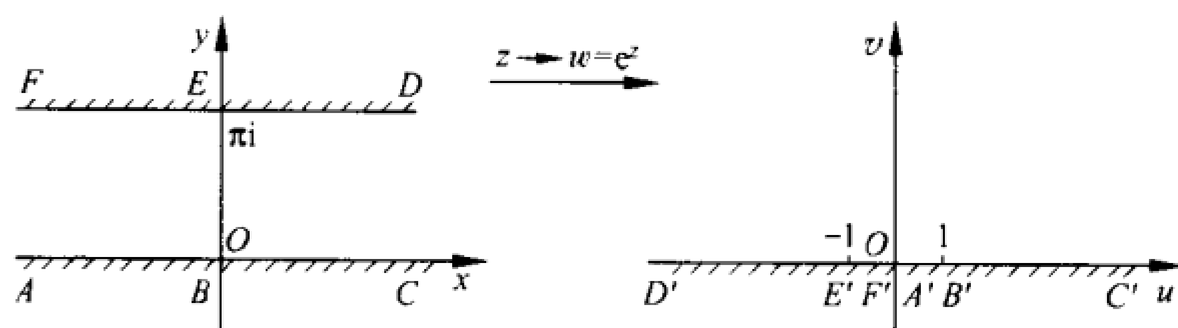


图 20.15

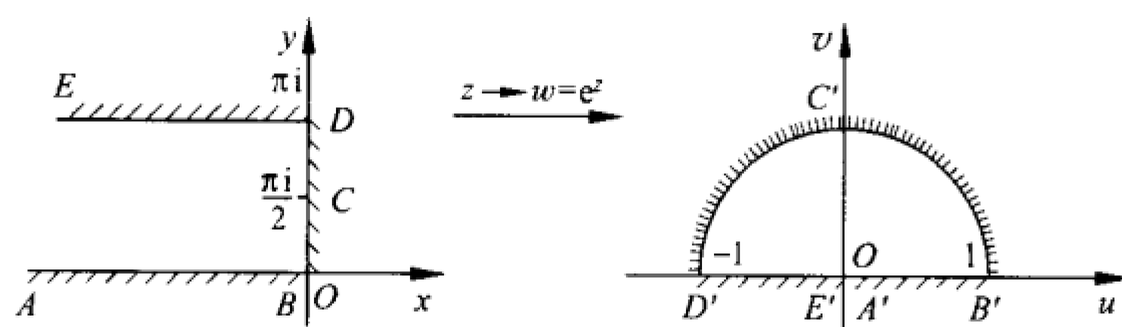


图 20.16

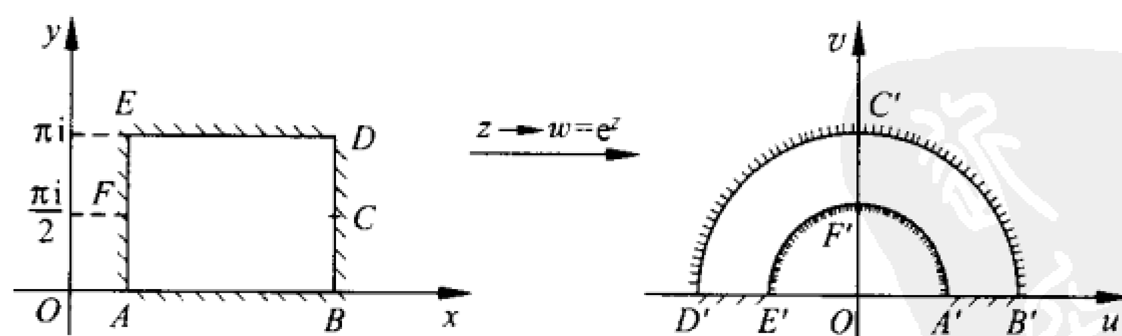


图 20.17

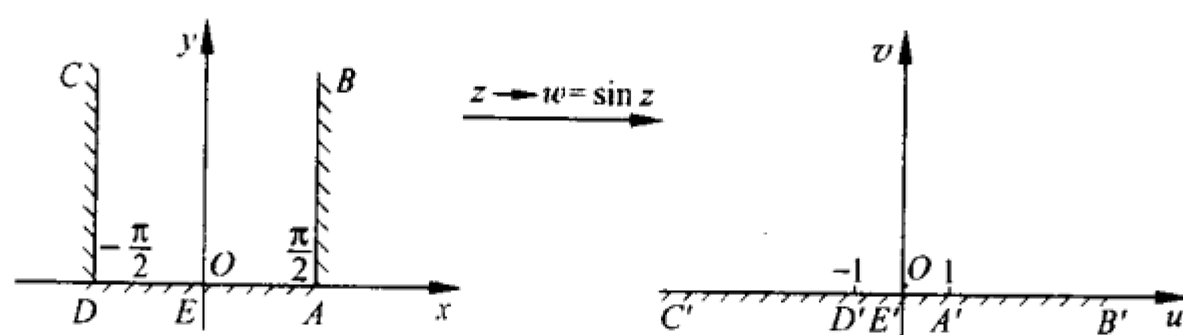


图 20.18

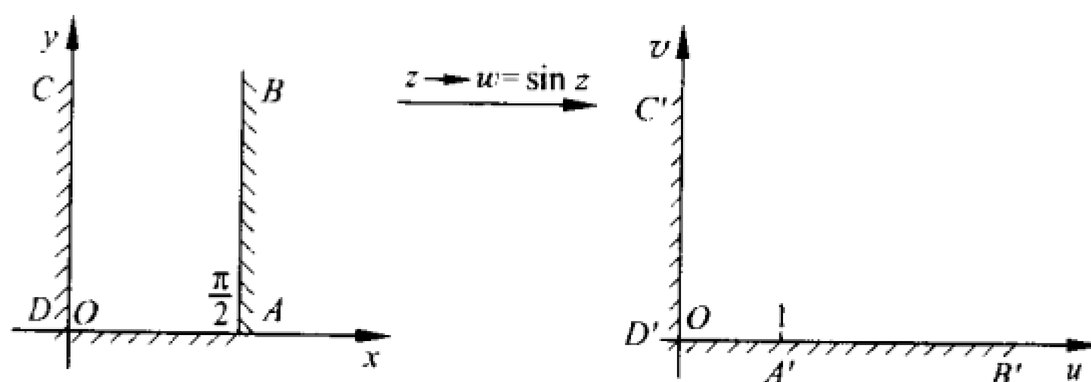


图 20.19

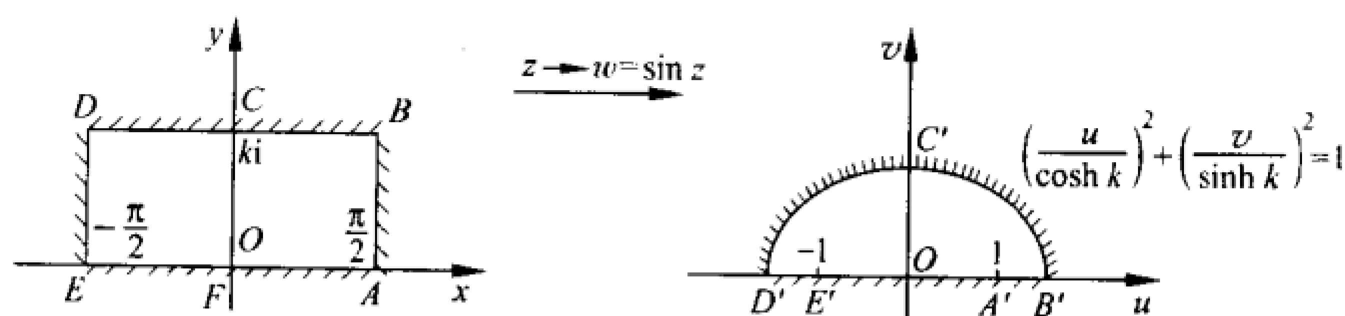


图 20.20

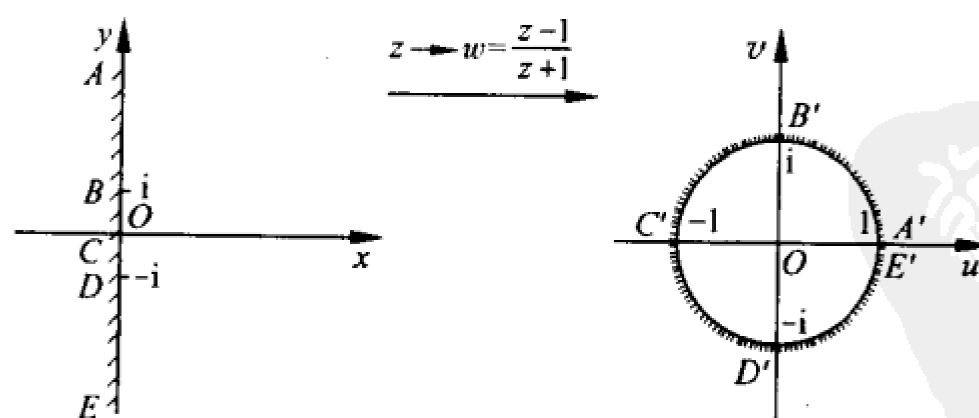


图 20.21

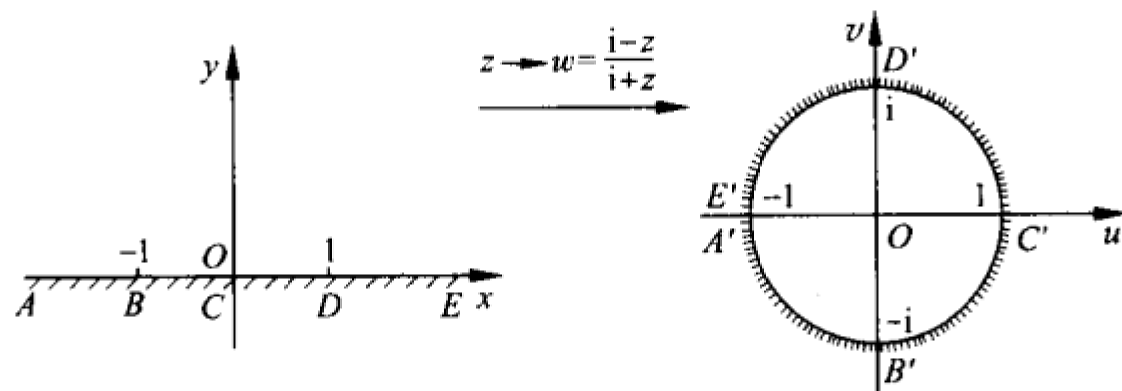
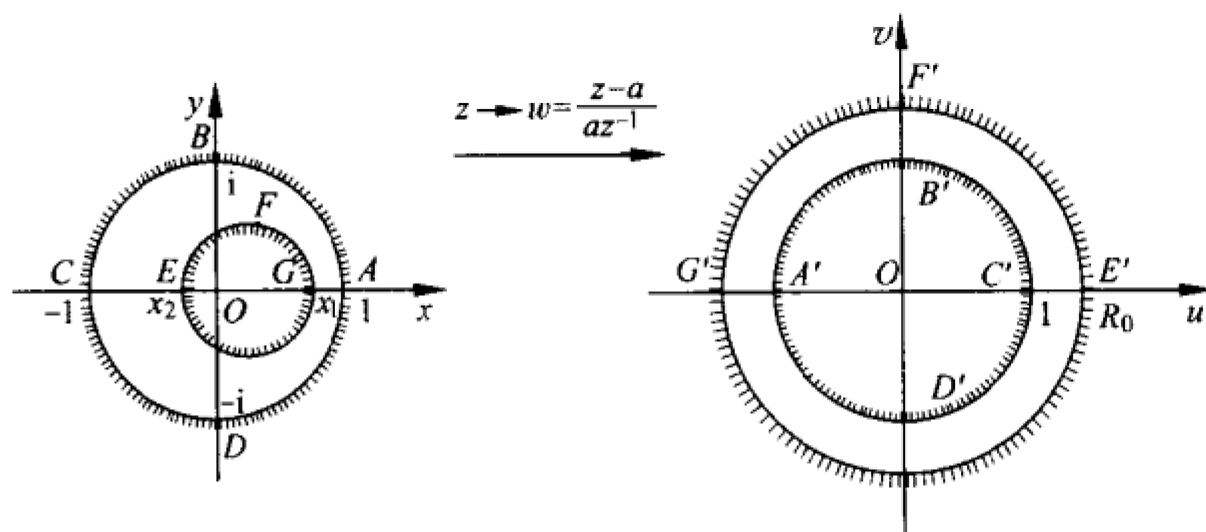


图　20.22

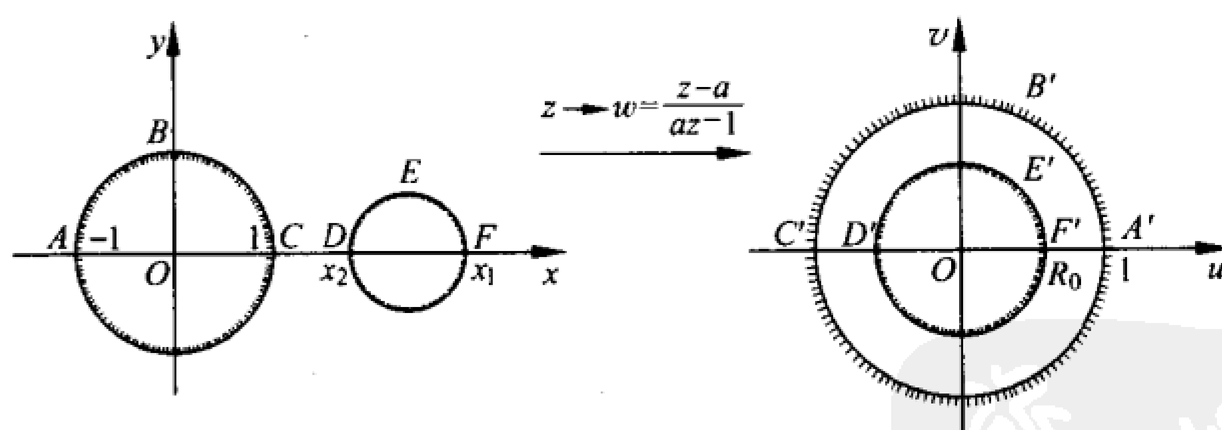


$$a=\frac{1+x_1x_2+\sqrt{(1-x_1{}^2)(1-x_2)^2}}{x_1+x_2},\quad a>1$$

$$-1<x_2<x_1<1.$$

$$R_0=\frac{1-x_1x_2+\sqrt{(1-x_1{}^2)(1-x_2)^2}}{x_1-x_2},\quad R_0>1$$

图　20.23



$$a=\frac{1+x_1x_2+\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1+x_2};$$

$$R_0=\frac{x_1x_2-1-\sqrt{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}}{x_1-x_2}$$

$(x_2<a<x_1,\ 0<R_0<1,\ 1<x_2<x_1)$.

图　20.24

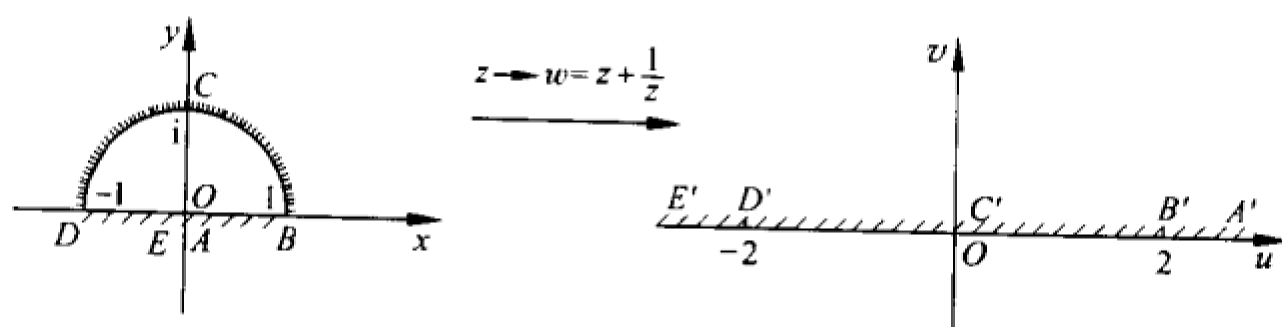


图　20.25

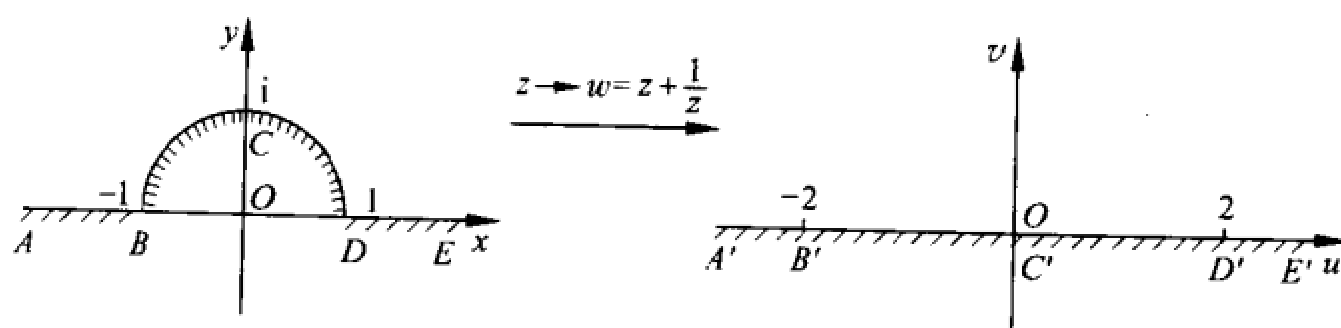


图　20.26

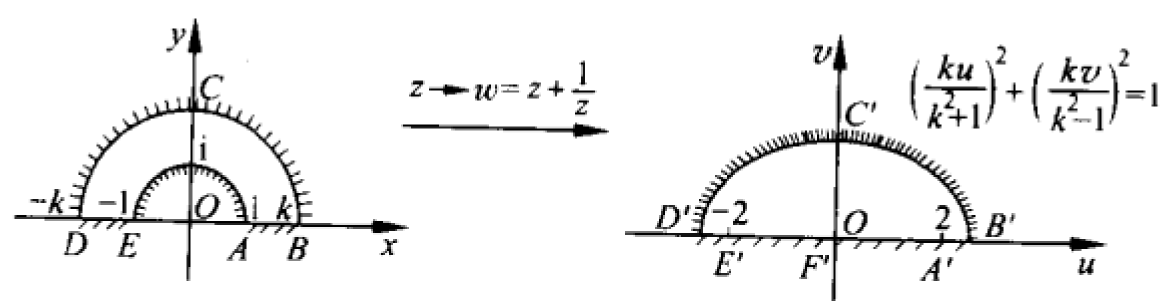


图　20.27

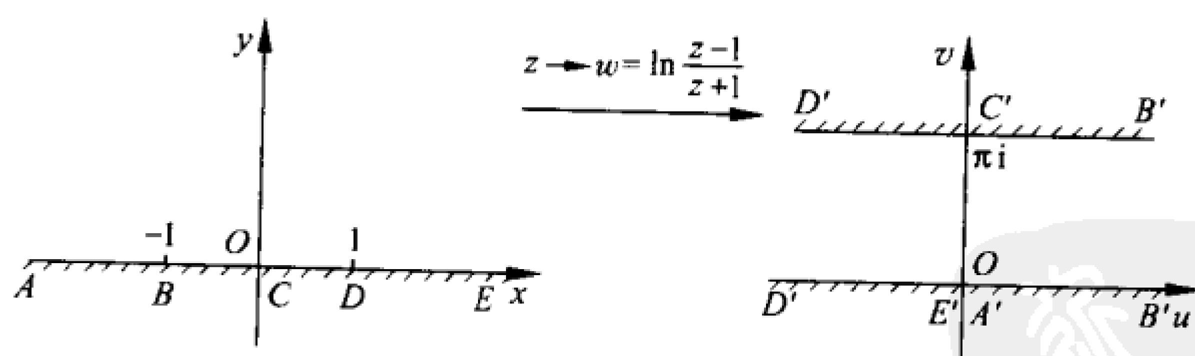


图　20.28

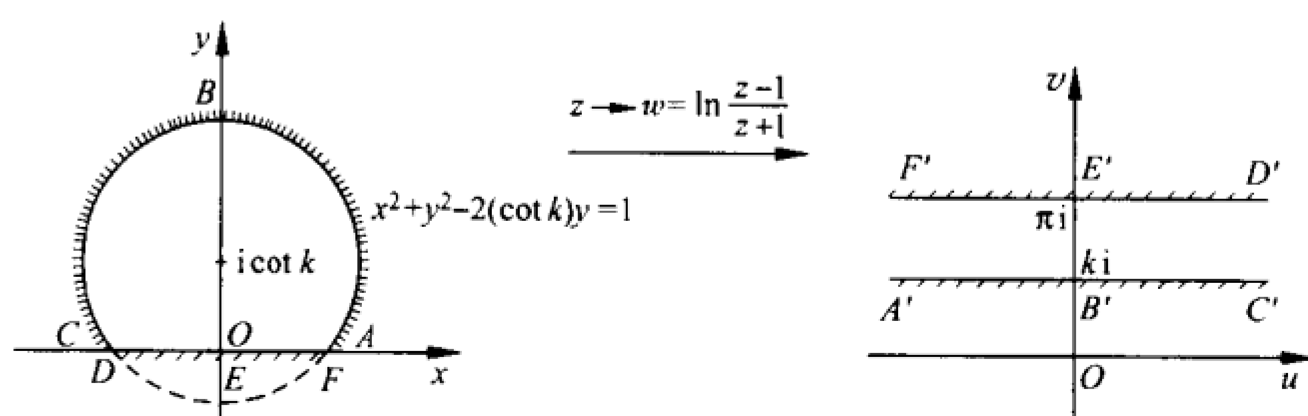
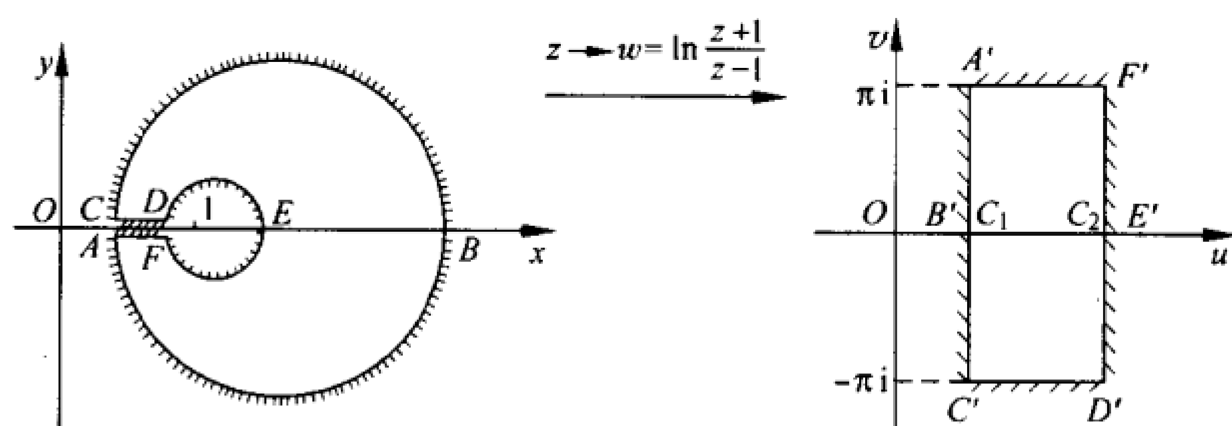
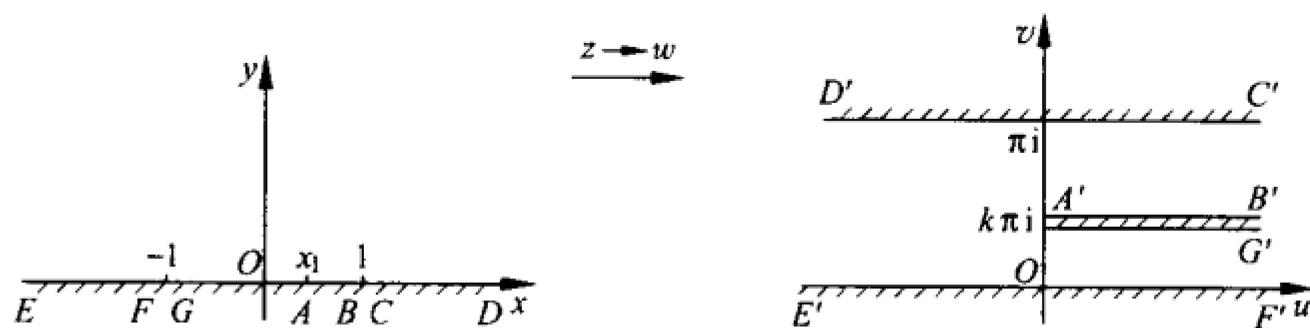


图 20.29



圆心在 $z=\coth c_n$，半径等于$\frac{1}{\sinh c_n}$ $(n=1,2)$.

图 20.30



$$w=k\ln\frac{k}{1-k}+\ln 2(1-k)+\mathrm{i}\pi-k\ln(z+1)-(1-k)\ln(z-1),$$

$$x_1=2k-1,\quad 0<x_1<1.$$

图 20.31

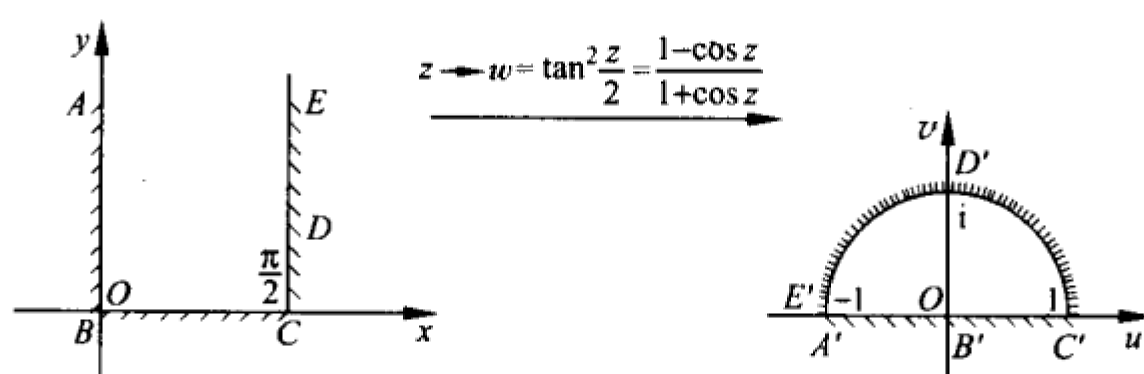


图 20.32

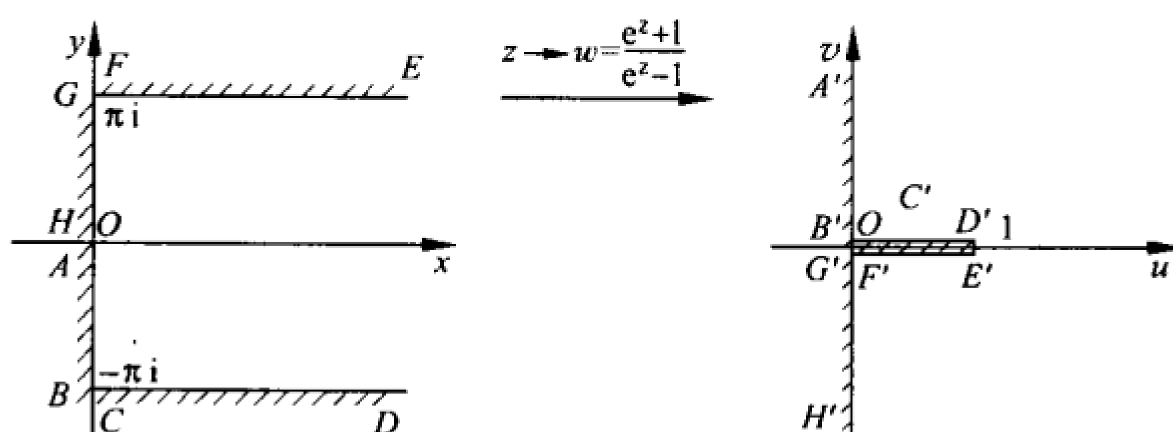


图 20.33

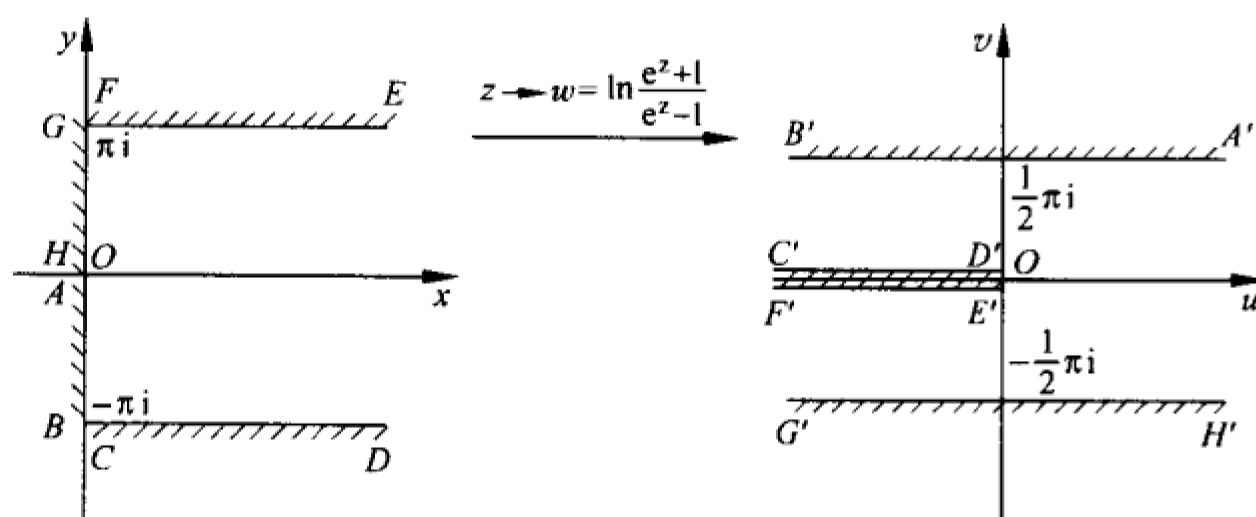


图 20.34

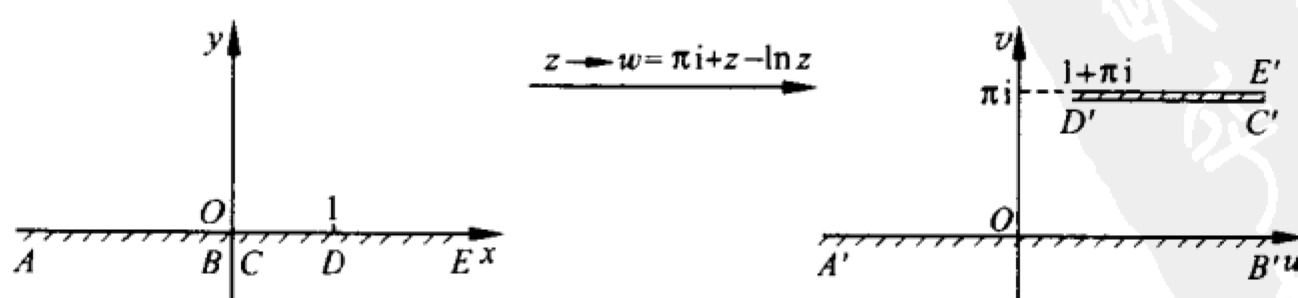


图 20.35

20.7 若干应用

20.7.1 平面向量场

定义 20.7.1 三维实空间内一个向量场 $\boldsymbol{a}(M)$ 称为一个平面向量场(planar vector field),是指:

(1) 这场内所有向量都平行于某一平面 π;

(2) 在垂直于 π 的任一直线上的所有点 M 处,向量 $\boldsymbol{a}(M)$ 的大小和方向都相同.

这种向量场的分布情况完全取决于平面 π. 下面总假设 $\boldsymbol{a}(M)$ 在平面 π 上的域 D 内是连续的,即 $\lim\limits_{\substack{M'\to M\\(M'\in D)}} \boldsymbol{a}(M')=\boldsymbol{a}(M)$.

设有定义在域 D 内的平面向量场 $\boldsymbol{a}(M)(M\in D)$. 又设 l 为 D 内一简单路径,$\boldsymbol{t}^0(M)$ 为 l 的单位切线向量,$\boldsymbol{n}^0(M)$ 为 l 的单位法线向量. 单位法线向量 $\boldsymbol{n}^0(M)$ 的正向规定为:由 $\boldsymbol{t}^0$ 顺时针转 $\frac{\pi}{2}$ 所达到的位置的方向(见图 20.36).

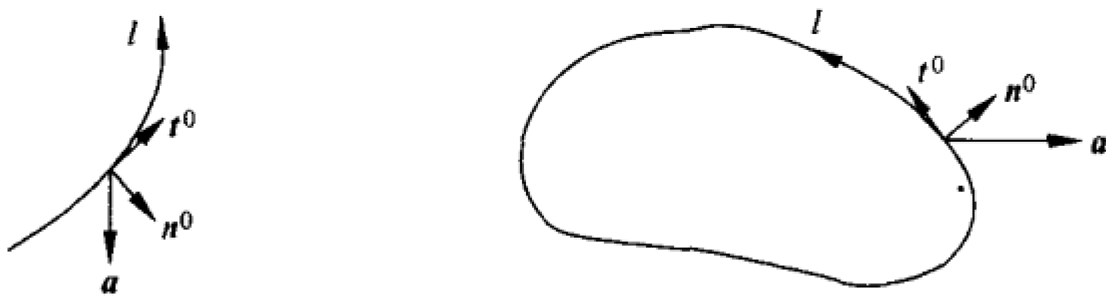


图 20.36

定义 20.7.2 沿 l 的曲线积分叫做向量场 $\boldsymbol{a}(M)$ 沿法线向量 $\boldsymbol{n}^0$ 的方向穿过曲线 l 的**通量**(flux),记为 $\Phi=\int_l \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}^0\mathrm{d}l$.

定义 20.7.3 曲线积分 $\oint_l \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}^0\mathrm{d}l$ 称为平面向量场 $\boldsymbol{a}(M)$ 沿

路径 l 的**环量**(circulation)，记为 $\Gamma=\oint_l \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}^0\,\mathrm{d}l$.

设 M 为域 D 内任意一点，在 M 的邻域内作简单闭路径 Δl 包围 M，取正向. 令 $\Delta\sigma$ 表示 Δl 所围成的域，Δs 表示 $\Delta\sigma$ 的面积. 考虑单位面积的通量 $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta s}$ 与环量 $\dfrac{\Delta\Gamma}{\Delta s}$ 如下(见图 20.37)：

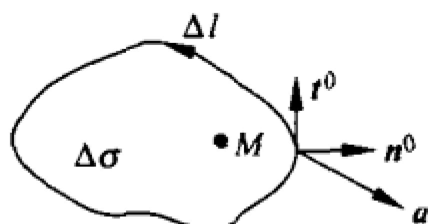


图 20.37

定义 20.7.4 当 $\Delta\sigma$ 以任意方式缩向 M 点时，极限值

$$\lim_{\Delta\sigma\to M}\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}=\lim_{\Delta\sigma\to M}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}^0\,\mathrm{d}l}{\Delta s}$$

(如果存在)就叫做向量场 $\boldsymbol{a}(M)$ 在点 M 处的**散度**(divergence)，记为 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)$，简记为 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$.

一点处的散度刻画了向量场在该点附近的关于"**源**"(source)方面的情况：当 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}>0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}^0>0$，说明在 M 点附近，$\boldsymbol{a}(M)$ 是从 Δl 的内部流向外部的，这时称场 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 处有源(正源)；当 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}<0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}^0<0$，这说明 $\boldsymbol{a}(M)$ 是从 Δl 的外部流向内部的，这时称场 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 处有汇(负源). 当 $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=0$ 时，场 $\boldsymbol{a}$ 在点 M 处既无源也无汇.

定义 20.7.5 当 $\Delta\sigma$ 以任意方式缩向一点 M 时，极限值

$$\lim_{\Delta\sigma\to M}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta s}=\lim_{\Delta\sigma\to M}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t}^0\,\mathrm{d}l}{\Delta s}$$

(如果存在)就定义为 $\boldsymbol{r}(M)\cdot\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 是向量场 $\boldsymbol{a}$ 所在平面 π 的单位法线向量，并且从 $\boldsymbol{n}$ 的终点看 Δl 是逆时针方向的. 当 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 同向时，$|\boldsymbol{r}(M)|$ 最大. 这时 $\boldsymbol{r}(M)$ 叫做向量场 $\boldsymbol{a}$ 的**旋度**(curl 或 rotation)，记为 $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}(M)$ 或 $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(M)$，简记为($\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$)$\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$.

在直角坐标系下的计算法　令 $\boldsymbol{a}(M)=A_1(x,y)\boldsymbol{i}+A_2(x,y)\boldsymbol{j}$，其中 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{j}$ 分别是 x 轴与 y 轴正方向上的基本单位向量. 则路径 l

在点(x,y)处的单位切线向量与单位法线向量可写成(见图 20.38)

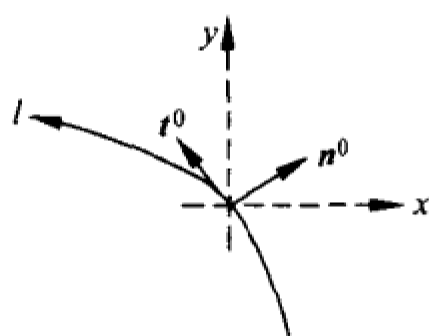


图 20.38

$$\boldsymbol{t}^0 = \cos(\boldsymbol{t}^0, \boldsymbol{x})\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{t}^0, \boldsymbol{y})\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{j}, \tag{20.6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}^0 &= \cos(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{x})\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{n}^0, \boldsymbol{y})\boldsymbol{j} \\ &= \cos(\boldsymbol{t}^0, \boldsymbol{y})\boldsymbol{i} + \cos(\boldsymbol{t}^0, -\boldsymbol{x})\boldsymbol{j} \\ &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{i} + \left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right)\boldsymbol{j}.\end{aligned} \tag{20.7}$$

通量 $\Phi = \int_l \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}^0 \mathrm{d}l = \int_l A_1(x,y)\mathrm{d}y - A_2(x,y)\mathrm{d}x.$ (20.8)

环量 $\Gamma = \oint_l \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{t}^0 \mathrm{d}l = \oint_l A_1(x,y)\mathrm{d}x + A_2(x,y)\mathrm{d}y.$ (20.9)

设$A_1(x,y)$与$A_2(x,y)$及其一阶偏导数都在域D内连续,则关于曲线积分的 Green 定理给出散度及旋度的计算公式

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y}, \tag{20.10}$$

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a} = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}. \tag{20.11}$$

式(20.11)是这样一个向量,它的方向垂直xOy平面,并且当$|\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}|>0$时这个方向与$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$成右手系统,当$|\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}|<0$时这个方向与$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$成左手系统. 所以简记为$\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}$.

定义 20.7.6 在域D内,如果$\mathrm{div}\ \boldsymbol{a}\equiv 0$,则称$\boldsymbol{a}(M)(M\in D)$为一**无源场**(non-source field).

定义 20.7.7 在域D内,如果$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}\equiv 0$,则称$\boldsymbol{a}(M)(M\in D)$为一**有势场**(potential field).

定义 20.7.8 如果平面场$\boldsymbol{a}(M)$同时既是无源场又是有势场,就称它为一个**调和场**(harmonic field).

定理 20.7.9 如果$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}(M)\equiv 0(M\in D)$,则存在一个函数

$u(x,y)$使得$\boldsymbol{a}=\text{grad } u$ $\left(u(x,y)\text{的梯度,即 } \boldsymbol{a}=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)$.

定义 20.7.10 如果 $\text{grad } u(M)=\boldsymbol{a}(M)$,则 $u(M)$称为向量场 $\boldsymbol{a}(M)$的一个**势函数**(potential function).

定理 20.7.11 如果 $\boldsymbol{a}(M)(M\in D)$是一调和场,则其势函数为一调和函数.

定义 20.7.12 算符∇叫做 **Hamilton 算符(算子)**(Hamilton operator):$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}$$\left(\text{在三维实空间中}\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$.

定义 20.7.13 算符 Δ 叫做 Laplace 算符:

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

定义 20.7.14 如果 $\Delta u\equiv 0$,即$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$,则 u 是一调和函数,而 Δu 便称为**调和量**(hamonic quantity).

例 20.7.15 已知 $\boldsymbol{a}(x,y)=(y^2-x^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}$,问 $\boldsymbol{a}(x,y)$是否调和场?如果是,求其势函数.

解 首先计算散度与旋度.因为

$$\text{div } \boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}(y^2-x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(2xy)\equiv 0;$$

$$\text{rot } \boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)-\frac{\partial}{\partial y}(y^2-x^2)\equiv 0,$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 是调和场.

现在由 $\text{rot } \boldsymbol{a}\equiv 0$ 通过$\oint_{\Omega} A_1\mathrm{d}x+A_2\mathrm{d}y$ 求势函数:

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(y^2-x^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+\alpha=xy^2-\frac{x^3}{3}+\alpha,$$

其中 α 为实常数.

所以,求得势函数为 $u=xy^2-\frac{x^3}{3}+\alpha$.

检验是否满足 $\Delta u\equiv 0$：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2-x^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2x$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x$. 正确.

20.7.2 用复变量表示平面向量场

复数既然可以看作复平面上的向量. 复变量在其域内的变化便可代表平面向量场向的运动，从而复变函数的分析性质便都含有平面向量场的物理意义. 场论的基本概念首先引导我们来寻求相应的复变量表示，然后利用所得到的复变量的解析性质去描述平面向量场的规律，作为复变函数论的实际应用.

20.7.3 平面流速场的复势

设在单连通域 D 内有平面稳压连续流速场 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$. 考虑 $\boldsymbol{v}$ 在 D 内任一条简单闭路径 l 上的环量 $\oint_l v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y$ 和通量 $\oint_l v_x\mathrm{d}y-v_y\mathrm{d}x$.

令复变函数 $w=u+\mathrm{i}v$ 表示平面流速场 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$，$u=v_x$，$v=v_y$；$\mathrm{d}z$ 表示弧微元 $\mathrm{d}l$：$\mathrm{d}l=\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y$. 考虑

$$
\begin{aligned}
w\,\mathrm{d}z &= (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\
&= u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x), \quad (20.12)
\end{aligned}
$$

对比等号后面的复数与环量和通量的被积微分式：

$$u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y,\qquad v_x\mathrm{d}x+v_y\mathrm{d}y=u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y; \quad (20.13)$$

$$u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x,\qquad v_x\mathrm{d}y-v_y\mathrm{d}x=u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x. \quad (20.14)$$

我们发现，如果将虚部 v 换成 $-v$，则复数 $\overline{w}=u-\mathrm{i}v$ 的回路积分

$$\oint_l \overline{w}\,\mathrm{d}z=\oint_l u\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\oint_l u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x \quad (20.15)$$

的实部就是流速场 $\boldsymbol{v}$ 的环量 Γ，虚部就是 $\boldsymbol{v}$ 的通量 Φ.

当$\boldsymbol{v}$是调和场时，Γ与Φ都恒等于0，因此对任意闭路径l都有$\oint_l \overline{w}\mathrm{d}z=0$. 根据定理 17.4.8 知$\overline{w}=u-\mathrm{i}v$是一解析函数，且在域$D$内有原函数

$$W=\int_{z_0}^{z}\overline{w}\,\mathrm{d}z=\int_{z_0}^{z}u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_{z_0}^{z}u\,\mathrm{d}y-v\,\mathrm{d}x=U+\mathrm{i}V. \tag{20.16}$$

同时

$$\mathrm{d}W=\overline{w}\,\mathrm{d}z=u\,\mathrm{d}x+v\,\mathrm{d}y+\mathrm{i}(u\,\mathrm{d}y-v\,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}U+\mathrm{i}\,\mathrm{d}V.$$

二元实函数$U(x,y)$是流速场的势函数，因为 $\operatorname{grad} U=\boldsymbol{v}$；而$V(x,y)$是流速场的**流函数**(stream function)，因为V的**等值线**(level curve)$V=$常数　就是微分方程$\mathrm{d}V=u\,\mathrm{d}y-v\,\mathrm{d}x=0$的解曲线，它们在每一点的切线方向$\mathrm{d}y:\mathrm{d}x=v:u$与流速场$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=u+\mathrm{i}v$的方向一致. 我们称解析函数$W=U+\mathrm{i}V$为流速场$\boldsymbol{v}$的一个复势.

定义 20.7.16　设流速场$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$是一平面稳定调和场. 如果存在一个解析函数$W(z)$使

$$\overline{W'(z)}=\boldsymbol{v},$$

则称W是该流速场$\boldsymbol{v}$的一个**复势**(complex potential).

注意到在流函数的等值线($V=$常数)，即**流线**(stream line)上每一点(x,y)处都有

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y=-v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y=-\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}y=0,$$

因而

$$\mathrm{d}y:\mathrm{d}x=v:u=\frac{\partial U}{\partial y}:\frac{\partial U}{\partial x},$$

可见流线的方向就是流速场$\boldsymbol{v}$的方向，它同势函数U的梯度$\operatorname{grad} U$的方向一致，即流线的方向是势量增大最快的一个方向.

定理 20.7.17　设$w=u+\mathrm{i}v$为z平面内一调和场. 则其共轭

场$\overline{w}=u-\mathrm{i}v$，作为一个复变函数是解析的，它的原函数$W=U+\mathrm{i}V$就是原场$w$的一个复势，其实部$U$与虚部$V$分别是该场的（实的）势函数与流函数. 二者的基本关系是

$$\mathrm{d}W=\overline{w}\,\mathrm{d}z,\qquad w=\overline{W'(z)}.$$

20.7.4 平面静电场的复势

对于平面静电场$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}$（设在单连通域$D$内连续且与时间无关）也可以用复函数$w=u+\mathrm{i}v$表示（$u=E_x$，$v=E_y$）.

当$\boldsymbol{E}$是调和场时，按定义20.7.2的方式处理可得复势$W=U+\mathrm{i}V$，使得$E_x=u=\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial V}{\partial y}$；$E_y=v=-\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{\partial U}{\partial y}$，因而使得流线$V=$常数的切线方向同势量$U$增大最快的方向$\mathrm{grad}\,U$一致. 这跟电位指向减小的这个事实恰恰相反，因而需要把代表电场$\boldsymbol{E}$的复势$W=U+\mathrm{i}V$换成$W_1=-U+\mathrm{i}V$或$W_2=V-\mathrm{i}U$. 由于一般来说，W_1不是解析的；而$W_2=(-\mathrm{i})W$则是解析的. 因此称$\hat{W}=(-\mathrm{i})W=V-\mathrm{i}U$为静电场$\boldsymbol{E}$的复势或**复位**（函数），其势函数$U(x,y)$为**位函数**，其流函数$V(x,y)$为力函数. 力线$V=$常数的切线方向恰好重合于位函数$U$减小最快的方向$\mathrm{grad}(-U)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\hat{W}&=(-\mathrm{i})\mathrm{d}W=(-\mathrm{i})\,\overline{w}\,\mathrm{d}z=(-\mathrm{i})(E_x-\mathrm{i}E_y)\mathrm{d}z\\&=(-E_y-\mathrm{i}E_x)\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{E}=w=-\mathrm{i}\,\overline{\hat{W}'(z)}.$$

定理 20.7.18 设$w=u+\mathrm{i}v$为z平面内一调和场. 则其直交场$\hat{w}=\mathrm{i}\,w=-v+\mathrm{i}u$作为一个复变函数是解析的，它的原函数$\hat{W}=V-\mathrm{i}U$就是原场$w$的复位（复势），其实部$V$与共轭虚部$U$分别是该场的（实的）力函数与位函数. 二者的基本关系是

$$\mathrm{d}\hat{W}=\overline{(\hat{w})}\mathrm{d}z,\qquad \hat{w}=\overline{\hat{W}'(z)}.$$

20.7.5 Жуковский 机翼

Жуковский 注意到飞机机翼的横截面有些像围绕一段曲率(curvature)相当小的圆弧(s)的邻域(s_1)，如图 20.39，因而在研究环绕机翼流动的情况时，可以把圆弧的外部双方单值保角地映射成一个圆周的外部，以简化数量计算. 这样的保角映射可以用适当的坐标与参数表述如下.

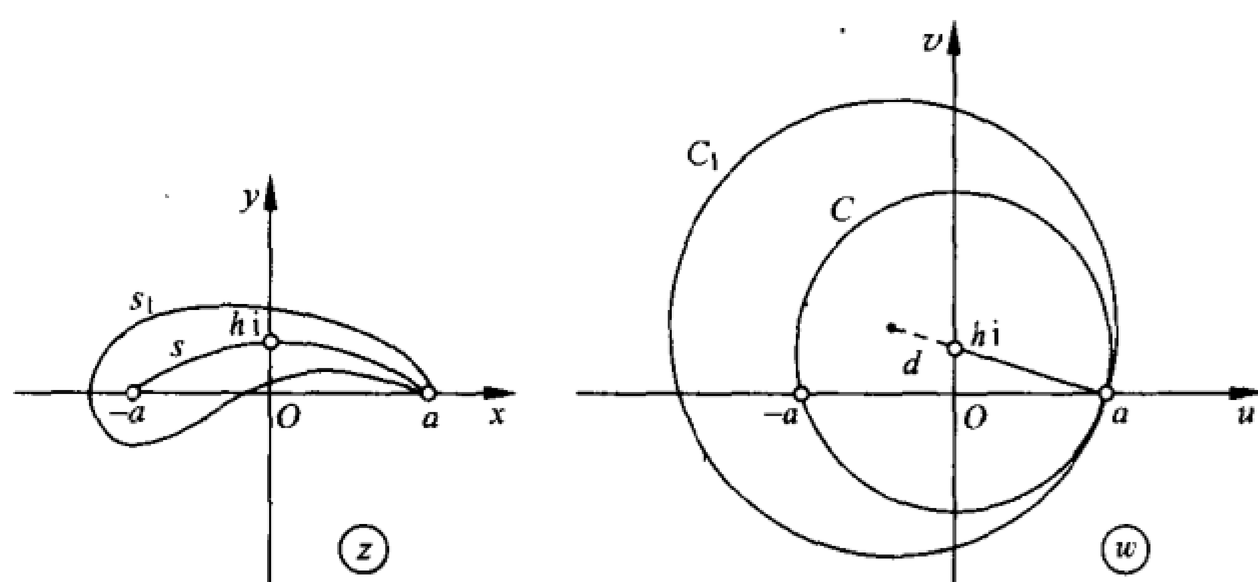


图 20.39

Жуковский 得到简单的初等函数 $z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{a^2}{w}\right)$，它把 w 平面上圆周 C 的外部双方单值保角地映射成 z 平面上圆弧 s 的外部(沿圆弧 s 有割缝的 z 平面)，同时把在点 a 处与 C 相切又包围 C 的每一圆周 C_1 映射成 z 平面上一条包围 s 且在 a 处有一尖点(歧点(cusp))的闭曲线 s_1，其外部对应着 C_1 的外部. 而闭曲线 s_1 所围成的单连通闭域很像机翼的横截面，其宽度、曲度以及厚度分别取决于参数 a，h 以及 C 与 C_1 的圆心距离 d. 以此为依据，Жуковский 提出了求各类机翼横截面的方法.

Жуковский 函数是由下述问题提出的：将沿圆弧 s 有割缝的 z 平面双方单值保角地映射到 w 平面上圆 C 的外部，已知圆弧 s

的端点在$\pm a(a>0)$，而弧心在$hi(h>0)$；圆周C经过$\pm a$，而圆心在hi. 见图 20.40.

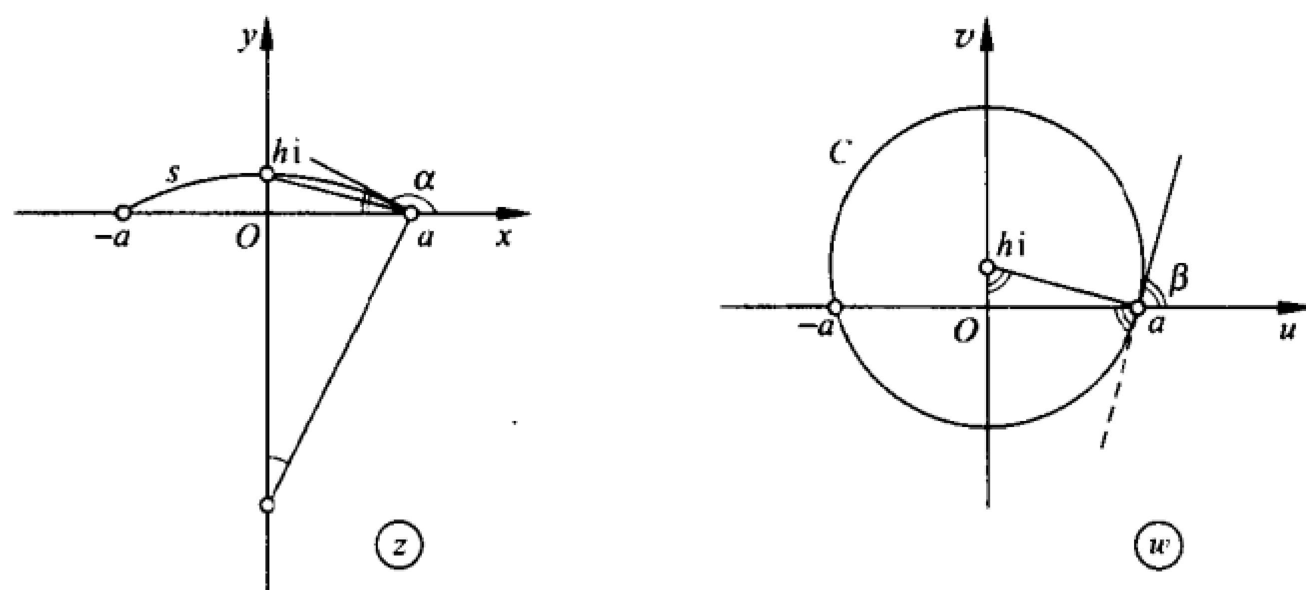


图 20.40

欲求这个映射，我们注意圆弧与圆周的共同数据，可由同样的分式线性函数使圆弧s与圆周C的象分别为射线与直线：

$$Z=\frac{z-a}{z+a},\tag{20.17}$$

$$W=\frac{w-a}{w+a}.\tag{20.18}$$

注意到弦$\overline{a(-a)}$被映射成负实轴，根据保角性知s的象$\bar{s}$在Z平面上关于负实轴的倾角等于$2\arctan\dfrac{h}{a}$，因此$\bar{s}$关于正实轴有倾角$\alpha=\pi-2\arctan\dfrac{h}{a}$；而$C$的象$\overline{C}$在$W$平面上关于正实轴有倾角（见图 20.41）

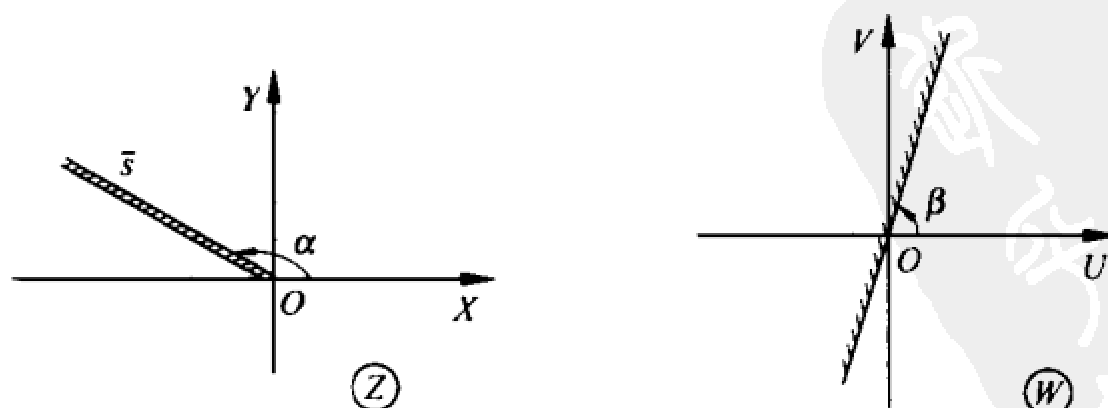


图 20.41

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{h}{a} = \frac{\alpha}{2}.$$

映射 $Z=W^2$ 将W平面的半平面域双方单值地映成Z平面沿$\bar{s}$有割缝的平面域. 将分式线性函数代入,得到

$$\frac{z-a}{z+a} = \left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2. \tag{20.19}$$

整理后,得到 Жуковский 函数

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{a^2}{w}\right), \tag{20.20}$$

$$w = z + \sqrt{z^2 - a^2}. \tag{20.21}$$

函数 $w=z+\sqrt{z^2-a^2}$ 在沿圆弧 s 有割缝的 z 平面内可以分出解析分支.

20.7.6 平行板电容器

一电容器内一对共面平板,相离一条直缝隙,分别充电形成一个电位差的静电场. 需要考察场中等位线与电力线的分布情况.

由于缝隙微小,两块极板可以看成一对无限的半平面,从而电场在每张垂直于板面边缘的平面内形成相同的平面向量场. 取其中一张作为复 z 平面,以缝隙的中垂线为虚轴,以极板截出的一对射线所在的直线为实轴,并且以缝隙宽度的一半为长度单位(如图 20.42). 这样,我们所要考察的平面静电场便是以这一对射线为割缝(ABC)与(DEF)的 z 平面(见图 20.42).

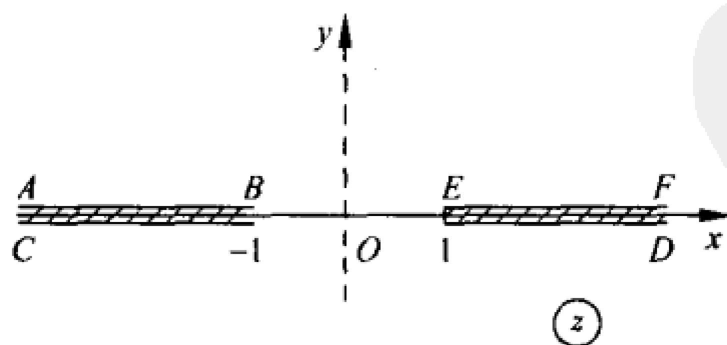


图 20.42

首先要化简这个平面域的形状.可以利用分式线性函数 $Z=\frac{z-1}{z+1}$将割缝放在从 $Z=0$ 到 $Z=\infty$沿正实轴的位置上. A,B,C,D,E,F 的位置由边界的走向确定(如图 20.43). 开方 $Z_1=\sqrt{Z}$(取 $k=0$)割缝就被展开成整个实轴,原电场就被转换成上半平面(如图 20.44).

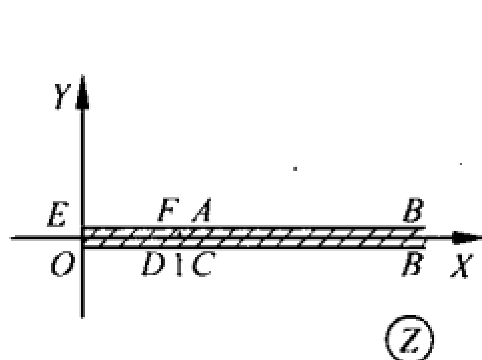


图 20.43

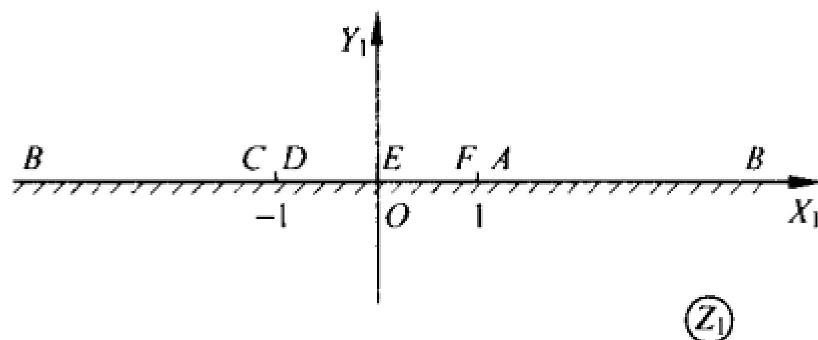


图 20.44

现在来考察此静电场的复位(势)函数$W=V-\mathrm{i}U$. 假定右极板电位较低,取为标准,并取适当的电位差单位,使有电位图,如图 20.45. 图中的带形域可以映射成上半平面,只需令

$$w(=u+\mathrm{i}v)=\mathrm{e}^W(=\mathrm{e}^{V-\mathrm{i}U}).$$

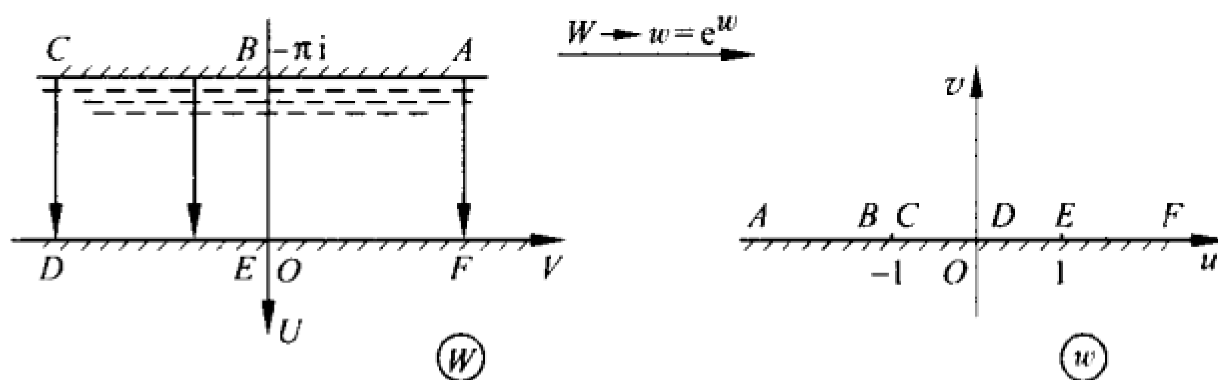


图 20.45

上半 w 平面可以映成上半 Z_1 平面使 A,B,C,D,E,F 的位置重合 Z_1 轴上的位置,只需令 $Z_1=\frac{w-1}{w+1}$便可. 因此原电场在 z 平面上的域可以变换成上半 w 平面,其函数是由关系式 $Z=Z_1^2$ 所得到的

$$\frac{z-1}{z+1}=\left(\frac{w-1}{w+1}\right)^2.$$

根据式(20.19)～(20.21)得知这就是 Жуковский 映射：$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)$，$w=z+\sqrt{z^2-1}$. 于是得到静电场的复位(势)函数

$$W(=V-\mathrm{i}U)=\ln w=\ln(z+\sqrt{z^2-1}).\quad(20.22)$$

因此等位线与电力线具有参数方程：

$$U=-\arg w=-\theta\qquad(0<\theta<\pi),\quad(20.23)$$

$$V=\ln|w|=\ln r\qquad(0<r<+\infty).\quad(20.24)$$

这正是上半 w 平面的极坐标网，它经过上述 Жуковский 映射被映成 z 平面的象，就是我们所要寻求的原给静电场的等位线与电力线. 代入该映射

$$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right),\qquad z=x+\mathrm{i}y,\qquad w=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta};$$

分解实、虚部：

$$x=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,\quad(20.25)$$

$$y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta;\quad(20.26)$$

再消去 r 或 θ，就分别得到

$$\left(\frac{x}{\cos\theta}\right)^2-\left(\frac{y}{\sin\theta}\right)^2=1\qquad\left(0<\theta<\pi,\theta\neq\frac{\pi}{2}\right),\quad(20.27)$$

$$\left[\frac{x}{\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)}\right]^2+\left[\frac{y}{\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)}\right]^2=1\qquad(0<r<+\infty,r\neq1).\quad(20.28)$$

可见原给静电场的等位线是一族共焦点$(-1,0)$与$(1,0)$的双曲线，当 $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 时退化为虚轴，而电力线则是一族与等位线直交的、

共焦点$(-1,0)$与$(1,0)$的椭圆，当$r\to 1$时退化为实轴上的线段$[-1,1]$(见图 20.46).

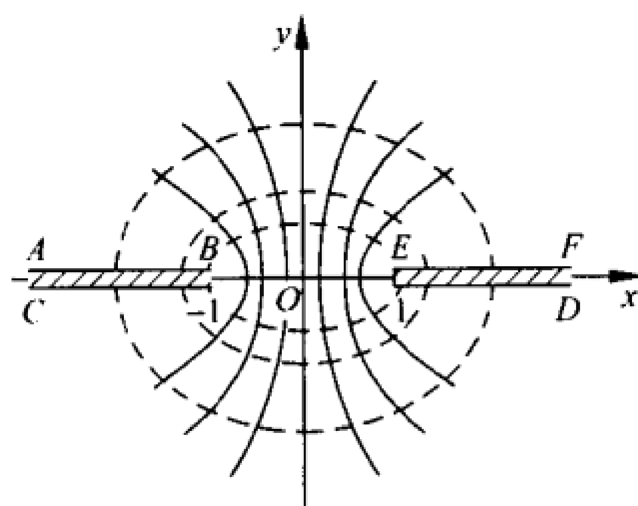


图 20.46

常微分方程

21 常微分方程的一般概念

21.1 微分方程

微分方程产生于十六七世纪的力学和几何学的研究，随着生产力的发展和微积分学的建立，它逐步形成一门重要的数学分支，不仅本身有重要的理论和实际意义，而且也是其他数学分支的基础，同时也成为解决其他科学、技术问题的重要数学工具. 本篇只介绍有关常微分方程的一些基础内容.

定义 21.1.1 凡含有自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的方程，叫做**微分方程**(differential equation). 当微分方程中的未知函数是一元函数时，称为**常微分方程**(ordinary differential equation)；若未知函数是多元函数时，方程称为**偏微分方程**(partial differential equation).

常微分方程一般地记为：

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{21.1}$$

其中 x 是自变量，y 是未知函数. 若(21.1)式能就最高阶导数 $y^{(n)}$ 解出，得到

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \tag{21.2}$$

这种形式的方程称为**显式**(explicit)微分方程. (21.1)式称为**隐式**

(implicit)微分方程.

定义 21.1.2 微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数，称为微分方程的**阶**(order). 方程(21.1)、(21.2)都是 n 阶微分方程.

当微分方程能化作对其所有导数的有理整式时，其中最高阶导数的方次，称为微分方程的**次**(degree).

例 1 $y''' + (y')^4 + 3y^6 + \sin x = 0$ 是三阶一次方程.

例 2 $(y'')^{\frac{2}{3}} = 1 + y'^2$ 将方程有理化后，成为 $(y'')^2 = (1 + y'^2)^3$，这是二阶二次微分方程.

21.2 微分方程的解

定义 21.2.1 能使微分方程变成恒等式的函数，称为微分方程的**解**(solution). 解的图形称为该方程的**积分曲线**(integral curve). 解的隐式表达式称为微分方程的**积分**(integral). 微分方程的求解方法也可称为微分方程的积分法.

微分方程的解，如其所含有的彼此独立的任意常数的个数恰好与微分方程的阶数相等时，则称这种解为方程的**通解**(general solution)(或一般解，稳式表达式称为通积分). 例如 n 阶微分方程的通解表达式中含有 n 个独立的任意常数，即 $y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为 n 个独立的任意常数.

微分方程的每一个确定的解，称为**特解**(particular solution).

定义 21.2.2 为了确定微分方程的一个特解，通常要给出这个解所必须满足的某种给定的条件，这样的条件称为**定解条件**. 求微分方程满足定解条件的解，就是所谓的定解问题. 若定解条件是在自变量的某个值处给出函数值及若干个适当阶数的导数值，这种定解条件称为**初始条件**，这样的定解问题称为**初值问题**(initial value problem)或 **Cauchy 问题**. 若定解条件是在自变量的一个以上的值处给出适当个数的附加条件，这种定解条件称为**边界条件**.

这样的定解问题称为**边值问题**(boundary value problem).

例 21.2.3 求微分方程 $y''+p(x)y'+g(x)y=f(x)$

(1) 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0$ 的解的问题是初值问题,其中 x_0,y_0,y'_0 为已知的常数值.

(2) 满足边界条件 $\alpha_{11}y(x_0)+\alpha_{12}y'(x_0)+\beta_{11}y(x_1)+\beta_{12}y'(x_1)=\gamma_1,\alpha_{21}y(x_0)+\alpha_{22}y'(x_0)+\beta_{21}y(x_1)+\beta_{22}y'(x_1)=\gamma_2$ 的解的问题是边值问题. 其中 $x_i,\gamma_i,\alpha_{ij},\beta_{ij}(i,j=1,2)$ 为已知的常数值.

22 一阶微分方程

22.1 可积类型及其解法要点

导数已解出的类型(显式微分方程)(表中 c 为任意常数,a_i,b_i,c_i 为常数)见表 22.1.

表 22.1

方程类型	解法要点
变量可分离方程(separable equations) $f_1(x)g_1(y)\mathrm{d}x+f_2(x)g_2(y)\mathrm{d}y=0$	把变量分离,两边同除以 $g_1(y)f_2(x)$,再分别积分 $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\mathrm{d}y=c$
能化为变量可分离型的方程 (1) 齐次方程(homogeneous equations) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F\left(\frac{y}{x}\right),F\left(\frac{y}{x}\right)\neq\frac{y}{x}$ $\left(F\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y}{x}\right.$时,方程为变量可分离型$\left.\right)$	作变换:$\frac{y}{x}=u$,即 $y=xu$ 原方程化为 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=F(u)-u$ 分离变量后积分得 $\ln x=\int\frac{\mathrm{d}u}{F(u)-u}+\ln c$ 或 $x=c\exp\left(\int\frac{\mathrm{d}u}{F(u)-u}\right)$, $u=\frac{y}{x}$.
(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$	作变换:$u=ax+by+c$ 方程化为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u)$

续表

方程类型	解法要点
(3) $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 设 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 及 c_1,c_2 不全为 0. (c_1,c_2 全为 0 时为齐次方程. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 时为(2)中类型)	作变换：$\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ 式中 α,β 满足方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ 原方程化为齐次方程： $\frac{dY}{dX}=F\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$ 或 $\frac{dY}{dX}=F\left(\frac{a_1+b_1Y/X}{a_2+b_2Y/X}\right)=G\left(\frac{Y}{X}\right)$
线性方程(linear equations) $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 当 $q(x)\equiv 0$ 时，称为线性齐次方程 (linear homogeneous equation) 当 $q(x)\not\equiv 0$ 时，称为线性非齐次方程 (linear nonhomogeneous equations)	线性非齐次方程的解法为：先求出其对应的线性齐次方程的通解 $y=C\exp\left(-\int p(x)dx\right)$， 再用 24.3 节的参数变易法， 令 $y=C(x)\exp\left(-\int p(x)dx\right)$ 代入线性非齐次方程，求得 $C(x)=\int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx+C$ 方程的通解为 $y(x)=\exp\left(-\int p(x)dx\right)\cdot\left[\int q(x)\exp\left(\int p(x)dx\right)dx+C\right]$
能化为线性方程型的方程 (1) Bernoulli 方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n\ (n\neq 1)$	作变换：$z=y^{1-n}$ 原方程化为 $\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$

续表

方程类型	解法要点
(2) Riccati(里卡蒂)方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^2=r(x)$ 式中 $q(x)\neq 0$, $r(x)\neq 0$	若已知方程有一个特解 $y=y_1(x)$ (1) 作变换:$y=y_1(x)+z$ 原方程化为 Bernoulli 方程 $\frac{dz}{dx}+[p(x)+2q(x)y_1]z+q(x)z^2=0$ (2) 作变换:$y=y_1(x)+\frac{1}{z}$ 原方程化为线性方程 $\frac{dz}{dx}-[p(x)+2q(x)y_1]z=q(x)$
全(恰当)微分方程(exact equation) $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 式中 M,N 满足条件 $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$	方程可写成 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)=0$ 式中 $du(x,y)$ 是全微分. 求解的一般方法为 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=c$ 在简单情况下,用观察法求 $u(x,y)$
含积分因子的方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 式中$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$,但存在 $\mu(x,y)\neq 0$, 满足条件 $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$. $\mu(x,y)$称为原方程的积分因子.	找出积分因子(integrating factors),再按全微分方程求解. 找积分因子的方法见积分因子的求法

方法 22.1.1　解全微分方程的观察法　判断方程是全微分方程后,可采用重新"分项组合"的办法凑成全微分. 为此,要熟悉一些简单二元函数的全微分.

例 22.1.2　求 $xdx+ydy+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$ 的解.

解 $M(x,y)=x-\dfrac{y}{x^2}, N(x,y)=y+\dfrac{1}{x}$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

原方程可写成

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)+\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0,$$

通解为

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{y}{x}=c.$$

例 22.1.3 求$(\cos y+y\cos x)\mathrm{d}x+(\sin x-x\sin y)\mathrm{d}y=0$的解.

解 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-\sin y+\cos x=\dfrac{\partial N}{\partial x}$,分项组合为

$$(\cos y\,\mathrm{d}x-x\sin y\,\mathrm{d}y)+(y\cos x\,\mathrm{d}x+\sin x\,\mathrm{d}y)=0,$$

即 $\mathrm{d}(x\cos y)+\mathrm{d}(y\sin x)=0$,通解为

$$x\cos y+y\sin x=C.$$

方法 22.1.4 积分因子的求法 在导数已解出的显式方程中,变量可分离方程和全微分方程是用初等解法求解的基础,其他类型的方程均借助于两种基本方法.

(1) 变量变换法 根据方程的特点,引进适当的变换,把方程化为可解的类型;

(2) 求积分因子法 把方程化为全微分方程求解.

对一个微分方程,其积分因子并不惟一. 如方程 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$,有如下的积分因子:$\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{1}{xy}$, $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\dfrac{1}{x^2-y^2}$ 等,因为

$$-\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right),\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right),\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right).$$

在简单情况下可用观察法，将方程各项重新组合，考察每组的积分因子，在这些积分因子中有可能选出共同的，作为方程的积分因子.

例 22.1.5 求 $y\mathrm{d}x+(x-3x^3y^2)\mathrm{d}y=0$ 的解.

解 将方程写为

$$(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-3x^3y^2\mathrm{d}y=0.$$

观察出积分因子为 $\frac{1}{(xy)^3}$，故

$$\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{(xy)^3}-\frac{3\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}\left[\frac{-1}{2(xy)^2}\right]-3\mathrm{d}(\ln y)=0,$$

通解为

$$\frac{1}{2(xy)^2}+3\ln y=c.$$

在一般情况下，根据积分因子 $\mu(x,y)$ 应满足的充要条件：$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$，即解一阶偏微分方程

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu.$$

求出 $\mu(x,y)$. 在某些特殊情况下，该式的特解如表 22.2.

表 22.2 若干特殊情况下积分因子 μ 的形式

条件	积分因子	条件	积分因子
$xM\pm yN=0$	$\frac{1}{xM\mp yN}$	$-y^2\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(yM+xN)}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$	$\mathrm{e}^{\int\varphi(z)\mathrm{d}z}$, $z=\frac{x}{y}$
$xM+yN\neq0$ M,N 是同次齐次式	$\frac{1}{xM+yN}$	$nxM-myN+xy\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ $=0$ 满足上式的 m,n 存在时	x^my^n
$xM-yN\neq0$ $M=yM_1(xy)$, $N=xN_1(xy)$	$\frac{1}{xM-yN}$		

续表

条　　件	积分因子	条　　件	积分因子
$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(x)$	$e^{\int f(x)dx}$		
$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\varphi(y)$	$e^{\int \varphi(y)dy}$	(m,n 为常数,在解法过程中用比较系数法确定)	
$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\cdot f(x)-M\cdot\varphi(y)$	$e^{\int f(x)dx+\int\varphi(y)dy}$		
$\mp\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(M\mp N)}=\varphi(x\pm y)$	$e^{\int\varphi(z)dz}, z=x\pm y$	$\begin{cases}\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}\\ \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial N}{\partial x}\end{cases}$	$\frac{1}{M^2+N^2}$
$\mp\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(yM\mp xN)}=\varphi(x^2\pm y^2)$	$e^{\int\varphi(z)dz}, z=x^2\pm y^2$		
$-\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(xM-yN)}=\varphi(xy)$	$e^{\int\varphi(z)dz}, z=xy$	即 $M+iN$ 在使微分方程满足的单连通域内是 $x+iy$ 的解析函数.	
$x^2\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{(yM+xN)}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	$e^{\int\varphi(z)dy}, z=\frac{y}{x}$		

方法 22.1.6　导数未解出的方程(隐式方程)的最简类型和解法　一阶隐式微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$. 若能就 y' 解出 $y'=f(x,y)$,则可依 $f(x,y)$ 的具体形状选择表 22.1 介绍的方法求解,否则解这类方程宜采用引进参数的方法使方程化为某种显式的一阶方程的形式,然后求解. 隐式方程的几种最简类型及其解法要点如表 22.3.

表 22.3

方程类型	解法要点
能就 y 解出的方程 $y=F(x,y')$	引进参数 $p=\frac{dy}{dx}$，方程化为 $y=F(x,p)$. 把方程两端对 x 求导得： $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ 或 $\left(p-\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx}$ 若能求出通解为 $p=\varphi(x,c)$ 或 $x=\psi(p,c)$ 则原方程的通解为 $y=F(x,\varphi(x,c))$ 或 $\begin{cases}x=\psi(p,c)\\y=F(\psi(p,c),c)\end{cases}$ 通解的参数表示式
(1) Lagrange 方程 $y=xf_1(y')+f_2(y')$ f_1,f_2 为已知可微函数	化为 x 的线性方程 $\frac{dx}{dp}-\frac{f_1'(p)}{p-f_1(p)}x=\frac{f_2'(p)}{p-f_1(p)}$ 然后按表 22.2 中不显含未知函数 y 的方程的类型求解
(2) Clairaut(克莱罗)方程 $y=xp+f(p)$ 其中 $p=\frac{dy}{dx}$，f 为已知可微函数	化为 $\frac{dp}{dx}(x+f'(p))=0$ 令 $\frac{dp}{dx}=0$，得 $p=c$，原方程通解为 $y=cx+f(c)$. (这类方程可能有奇解(定义 22.3.2))
能就 x 解出的方程 $x=F(y,y')$	引进参数 $p=\frac{dy}{dx}$，方程化为 $x=F(y,p)$. 把方程两端对 x 求导，利用 $y''=p\frac{dp}{dy}$ 得 $\left(p\frac{\partial F}{\partial y}-1\right)dy+p\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)dp=0$ 若能求出通解为 $p=\varphi(y,c)$ 或 $y=\psi(p,c)$ 则原方程的通解为 $x=F(y,\varphi(y,c))$ 或 $\begin{cases}x=F(\psi(p,c),p)\\y=\psi(p,c)\end{cases}$

续表

方程类型	解法要点
不显含未知函数 y 的方程 $F(x,y')=0$	引进参数 t,以方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$ 代替原方程.通解的参数表示式为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\int \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+c \end{cases}$
不显含自变量 x 的方程 $F(y,y')=0$	引进参数 t,化原方程为 $\begin{cases} y=\varphi(t) \\ y'=\psi(t) \end{cases}$ 通解的参数表达式为 $\begin{cases} x=\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+c \\ y=\varphi(t) \end{cases}$

注　表中的 c 为任意常数.

22.2　一阶微分方程的一些基本定理

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$,如果在所考虑的区域上 $\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$,根据隐函数存在定理可解出 y',得 $y'=f(x,y)$.

定理 22.2.1　解的存在定理　给定一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$$

及初始值 (x_0,y_0). 设 $f(x,y)$ 在闭区域 R:

$$|x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b,\qquad a>0,\ b>0$$

上连续,则上述方程在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上至少存在一个解,且满足 $y(x_0)=y_0$. 其中 $h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$,$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

定理 22.2.2 解的存在惟一性定理 如果 $f(x,y)$ 除满足定理 22.2.1 中的条件外，在 R 上关于 y 还满足 Lipschitz 条件（简称李氏条件）：

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,$$

其中 $L>0$ 称为 Lipschitz 常数（简称李氏常数），y_1,y_2 为 R 内的任意两个值，则方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上满足初始值 $y(x_0)=y_0$ 的解是惟一的.

由于李氏条件比较难于检验，常用 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 R 上连续代替.

定理 22.2.3 解的延拓定理 若方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 的右端函数 $f(x,y)$ 在有界区域 R 内连续，且在 R 内满足李氏条件，则方程过 R 内任何一点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，直至点 $(x,\varphi(x))$ 任意接近区域 R 的边界.

若 R 是无界区域，则过点 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$，以向 x 增大的一方的延拓来说，有两种可能：(1) 解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0,+\infty)$；(2) 解可以延拓到区间 $[x_0,m)$，m 为有限数. 则当 $x\to m$ 时，$y=\varphi(x)$ 或者无界，或者点 $(x,\varphi(x))$ 趋于区域 R 的边界.

定理 22.2.4 解对初值的连续性和可微性定理 若方程 $y'=f(x,y)$ 的右端函数 $f(x,y)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在区域 R 内连续，则方程的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数在它的存在范围内是连续可微的.

定理 22.2.5 解对参数的连续依赖性 若方程 $y'=f(x,y,\mu)$（其中 μ 为参数）的右端 $f(x,y,\mu)$ 在域

$$|x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b,\quad \mu_0\leqslant\mu\leqslant\mu_1,\quad a>0,\quad b>0$$

上连续，且满足李氏条件，李氏常数 L 不依赖于参数 μ，则方程 $y'=f(x,y,\mu)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解连续地依赖于 μ.

22.3 奇解及其解法

定义 22.3.1 设给定单参数曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$,其中 c 是参数,$\Phi(x,y,c)$是 x,y,c 的连续可微函数.曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 的**包络**(envelope)是指这样的曲线,它本身并不包含在曲线族中,但过这曲线的每一点,有曲线族中的一条曲线和它在这点相切.

定义 22.3.2 $F(x,y,y')=0$ 的一族积分曲线(通解)的包络,称为该微分方程的**奇解**(singular solution).奇解是方程的解,同时过奇解上的每一点至少还有方程的另一个解存在,即在奇解上的每一点,解的惟一性都不成立.

定义 22.3.3 c-判别曲线法 设 $F(x,y,y')=0$ 的通解为 $\Phi(x,y,c)=0$,其中c 是任意常数,把 c 看成参数.由下列方程组

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=0\end{cases}$$

消去 c 而得到的曲线,称为曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 的 **c-判别曲线**.其中包含有曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 的包络,但还有其他曲线.c-判别曲线中究竟哪一条是包络尚需实际检验.

例 22.3.4 求 $y=xy'-y'^2$(Clairaut 方程)的奇解.

解 由表 22.3 可知其通解为 $y=cx-c^2$.由方程组

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=y-cx+c^2=0,\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=-x+2c=0\end{cases}$$

消去 c,得 c-判别曲线为 $y=\dfrac{x^2}{4}$,代入微分方程知 $y=\dfrac{x^2}{4}$是解,故为奇解.

例 22.3.5 求 $x-y=\dfrac{4}{9}y'^2-\dfrac{8}{27}y'^3$ 的通解和奇解.

解 把方程写成就 y 解出的类型

$$y = x - \frac{4}{9}y'^2 + \frac{8}{27}y'^3.$$

由表 22.3 得方程的通解为

$$\Phi(x,y,c) = (y+c)^2 - (x+c)^3 = 0.$$

由方程组

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c) = (y+c)^2 - (x+c)^3 = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c} = 2(y+c) - 3(x+c)^2 = 0\end{cases}$$

中消去 c,得 c-判别曲线 $y=x$ 和 $x-y=\frac{4}{27}$. 将它们分别代入原微分方程,可知 $y=x$ 不是解,所以不是奇解,$x-y=\frac{4}{27}$是奇解.

定义 22.3.6 p-判别曲线法 由解的存在惟一性定理知道,如果 $F(x,y,y')$关于 x,y,y'连续可微,则只要$\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$ 就能保证解的惟一性. 因此,奇解(存在的话)必须同时满足下列方程组

$$\begin{cases}F(x,y,p) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = 0,\end{cases}$$

其中 $p=y'$. 消去 p 后得到的曲线称为 **p-判别曲线**. p-判别曲线是否为奇解,也要实际检验.

例 22.3.7 求 $y'^2+y^2-1=0$ 的奇解.

解 从

$$\begin{cases}F(x,y,p) = p^2 + y^2 - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = 2p = 0\end{cases}$$

中消去 p,得 p-判别曲线 $y^2=1$,即 $y=\pm 1$. 代入原微分方程知 $y=\pm 1$ 都是奇解.

例 22.3.8 求 $y=2xy'-y'^2$ 的奇解.

解 从

$$\begin{cases}F(x,y,p) = y - 2xp - p^2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial p} = -2x - 2p = 0\end{cases}$$

中消去 p,得到 p-判别曲线 $y=x^2$,但 $y=x^2$ 不是方程的解,故此方程没有奇解.

22.4 一阶微分方程的几何意义

定义 22.4.1 平面域 R 上的每一点,按照一定的规律对应着一个确定的方向,则称 R 为一个方向场.

一阶微分方程的几何意义 一阶微分方程 $y'=f(x,y)$ 中的 $f(x,y)$ 定义在某个域 R 上.在域 R 内每一点 (x,y) 处,都画上一个以该点处的 $f(x,y)$ 的值为斜率的线段,则得到一方向场,称为由方程 $y'=f(x,y)$ 所确定的方向场(即微分方程的几何意义).

求微分方程的解的问题,就是求这样的一条曲线,它在每点处的切线方向与微分方程所确定的方向场重合.

定义 22.4.2 平面上给定一族曲线 $\varphi(x,y,c)=0$.如果平面上存在另一族曲线,它的每一条曲线与上述曲线族中的每条曲线正交(即在不同族中的曲线的交点处的切线互相垂直),则称此曲线族为已给曲线族的**正交轨线族**.

方法 22.4.3 正交轨线的求法 先建立已知曲线族所满足的微分方程,设为 $F(x,y,y')=0$.然后根据此方程导出正交轨线所满足的微分方程 $F\left(x,y,-\dfrac{1}{y'}\right)=0$.解此微分方程,便得到所要求的正交轨线族.

例 22.4.4 求抛物线族 $y=cx^2$ 的正交轨线(c 为任意常数).

解 先求 $y=cx^2$ 所满足的微分方程.由

$$\begin{cases} y = cx^2, \\ y' = 2cx \end{cases}$$

消去 c,得抛物线族所满足的微分方程为

$$y' = 2\frac{y}{x}.$$

将上式中的 y'换成 $-\frac{1}{y'}$,得正交轨线族应满足的微分方程

$$x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0.$$

解此方程得正交轨线族表示式为

$$\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

其图形为一族椭圆曲线,如图 22.1 所示.

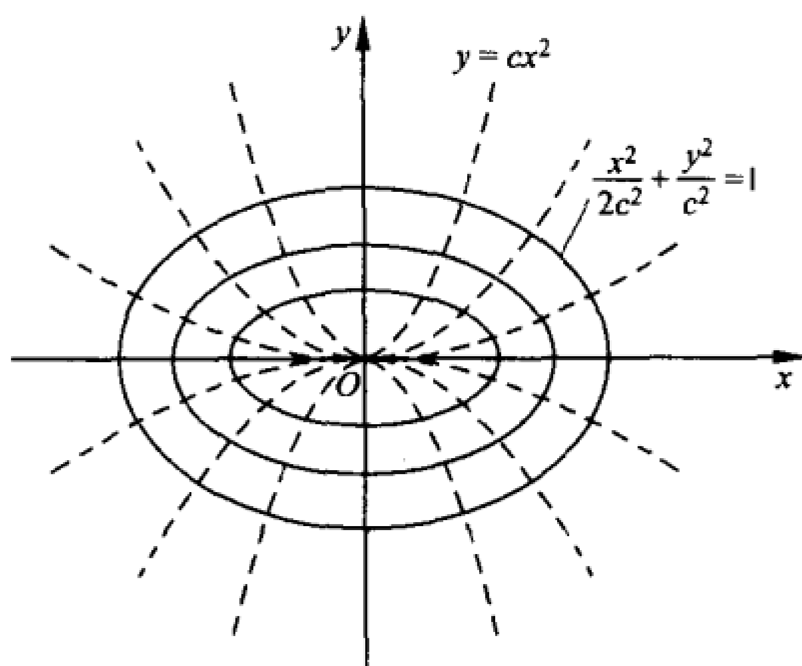


图 22.1　正交轨线

在极坐标情况下,微分方程 $F\left(\rho,\theta,\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\right)=0$ 的积分曲线族的正交轨线族应满足下面的微分方程

$$F\left(\rho,\theta,-\rho^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\rho}\right)=0.$$

例 22.4.5　求心脏线族 $\rho=c(1+\sin\theta)$的正交轨线.

解　由

$$\begin{cases} \rho = c(1 + \sin\theta), \\ \dfrac{d\rho}{d\theta} = c\cos\theta \end{cases}$$

消去 c，得心脏线族应满足的方程为

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\rho\cos\theta}{1 + \sin\theta}.$$

以 $-\rho^2 \dfrac{d\theta}{d\rho}$ 代替上述方程中的 $\dfrac{d\rho}{d\theta}$，得正交轨线所满足的微分方程为

$$-\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\cos\theta}{\rho(1 + \sin\theta)}.$$

解此方程，得正交轨线族为

$$\rho = c(1 - \sin\theta).$$

23 高阶微分方程及微分方程组

23.1 高阶微分方程

定理 23.1.1 解的存在惟一性定理 n 阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$

在初始值$(x_0, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)})$的邻域,方程右端的函数 f 对它的所有变元 $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 是连续的,且对所有变元 f 都有一阶有界偏导数,则 n 阶微分方程存在惟一解,满足初始条件 $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

解法 23.1.2 高阶微分方程没有普遍的解法,处理问题的基本原则是降阶法.利用变换把高阶方程的求解问题化为较低阶的方程来求解.

方程

$$y^{(n)} = f(x) \tag{23.1}$$

通过 n 次积分后得到通解

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x}}_{n\text{个}} f(x)(\mathrm{d}x)^n + c_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + c_{n-1}(x - x_0) + c_n.$$

利用 Cauchy 积分:

$$\int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} f(x)(\mathrm{d}x)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x - \xi)^{n-1} f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

通解可写成

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{n-1}f(\xi)\mathrm{d}\xi+c_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$+c_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)+c_n.$$

解法 23.1.3 方程

$$F(x,y^{(n)})=0 \tag{23.2}$$

的解法

(1) 若能就 $y^{(n)}$ 解出，则化为(23.1)型求解.

(2) 若不能就 $y^{(n)}$ 解出，或解出后表达式太复杂，可试求其参数形式的解. 设方程可写成等价的参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y^{(n)}=\psi(t),\end{cases}$$

即 $F(\varphi(t),\psi(t))\equiv 0$. 由于 $\mathrm{d}y^{(n-1)}=y^{(n)}\mathrm{d}x=\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$，积分得

$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+c_1=\psi_1(t,c_1).$$

又由

$$\mathrm{d}y^{(n-2)}=y^{(n-1)}\mathrm{d}x=\psi_1(t,c_1)\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

积分得

$$y^{(n-2)}=\int\psi_1(t,c_1)\varphi'(t)\mathrm{d}t+c_2=\psi_2(t,c_1,c_2).$$

继续按此做下去，最后可得解的参数表示式为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi_n(t,c_1,c_2,\cdots,c_n),\end{cases}$$

其中 t 为参数，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数.

解法 23.1.4 方程

$$F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0 \tag{23.3}$$

的解法.

(1) 若可就 $y^{(n)}$ 解出为 $y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$. 作变换 $z=y^{(n-1)}$，方程化为一阶方程

$$z'=f(z).$$

分离变量后，积分得

$$x=\int\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}+c_1.$$

① 从中解出 $z=\varphi(x,c_1)$，即 $y^{(n-1)}=\varphi(x,c_1)$，再按(23.1)型求解；

② 不能解出 z 或解出 z 的表示式较复杂，把方程写成等价的参数方程

$$\begin{cases}x=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}+c_1,\\ y^{(n-1)}=z.\end{cases}$$

然后按方程(23.2)中(2)求解.

(2) 不能就 $y^{(n)}$ 解出，可化为等价的参数方程，

$$\begin{cases}y^{(n)}=\varphi(t),\\ y^{(n-1)}=\psi(t),\end{cases}$$

即 $F(\psi(t),\varphi(t))\equiv 0$. 由于 $\mathrm{d}y^{(n-1)}=y^{(n)}\mathrm{d}x$，则

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y^{(n-1)}}{y^{(n)}}=\frac{\psi'(t)\mathrm{d}t}{\varphi(t)}.$$

积分，得 $x=\displaystyle\int\frac{\psi'(t)\mathrm{d}t}{\varphi(t)}+c_1$. 然后依次积分得

$$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}\mathrm{d}x=\int\psi(t)\cdot\frac{\psi'(t)}{\varphi(t)}\mathrm{d}t+c_2,$$

$$\vdots$$

$$y=\int y'\mathrm{d}x+c_n=\omega(t,c_1,c_2,\cdots,c_n).$$

所求的通解的参数表示式为

$$\begin{cases} x = \int \frac{\psi'(t)}{\varphi(t)} dt + c_1, \\ y = \omega(t, c_2, c_3, \cdots, c_n). \end{cases}$$

例 23.1.5 求解 $ay'' = (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$.

解 方法 1 令 $y' = z$,方程化为一阶方程

$$az' = (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

分离变量后求解得

$$\frac{z}{\sqrt{1 + z^n}} = \frac{1}{a}(x - c_1),$$

解出 $z = \pm \dfrac{x - c_1}{\sqrt{a^2 - (x - c_1)^2}} = y'$. 积分得

$y = \pm \sqrt{a^2 - (x - c_1)^2} + c_2$ 或 $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = a^2$.

方法 2 化为等价的参数方程

$$\begin{cases} y' = \tan t, \\ y'' = \frac{1}{a} \sec^3 t. \end{cases}$$

由 $dx = \dfrac{dy'}{y''} = a \cos t \, dt$,积分得 $x = a\sin t + c_1$. 又由 $dy = y' dx$,积分得

$$y = -a\cos t + c_2.$$

通解的参数表示式为

$$\begin{cases} x = a\sin t + c_1, \\ y = -a\cos t + c_2 \end{cases}$$

或消去 t 得

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = a^2.$$

解法 23.1.6 方程

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0 \tag{23.4}$$

的解法.

(1) 能就 $y^{(n)}$ 解出，得

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)}),$$

令 $z=y^{(n-2)}$，上式化为

$$z'' = f(z),$$

两端同乘以 $2z'\mathrm{d}x$，得

$$2z'z''\mathrm{d}x = 2z'f(z)\mathrm{d}x,$$

即 $\mathrm{d}(z')^2=2f(z)\mathrm{d}z$. 积分并经整理后得

$$z' = \pm\sqrt{2\int f(z)\mathrm{d}z + c_1}\ .$$

分离变量，并积分得

$$\pm\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\int f(z)\mathrm{d}z + c_1}} = x + c_2.$$

将 $z=y^{(n-2)}$ 代入，则得(23.2)型方程，求解得

$$\varphi(x, y^{(n-2)}, c_1, c_2) = 0.$$

(2) 不能就 $y^{(n)}$ 解出，把方程化为等价的参数方程

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t), \\ y^{(n-2)} = \psi(t), \end{cases}$$

即 $F(\psi(t),\varphi(t))\equiv 0$. 由

$$\mathrm{d}y^{(n-1)}=y^{(n-2)}\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}y^{(n-2)}=y^{(n-1)}\mathrm{d}x,$$

故

$$y^{(n-1)}\mathrm{d}y^{(n-1)} = y^{(n)}\cdot y^{(n-1)}\mathrm{d}x = y^{(n)}\mathrm{d}y^{(n-2)} = \varphi(t)\psi'(t)\mathrm{d}t,$$

积分后，整理得

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int\varphi(t)\psi'(t)\mathrm{d}t + c_1} = \psi_1(t, c_1),$$

于是化为(23.3)型方程，求解得

$$\begin{cases} y^{(n-1)} = \psi_1(t, c), \\ y^{(n-2)} = \psi(t). \end{cases}$$

解法 23.1.7 方程

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0 \tag{23.5}$$

的解法.

令 $y^{(k)}=z$,原方程降为 $n-k$ 阶方程

$$F(x,z,z',\cdots,z^{(n-k)})=0.$$

(1) 若可求得此方程的显式通解 $z=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$再经过 k 次积分,便可求得原方程的通解.

(2) 若可求得降阶后方程的隐式通解

$$\varphi(x,z,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})=0.$$

将 $z=y^{(k)}$ 代入,即为(23.2)型方程.

解法 23.1.8 方程

$$F(y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{23.6}$$

的解法.

令 $y'=p$,方程可化为 p 的 $n-1$ 阶方程

$$F_1\left(y,p,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right)=0.$$

若能求出其通解为 $\varphi_1(y,p,c_1,\cdots,c_{n-1})=0$,即

$$\varphi_1(y,y',c_1,\cdots,c_{n-1})=0$$

为一阶方程,再通过一次求积,可求出通解 $\varphi(x,y,c_1,c_2,\cdots,c_n)=0$.

解法 23.1.9 全微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=0. \tag{23.7}$$

方程可降低一阶,得到

$$\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=c.$$

解法 23.1.10 广义齐次方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{23.8}$$

左端满足性质:$F(x,ky,ky',\cdots,ky^{(n)})=k^pF(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$,用变换 $y=\mathrm{e}^{\int z\mathrm{d}x}$,可将方程降低一阶,为

$$e^{p\int z\mathrm{d}x} f(x,z,z',\cdots,z^{(n-1)})=0,$$

约去 $e^{p\int z\mathrm{d}x}$，得

$$f(x,z,z',\cdots,z^{(n-1)})=0.$$

设其通解为

$$z=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})=\frac{y'}{y},$$

积分得原方程的通解为

$$y=c_n e^{\int \varphi(x,c_1,\cdots,c_{n-1})\mathrm{d}x}.$$

23.2 微分方程组

定义 23.2.1 形如下式的联立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=f_1(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=f_2(t,x_1,x_2,\cdots,x_n),\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=f_n(t,x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{cases}\tag{23.9}$$

称为 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的**一阶微分方程组**.用向量表示，记为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),\tag{23.10}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})=(f_1(t,\boldsymbol{x}),f_2(t,\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(t,\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}.$$

定义 23.2.2 在区间 $a<t<b$ 上定义的 n 个连续可微函数 $x_1=\varphi_1(t),x_2=\varphi_2(t),\cdots,x_n=\varphi_n(t)$，如果将这 n 个函数代入方程组(23.9)后，使方程均变为恒等式，亦即对$t\in(a,b)$，恒成立

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \equiv \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}),$$

则称这 n 个函数为微分方程组(23.9)或(23.10)的一组解,其中 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$.

定义 23.2.3 求一阶微分方程组满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)^{\mathrm{T}}$ 的解的问题,称为一阶微分方程组的**初值问题**(Cauchy 问题). t_0 称为自变量的初值, $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ 称为未知函数的初值, $(t_0, x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 属于某个区域 G.

定义 23.2.4 设向量函数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是关于 t 的连续可微函数,而且满足下列条件:

(1) 对一切 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的值(或至少是对某区域内的一切 $c_1, \cdots, c_n$ 值)向量函数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, c_1, \cdots, c_n)$ 都是方程组(23.10)的解;

(2) 通过适当选取 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的值,能使得向量函数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, c_1, \cdots, c_n)$ 中相应的解满足预先任意给定的初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. 其中 $(t, \boldsymbol{x}^0)$ 属于某个区域 G.

则称向量函数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(t, c_1, \cdots, c_n)$ 为方程组(23.10)在区域 G 内的**通解**.

定义 23.2.5 当微分方程组通解中所有任意常数都给予确定的值而得到的一组解,称为微分方程组的**特解**.

定理 23.2.6 解的存在惟一性定理 设方程组(23.10)的右端函数 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 内连续,而且所有的偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 都有界,则对任一 $(t_0, \boldsymbol{x}^0) \in D$,方程组存在惟一的一组解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$,满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$,而且此解都能向左右延展至 D 的边界.

方法 23.2.7 高阶微分方程和微分方程组的互化

(1) n 阶微分方程

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}) \tag{23.11}$$

可以化成一个与其等价的一阶微分方程组. 引入 n 个新的未知函数：$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \cdots, x_n = y^{(n-1)}$，则 n 阶微分方程化为一阶方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}). \end{cases} \tag{23.12}$$

设 $y=\varphi(t)$ 是高阶方程(23.11)在 t 的某个区间上的一个解，则函数组 $x_1 = \varphi(t), x_2 = \varphi(t), \cdots, x_n = \varphi^{(n-1)}(t)$ 显然是方程组(23.13)在该区间上的解.

反之，设 $x_1 = \psi_1(t), x_2 = \psi_2(t), \cdots, x_n = \psi_n(t)$ 是方程组(23.12)在某个区间上的解，则函数 $y = \psi_1(t)$ 就是高阶方程(23.11)在该区间上的解.

(2) 一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

在许多情况下也可以化为一个等价的高阶微分方程. 以两个一阶微分方程组为例

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2), & (23.13) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2). & (23.14) \end{cases}$$

将方程(23.13)对 t 求导，得

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1(t, x_1, x_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2(t, x_1, x_2) \\ &\xlongequal{\text{记作}} F(t, x_1, x_2). \end{aligned} \tag{23.15}$$

再从方程(23.14)解出 $x_2 = x_2(t, x_1, \dot{x}_1)$，将其代入(23.15)式，消

去 x_2，得到 x_1 的二阶微分方程

$$\ddot{x}_1 = \Phi(t, x_1, \dot{x}_1).$$

右端函数 $\Phi(t, x_1, \dot{x}_1)$ 是由 f_1, f_2 所确定的，是已知的. 所以把方程组化为二阶微分方程.

解法 23.2.8 微分方程组的消元解法 根据高阶微分方程和微分方程组的互化，用消元的办法将方程组化为某一个未知函数的高阶方程来求解，然后再求出其他未知函数.

例 求 $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \dfrac{y^2}{x} \end{cases}$ 的通解.

解 第一式对 t 求导，得 $\ddot{x} = \dot{y}$. 将方程组的第二式及第一式先后代入上式，消去 $y, \dot{y}$ 得

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2}{x},$$

化成 $\dfrac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \dfrac{\dot{x}}{x}$，解得

$$x = c_2 e^{c_1 t}.$$

由方程组的第一式求得 $y = c_1 c_2 e^{c_1 t}$，所以通解为

$$x = c_2 e^{c_1 t}, \qquad y = c_1 c_2 e^{c_1 t}.$$

定义 23.2.9 设 $\Phi(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在区域 D 中连续，且有连续的一阶偏导数. 若把方程组(23.10)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

的任一组解 $x_i = \varphi_i(t)\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 代入 Φ，使

$$\Phi(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \equiv c\text{(常数)},$$

则称关系式 $\Phi(t, x_1, \cdots, x_n) = c$ 是方程组(23.10)的一个**初积分**(或首次积分). 有时也称函数 $\Phi(t, x_1, \cdots, x_n)$ 是方程组(23.10)的初积分.

定义 23.2.10 对于 k 个初积分 $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k$，若至少有一

个行列式

$$\frac{D(\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_k)}{D(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\cdots,x_{\alpha_k})}\neq 0,$$

则称它们是**互相独立**的，其中 $x_{\alpha_1},\cdots,x_{\alpha_k}$ 是未知函数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的某 k 个函数.

定理 23.2.11 如果已知方程组(23.10)的 k 个互相独立的初积分，则可将方程组(23.10)的求解问题变为只含 $n-k$ 个方程的方程组的求解.

如果已知方程组(23.10)的 n 个互相独立的初积分 $\Phi_1(t,x_1,\cdots,x_n)=c_1,\Phi_2(t,x_1,\cdots,x_n)=c_2,\cdots,\Phi_n(t,x_1,\cdots,x_n)=c_n$，则由这 n 个初积分所确定的隐函数组，就是方程组(23.10)的通解.

解法 23.2.12 方程组的可积组合解法 将方程组(23.10)的一部分或全部方程进行重新组合，导出已经容易积分的方程，例如形如 $\mathrm{d}\Phi(t,x_1,\cdots,x_n)=0$ 的方程，或者再经变量置换就可以化为只含一个新的未知函数的某一可积分型的方程，这种方法称为可积组合.

每一个可积组合均可得到方程组(23.10)的一个初积分. 根据定理 23.2.11 利用可积组合，将方程组的求解问题，转化成求解一函数组的问题，或者减少微分方程组中未知函数和方程的个数，以便求解.

例 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y, & (23.16)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x, & (23.17)\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=z+3x-y. & (23.18)\end{cases}$$

解 由方程(23.16),(23.17)相加，得一个可积组合

$$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t}=x+y,$$

由此得

$$x+y=\bar{c}_1\mathrm{e}^t.$$

方程(23.16),(23.17)相减,得另一个可积组合

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t}=-(x-y),$$

由此得

$$x-y=\bar{c}_2\mathrm{e}^{-t}.$$

利用得到的这两个关系式求出 x 和 y,得

$$x=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t},\qquad y=c_1\mathrm{e}^t-c_2\mathrm{e}^{-t}.$$

然后将它们代入第三个方程的右端,得到

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=z+2c_1\mathrm{e}^t+4c_2\mathrm{e}^{-t}.$$

这是关于未知函数 z 的一阶线性方程.解出为

$$z=(c_3+2c_1t)\mathrm{e}^t-2c_2\mathrm{e}^{-t}.$$

故原方程组的通解为

$$\begin{cases}x=c_1\mathrm{e}^t+c_2\mathrm{e}^{-t},\\y=c_1\mathrm{e}^t-c_2\mathrm{e}^{-t},\\z=(c_3+2c_1t)\mathrm{e}^t-2c_2\mathrm{e}^{-t},\end{cases}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数.

24 线性微分方程

线性微分方程是一类在理论和应用上都非常重要的方程.许多实际问题常可以由线性方程或简化为线性方程来描述.线性微分方程的一般理论已研究得比较完整,尤其是对常系数线性方程还可以求出它的解的结构形式.线性方程也是研究非线性方程的基础.由于这些原因,线性方程在整个微分方程中占有重要的地位.

24.1 线性微分方程的一般理论

方程

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=F(x), \tag{24.1}$$

未知函数 y 及其各阶导数都是以一次方的形式在方程中出现,这样的方程称为 **n 阶线性微分方程**.其中 $a_0(x)\neq 0, a_1(x),\cdots, a_n(x)$ 及 $F(x)$ 为自变量 x 的已知函数.$a_0(x),\cdots,a_n(x)$ 称为线性微分方程的**系数**(coefficients).

(1) 当 $F(x)\equiv 0$ 时,称为**齐次线性微分方程**(homogeneous linear differential equation).当 $F(x)\neq 0$ 时,称为**非齐次**(nonhomogeneous)**线性微分方程**.

(2) 当 $a_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$ 都是常数时,称为**常系数**线性微分方程.当 $a_j(x)(j=0,1,\cdots,n)$ 不全为常数时,称为**变系数**线性微分方程.

正规形 n 阶线性微分方程　如果方程(24.1)中的系数 $a_0(x)$

在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 的任何一点处都不等于 0，则除以 $a_0(x)$ 后，在此区间上线性方程化为

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x). \qquad (24.2)$$

称为**正规形** n 阶线性微分方程. 简记为

$$L[y] = f(x), \qquad (24.3)$$

其中 $L = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p_n(x)$ 称为线性微分算子(linear differential operator).

定理 24.1.1 解的存在惟一性定理. 如果方程 $L[y]=f(x)$ 中的系数 $p_1(x),\cdots,p_n(x)$ 及 $f(x)$ 都是区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的连续函数，则对于任一 $x_0 \in (a,b)$ 及任意的 $y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}$，线性方程 $L[y]=f(x)$ 存在惟一解 $y=y(x)$，定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上，而且满足初始条件 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

函数的线性相关性 对于定义在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上的一组函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$，如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得恒等式

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \equiv 0 \qquad (24.4)$$

对所有 $x \in [a,b]$ 都成立，则称这组函数在区间 $[a,b]$ 上是**线性相关的**(linear dependent)，否则称为**线性无关的**(linear independent).

例 24.1.2 函数 $1, x, x^2, \cdots, x^n$ 在任何区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上线性无关. 因为恒等式 $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i \equiv 0$ 仅当所有 $c_i = 0 (i = 0,1,\cdots,n)$ 时才成立.

函数 $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}, \cosh x$ 在任何区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上是线性相关的. 因为存在不全为零的常数 $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = -1$ 使恒等式 $c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x} + c_3 \cosh x \equiv 0$ 对所有 $x \in [a,b]$ 都成立.

Wronski(朗斯基)行列式(Wronski determinant)　如果 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 是在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的 n 个 $n-1$ 阶可微的函数,则称行列式

$$W(x)\equiv W[y_1,y_2,\cdots,y_n]\equiv\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{24.5}$$

为函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的 Wronski 行列式.

Wronski 行列式的性质:

(1) 若函数 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上线性相关,则在 $[a,b]$ 上它们的 Wronski 行列式 $W(x)\equiv 0$.

(2) 若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是齐次线性方程 $L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0$ 在区间$[a,b]$上的 n 个解,则由它们所构成的 Wronski 行列式 $W(x)$ 满足一阶方程

$$W'(x)+p_1(x)W(x)=0.$$

故有

$$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}-p_1(\xi)\mathrm{d}\xi},\qquad x_0\in[a,b].$$

(3) 若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是$L[y]=0$的解,则这 n 个解线性无关的充要条件是:由它们所构成的 Wronski 行列式 $W[y_1,y_2,\cdots,y_n]$ 在解的区间上恒不为零.

(4) 若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 $L[y]=0$ 的解,则它们线性相关的充要条件是:由它们所构成的 Wronski 行列式 $W[y_1,\cdots,y_n]$ 在解的区间上恒为零.

齐次线性方程通解的结构　若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是齐次线性方程 $L[y]=0$ 的 n 个线性无关解,则其通解为这 n 个解的线性组合

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x), \tag{24.6}$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$是任意常数. $L[y]=0$的任何n个线性无关的特解,称为此方程的**基本解组**(fundamental set of solutions).

非齐次线性方程通解的结构　非齐次线性方程

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=f(x), \quad (24.7)$$

称

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0$$

为其对应的齐次线性微分方程.

$L[y]=f(x)$的通解是它的一个特解$y^*(x)$与其对应的齐次线性方程$L[y]=0$的通解之和,即通解$y(x)$为

$$y(x)=y^*(x)+c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x),$$

式中$c_1,\cdots,c_n$为任意常数,$y_1(x),\cdots,y_n(x)$为其对应的齐次线性方程的基本解组.

若$y_j(x)$是方程$L[y]=f_j(x)(j=1,2,\cdots,m)$的解,则$y(x)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j y_j(x)$是方程$L[y]=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j f_j(x)$的解,其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$是常数.

$$\begin{aligned}L[y]&=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y\\&=U(x)+\mathrm{i}\,V(x),\end{aligned} \quad (24.8)$$

其中$p_1(x),\cdots,p_n(x)$及$U(x),V(x)$都是实的,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.若此方程有解$y(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$,则解的实部$u(x)$和虚部$v(x)$分别是方程$L[y]=U(x)$和$L[y]=V(x)$的解.

若已知$L[y]=f(x)$的k个特解$y_1(x),\cdots,y_k(x)$,则任意两个解之差是其对应的齐次线性方程$L[y]=0$的解.

齐次线性方程$L[y]=0$在自变量的任何变换$x=\varphi(t)$下,或在未知函数的线性齐次变换$y=a(x)z(x)$(其中$a(x)$为已知函数)下,方程的线性和齐次性都保持不变.

若已知齐次线性方程$L[y]=0$在区间J上的k个线性无关特解$y_1,\cdots,y_k$,则反复使用未知函数的线性齐次变换,可使方程降

为 $n-k$ 阶的方程.具体做法如下：

作变换 $y = y_k\int u(x)\mathrm{d}x$（即 $y = y_k z, z' = u$），使 $L[y] = 0$ 化为 u 的 $n-1$ 阶方程

$$L_1[u] = a_0(x)u^{(n-1)} + a_1(x)u^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(x)u = 0.$$

并且知道 $u_1 = \left(\frac{y_1}{y_k}\right)', u_2 = \left(\frac{y_2}{y_k}\right)', \cdots, u_{k-1} = \left(\frac{y_{k-1}}{y_k}\right)'$ 是 $L_1[u]=0$ 的 $k-1$ 个线性无关解.按上述同样的方法，利用 u 的一个已知解，再将 $L_1[u]=0$ 降低一阶，同时又知道变换后的方程的 $k-2$ 个线性无关解.继续作 k 次变换，就得到 $n-k$ 阶的齐次线性方程.

24.2　常系数齐次线性方程的解法

特征方程与特征根　设常系数齐次线性微分方程

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \qquad (24.9)$$

（其中 $a_1, \cdots, a_n$ 为实常数）具有指数函数形式的解 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$，λ 是待定常数.将其代入方程(24.9)后，得到一个相应的 n 次代数方程

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

称 $P_n(\lambda)=0$ 为微分方程(24.9)的**特征方程**(characteristic equation 或 auxiliary equation).它的 n 个根称为**特征根**(characteristic roots).

常系数齐次线性方程线性无关解的形式　根据特征根的不同情况，列出其对应的线性无关特解，见表 24.1.

例 24.2.1　求下列方程的通解：

(1) $y''-3y'+2=0$；(2) $y^{(4)}+2y''+y=0$.

解　(1) 特征方程为 $\lambda^2-3\lambda^2+2=0$，特征根为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$. 所以方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{2x}$.

表 24.1

特 征 根	对应的线性无关特解
n 个互异的实根 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,n)$	$y_j=e^{\lambda_j x},j=1,2,\cdots,n$
一对共轭复数根 $\lambda=\alpha+i\beta,\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$
λ 为 k 重实根	$y_1=e^{\lambda x},y_2=xe^{\lambda x},\cdots,y_k=x^{k-1}e^{\lambda x}$
k 重共轭复数根 $\lambda=\alpha+i\beta,\quad\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=xe^{\alpha x}\cos\beta x,\cdots,$ $y_k=x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_{k+1}=e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{k+2}=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\cdots,$ $y_{2k}=x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

(2) 特征方程为 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$,特征根为 $\lambda_{1,2}=i$, $\lambda_{3,4}=-i$. 所以通解为 $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$.

24.3 常系数非齐次线性方程的解法

参数变易法(variation of parameters) 这是求非齐次线性方程 $L[y]=f(x)$ 特解的一种普遍的方法.它不仅适用于常系数线性方程,也适用于变系数线性方程.

设相应的齐次线性方程 $L[y]=0$ 的通解是 $y(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k(x)$, 其中 $c_1,\cdots,c_n$ 是任意常数,$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是基本解组.变易任意常数 c_k 为 x 的函数 $c_k(x)$,使 $L[y]=f(x)$ 有一个特解形式为

$$y^*(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k(x)y_k(x),$$

式中 $c_k(x)(k=1,\cdots,n)$是待定函数,它们的导数满足方程组

$$\begin{cases}c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)+\cdots+c_n'(x)y_n(x)=0,\\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)+\cdots+c_n'(x)y_n'(x)=0,\\ \vdots\\ c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x).\end{cases}$$

解出 $c'_1(x),\cdots,c'_n(x)$，然后积分，求得 $c_1(x),\cdots,c_n(x)$，就得到 $L[y]=f(x)$的一个特解.

例 24.3.1 求 $L[y]=y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$的通解.

解 对应的齐次线性方程 $L[y]=0$ 的通解为

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x,$$

利用参数变易法求非齐次线性方程的特解. 令

$$y^*(x)=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x,$$

而 $c_1(x),c_2(x)$由下列方程组确定

$$\begin{cases}c'_1(x)\cos x+c'_2(x)\sin x=0,\\ -c'_1(x)\sin x+c'_2(x)\cos x=\dfrac{1}{\cos x}.\end{cases}$$

解出得

$$c'_1(x)=-\frac{\sin x}{\cos x},\qquad c'_2(x)=1,$$

积分后得

$$c_1(x)=\ln|\cos x|,\qquad c_2(x)=x,$$

所以原方程的通解为

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x.$$

待定系数法 当 $L[y]=f(x)$的右端函数 $f(x)$为一些特殊类型函数，如多项式、指数函数、正弦、余弦函数及这些函数的某种乘积时，仅用代数方法即可求得其特解. 其特解的形式可取与 $f(x)$相同，而表达式中含有待定的系数. 定出这些系数后，就得出特解 $y^*(x)$. 特解形式见表 24.2.

(1) 表中的 m 是正整数，$\alpha,\beta,a_j,b_j(j=1,2,\cdots,m+1)$是已知常数；

(2) $A_j,B_j(j=1,2,\cdots,m+1)$是待定常数；

(3) k 是当 α 为特征根时的重数. 当 α 不是特征根时，取 $k=0$；

表 24.2

右端函数 $f(x)$ 的类型	特解 $y^*(x)$ 的待定表达式
$e^{\alpha x}(a_1x^m+a_2x^{m-1}+\cdots+a_mx+a_{m+1})$	$x^k e^{\alpha x}(A_1x^m+A_2x^{m-1}+\cdots+A_mx+A_{m+1})$
$e^{\alpha x}[(a_1x^{m_1}+a_2x^{m_1-1}+\cdots+a_{m_1}x+a_{m_1+1})\cos\beta x+(b_1x^{m_2}+b_2x^{m_2-1}+\cdots+b_{m_2}x+b_{m_2+1})\sin\beta x]$	$x^k e^{\alpha x}[(A_1x^m+A_2x^{m-1}+\cdots+A_mx+A_{m+1})\cdot\cos\beta x+(B_1x^m+B_2x^{m-1}+\cdots+B_mx+B_{m+1})\sin\beta x]$

(4) 表 24.2 的第 3 行中当 $f(x)$ 的两个多项式的次数不同时，取次数较大者为 m.

例 24.3.2 求 $L[y]=y''+4y'+3y=\cos 2x$ 的通解.

解 **方法 1** 对应的齐次线性方程 $L[y]=0$ 的特征方程 $\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$，有特征根 $\lambda_1=-1,\lambda_2=-3$. 其通解为

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x},$$

其中 c_1,c_2 为任意常数. 由于 $\alpha=0$ 不是特征根，所以 $L[y]=\cos 2x$ 的特解形式取为 $y^*(x)=A_1\cos 2x+B_1\sin 2x$. 代入方程，并比较等式两边的系数，得

$$A_1=-\frac{1}{65},\qquad B_1=\frac{8}{65}.$$

特解为

$$y^*(x)=-\frac{1}{65}\cos 2x+\frac{8}{65}\sin 2x.$$

因此，原方程的通解为

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}-\frac{1}{65}\cos 2x+\frac{8}{65}\sin 2x.$$

方法 2 先求 $y''+4y'+3y=e^{2ix}$ 的特解. 由于 $\alpha=2i$ 不是特征

根，取特解形式为 $y^* = Ae^{2ix}$，将其代入方程，比较系数得 $A=-\frac{1+8i}{65}$，故 $y^*=-\frac{1+8i}{65}e^{2ix}=-\frac{1+8i}{65}(\cos 2x+i\sin 2x)$. 根据(24.8)式，$L[y]=\cos 2x$ 的特解为 y^* 的实部 $-\frac{1}{65}\cos 2x+\frac{8}{65}\sin 2x$，所以 $L[y]=\cos 2x$ 的通解为

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{65}\cos 2x + \frac{8}{65}\sin 2x.$$

例 24.3.3 求 $L[y]=y'''+3y''+3y'+y=e^{-x}(x-5)$ 的通解.

解 对应齐次线性方程 $L[y]=0$ 的特征方程

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 = 0$$

有三重根 $\lambda=-1$. 其通解为 $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}$. 由于 $\alpha=-1$ 是特征根，$L[y]=e^{-x}(x-5)$ 的特解形式取为

$$y^* = x^3 e^{-x}(A_1 x + A_2).$$

代入方程，并比较等式两边的系数，得

$$A_1 = \frac{1}{24}, \qquad A_2 = -\frac{5}{6}.$$

因此特解

$$y^* = \frac{1}{24}x^3 e^{-x}(x-20).$$

故方程的通解为

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-x} + \frac{1}{24}x^3 e^{-x}(x-20).$$

微分算子与逆算子

(1) 微分算子(differential operator) 记 $D=\frac{d}{dx}, D^2=\frac{d^2}{dx^2},\cdots, D^k=\frac{d^k}{dx^k},\cdots$，称 $D, D^2,\cdots,D^k,\cdots$ 为**微分算子**.

n 阶常系数线性微分方程

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

用算子符号可记为

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x).$$

称

$$P(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

为算子多项式.上述线性方程可简记为

$$P(D) y = f(x).$$

(2) 逆算子(inverse operator)　微分算子多项式 $P(D)$ 的逆算子记为$\frac{1}{P(D)}$,它满足条件

$$P(D)\left[\frac{1}{P(D)} f(x)\right] \equiv f(x).$$

$\frac{1}{P(D)} f(x)$的结果不惟一,是一族函数.

算子 D^k 的逆算子记为$\frac{1}{D^k}$,其意义为

$$\frac{1}{D^k} f(x) = \underbrace{\int \cdots \int}_{k\text{ 次}} f(x)(\mathrm{d}x)^k, \qquad k \text{ 为正整数}.$$

微分算子的简单性质及运算公式

(1) $P(D)$为线性算子

$$\begin{aligned} & P(D)[c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)] \\ & = c_1 P(D) f_1(x) + \cdots + c_n P(D) f_n(x), \end{aligned}$$

其中 $c_1, \cdots, c_n$ 为常数.

(2) 算子乘法的交换律　若 $P(D) = P_1(D) P_2(D)$,则

$$P(D) f(x) = P_1(D)[P_2(D) f(x)] = P_2(D)[P_1(D) f(x)].$$

(3) 加法规则　若 $P(D) = P_1(D) + P_2(D)$,则

$$P(D) f(x) = [P_1(D) + P_2(D)] f(x)$$

$$=P_1(D)f(x)+P_2(D)f(x).$$

(4) 分配律

$$P(D)[P_1(D)+P_2(D)]=P(D)P_1(D)+P(D)P_2(D).$$

(5) $P(D)e^{\lambda x}=e^{\lambda x}P(\lambda)$.

(6) $P(D^2)\sin ax=P(-a^2)\sin ax$,

$P(D^2)\cos ax=P(-a^2)\cos ax$.

(7) 位移定理　$P(D)[e^{\lambda x}v(x)]=e^{\lambda x}P(D+\lambda)v(x)$.

逆算子的简单性质及运算公式

(1) 线性性

$$\frac{1}{P(D)}[c_1f_1(x)+\cdots+c_nf_n(x)]$$

$$=c_1\frac{1}{P(D)}f_1(x)+\cdots+c_n\frac{1}{P(D)}f_n(x),$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为常数.

(2) 乘法交换律　若 $P(D)=P_1(D)P_2(D)$,则

$$\frac{1}{P(D)}f(x)=\frac{1}{P_1(D)}\left[\frac{1}{P_2(D)}f(x)\right]$$

$$=\frac{1}{P_2(D)}\left[\frac{1}{P_1(D)}f(x)\right].$$

(3) 当 $P(\lambda)\neq 0$ 时,$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda x}=\frac{e^{\lambda x}}{P(\lambda)}$.

(4) 当 $P(\lambda)=P'(\lambda)=\cdots=P^{(k-1)}(\lambda)=0$,而 $P^{(k)}(\lambda)\neq 0$ 时

$$\frac{1}{P(D)}e^{\lambda x}=\frac{x^ke^{\lambda x}}{P^{(k)}(\lambda)}.$$

(5) 当 $P(-a^2)\neq 0$ 时

$$\frac{1}{P(D^2)}\sin ax=\frac{\sin ax}{P(-a^2)},\qquad \frac{1}{P(D^2)}\cos ax=\frac{\cos ax}{P(-a^2)}.$$

(6) 当 $P(\mathrm{i}a)\neq 0$ 时

$$\frac{1}{P(D)}\cos ax=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{P(D)}e^{\mathrm{i}ax}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{e^{\mathrm{i}ax}}{P(\mathrm{i}a)}\right],$$

$$\frac{1}{P(D)}\sin ax = \mathrm{Im}\left[\frac{1}{P(D)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{P(\mathrm{i}a)}\right],$$

其中 Re 为复数的实部，Im 为复数的虚部（当 $P(\mathrm{i}a)=0$ 时，参照公式(4)）.

(7) 位移定理　$\frac{1}{P(D)}[\mathrm{e}^{\lambda x}v(x)]=\mathrm{e}^{\lambda x}\frac{1}{P(D+\lambda)}v(x)$.

(8) 当 $P(0)=a_n\neq 0$ 时

$$\frac{1}{P(D)}[A_0x^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_{k-1}x+A_k]$$

$$=Q_k(D)[A_0x^k+A_1x^{k-1}+\cdots+A_{k-1}x+A_k],$$

其中 $Q_k(D)=b_0D^k+b_1D^{k-1}+\cdots+b_{k-1}D+b_k$ 是按下法求得：将算子多项式 $P(D)$ 按升幂排列，依一般的多项式除法规则去除 1，当商中得到 k 次多项式时，停止除下去，这 k 次多项式即为 $Q_k(D)$.

算子解法　当常系数线性方程右端函数 $f(x)$ 具有特殊类型的函数（如 $\mathrm{e}^{\lambda x}$，$\sin ax$，$\cos ax$，多项式或它们的线性组合和某种乘积）时，采用算子解法显得特别简便.

(1) $P(D)y=f_k(x)$，$f_k(x)$ 为 x 的 k 次多项式.

① 若 $P(0)\neq 0$，$y=\frac{1}{P(D)}f_k(x)\overset{(8)}{=}Q_k(D)f_k(x)$ 或

$$y=\frac{1}{P(D)}f_k(x)=(b_0+b_1D+\cdots+b_kD^k)f_k(x).$$

（等号上的(8)表示上面逆算子的简单性质及运算公式中的(8)式，以下同.）

② 若 $P(0)=0$，且 $P(D)=D^rP_1(D)$，$P_1(0)\neq 0$，

$$y=\frac{1}{P(D)}f_k(x)\overset{(2)}{=}\frac{1}{D^r}\left[\frac{1}{P_1(D)}f_k(x)\right].$$

设 $\frac{1}{P_1(D)}f_k(x)=\bar{y}(x)$，则

$$y(x)=\frac{1}{D^r}\bar{y}(x)=\underbrace{\int\cdots\int}_{r\text{次}}\bar{y}(x)(\mathrm{d}x)^r.$$

(2) $P(D)y=e^{\lambda x}f_k(x)$,

$$y=\frac{1}{P(D)}[e^{\lambda x}f_k(x)]\overset{(7)}{=}e^{\lambda x}\frac{1}{P(D+\lambda)}f_k(x),$$

然后按类型(1)求解.

(3) $P(D)y=f_k(x)\cos ax$ 或 $P(D)y=f_k(x)\sin ax$(这里假设多项式 $P(D)$和 $f_k(x)$的系数都是实的). 考虑辅助方程

$$P(D)y=e^{iax}f_k(x).$$

按类型(2)求解,设辅助方程的解为$\bar{y}(x)$,从而

$$y=\frac{1}{P(D)}[f_k(x)\cos ax]\overset{(6)}{=}\mathrm{Re}\,\bar{y}(x),$$

$$y=\frac{1}{P(D)}[f_k(x)\sin ax]\overset{(6)}{=}\mathrm{Im}\,\bar{y}(x).$$

(4) $P(D^2)y=\cos ax$ 或 $P(D^2)y=\sin ax$.

① 当 $P(-a^2)\neq 0$ 时

$$y=\frac{1}{P(D^2)}\cos ax\overset{(5)}{=}\frac{\cos ax}{P(-a^2)},$$

$$y=\frac{1}{P(D^2)}\sin ax\overset{(5)}{=}\frac{\sin ax}{P(-a^2)}.$$

② 当 $P(-a^2)=0$ 时,且有 $P(D^2)=(D^2+a^2)^rP_1(D^2)$,而 $P_1(-a^2)\neq 0$ 则

$$y=\frac{1}{P(D^2)}\cos ax\overset{(2)}{=}\frac{1}{(D^2+a^2)^r}\left[\frac{1}{P_1(D^2)}\cos ax\right]$$

$$=\frac{1}{P_1(-a^2)}\cdot\frac{1}{(D^2+a^2)^r}\cos ax,$$

$$y=\frac{1}{P(D^2)}\sin ax\overset{(2)}{=}\frac{1}{(D^2+a^2)^r}\left[\frac{1}{P_1(D^2)}\sin ax\right]$$

$$=\frac{1}{P_1(-a^2)}\cdot\frac{1}{(D^2+a^2)^r}\sin ax.$$

考虑辅助方程$(D^2+a^2)^r\bar{y}=e^{iax}$.

$$\bar{y} = \frac{1}{(D^2+a^2)^r}e^{iax} \overset{(7)}{=} e^{iax}\frac{1}{[(D+ia)^2+a^2]^r}\cdot e^{0x}$$

$$= e^{iax}\frac{1}{D^r(D+2ia)^r}e^{0x}$$

$$\overset{(2)}{=} e^{iax}\cdot\frac{1}{D^r}\cdot\frac{1}{(2ia)^r} = \frac{e^{iax}}{(2ia)^r}\cdot\frac{x^r}{r!},$$

$$\frac{1}{(D^2+a^2)^r}\cos ax = \mathrm{Re}\,\bar{y} = \frac{x^r}{r!}\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{iax}}{(2ia)^r}\right\},$$

$$\frac{1}{(D^2+a^2)^r}\sin ax = \mathrm{Im}\,\bar{y} = \frac{x^r}{r!}\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{iax}}{(2ia)^r}\right\}.$$

例 24.3.4 求下列各题的特解：

(1) $(D^2+1)y=x^2-x+2$；(2) $(D-1)^2y=e^x$；

(3) $(D^2-1)y=xe^x\cos x$.

解 (1) $y=\frac{1}{D^2+1}(x^2-x+2)$

$$=(1-D^2)(x^2-x+2)=x^2-x.$$

(2) $y=\frac{1}{(D-1)^2}e^x\cdot 1=e^x\frac{1}{[(D+1)-1]^2}\cdot 1$

$$=e^x\frac{1}{D^2}\cdot 1=\frac{x^2}{2}e^x.$$

(3) $y=\frac{1}{D^2-1}xe^x\cos x=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{D^2-1}xe^{(1+i)x}\right]$

$$=\mathrm{Re}\left[e^{(1+i)x}\frac{1}{(D+1+i)^2-1}x\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[e^{(1+i)x}\left(-\frac{1+2i}{5}+\frac{14-2i}{25}D\right)x\right]$$

$$=\left[\left(-\frac{x}{5}+\frac{14}{25}\right)\cos x+\left(\frac{2}{5}x+\frac{2}{25}\right)\sin x\right]e^x.$$

Laplace 变换法 此法只用于求解微分方程的初值问题. 方法主要是借助于 Laplace 变换把常系数线性微分方程转换为复变数的代数方程，通过一些代数运算，再经过 Laplace 反变换（一般地

是查拉氏变换表 24.3)求出微分方程的特解.方法十分简便,对方程右端函数为分段连续或有脉冲性质的函数特别有效.但方法本身也有局限性,它要求右端函数必须是象原函数(下面介绍),否则方法不适用.

定义 24.3.5 由积分 $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 所定义的确定于复平面($\mathrm{Re}\, s>\sigma$)上的复变数 s 的函数 $F(s)$,称为函数 $f(t)$ 的 **Laplace 变换**(Laplace transform)(简称拉氏变换),记为 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$.其中 $f(t)$ 于 $t\geqslant 0$ 有定义,且满足不等式 $|f(t)|<M\mathrm{e}^{\sigma t}$,这里 M,σ 为某两个正的实常数.$f(t)$ 称为**象原函数**(或本函数),而 $F(s)$ 称为**象函数**.$\mathscr{L}$ 称为**拉氏变换算子**(有关拉氏变换的一般概念及其性质见复变函数论篇第 16 章).

拉氏变换的性质

(1) 线性性质 $\mathscr{L}[c_1 f_1+c_2 f_2]=c_1\mathscr{L}[f_1]+c_2\mathscr{L}[f_2]$,其中 c_1,c_2 为常数.

(2) 微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)]=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0),$$

$$\mathscr{L}[f''(t)]=s^2\mathscr{L}[f(t)]-sf(0)-f'(0),$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^n\mathscr{L}[f(t)]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0).$$

(3) 积分性质 $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\dfrac{\mathscr{L}[f(t)]}{s}$.

(4) 位移性质 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则 $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\alpha t}f(t)]=F(s-\alpha)$.

拉氏变换法的具体应用 设给定常系数线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=f(x)$$

及初始条件 $y_0=y(0),y'_0=y'(0),\cdots,y_0^{(n-1)}=y^{(n-1)}(0)$.$f(x)$ 满足象原函数的条件.记

表 24.3 常用的拉氏变换表

$f(t)$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$	$f(t)$	$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$
1	$\frac{1}{s}$, Re $s>0$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$, Re $s>0$
t	$\frac{1}{s^2}$, Re $s>0$	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{[(s-a)^2+\omega^2]}$, Re $s>a$
t^n (n 正整数)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, Re $s>0$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{[(s-a)^2+\omega^2]}$, Re $s>a$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, Re $s>$Re a	$te^{at}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$, Re $s>a$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$, Re $s>$Re a	$te^{at}\cos\omega t$	$\frac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$, Re $s>a$
t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, Re $s>$Re a	$\int_0^t f(t-u)g(u)du$ 或 $\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)G(s)$, F,G 分别为 f,g 的象函数
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, Re $s>0$		
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$, Re $s>0$	$\delta(t-c)$ $c>0$	e^{-cs}
$\sinh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$, Re $s>\|\omega\|$	$-t^nf(t)$	$F^{(n)}(s)$
$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$, Re $s>\|\omega\|$	$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$, Re $s>0$
$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$, Re $s>0$	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$

表中：$\delta(t-c)=\begin{cases}0, t\neq c,\\ \infty, t=c,\end{cases}$ $u_c(t)=\begin{cases}0, t<c,\\ 1, c\leqslant t,\end{cases}$ $c\geqslant 0$ 阶跃函数(step function) δ 函数(delta function).

$$Y(s)=\mathscr{L}[y(x)]\equiv\int_0^\infty e^{-sx}y(x)\mathrm{d}x,$$

$$F(s)=\mathscr{L}[f(x)]\equiv\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\mathscr{L}[y'(x)]=sY(s)-y_0,$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}[y^{(n)}(x)]=s^nY(s)-s^{n-1}y_0-s^{n-2}y'_0-\cdots-y_0^{n-1}.$$

对上述所给的微分方程两边进行拉氏变换，根据性质得

$$(s^nY(s)-s^{n-1}y_0-s^{n-2}y'_0-\cdots-y_0^{(n-1)})$$
$$+a_1(s^{n-1}Y(s)-s^{n-2}y_0-\cdots-y_0^{(n-2)})+\cdots$$
$$+a_{n-1}(sY(s)-y_0)+a_nY(s)=F(s)$$

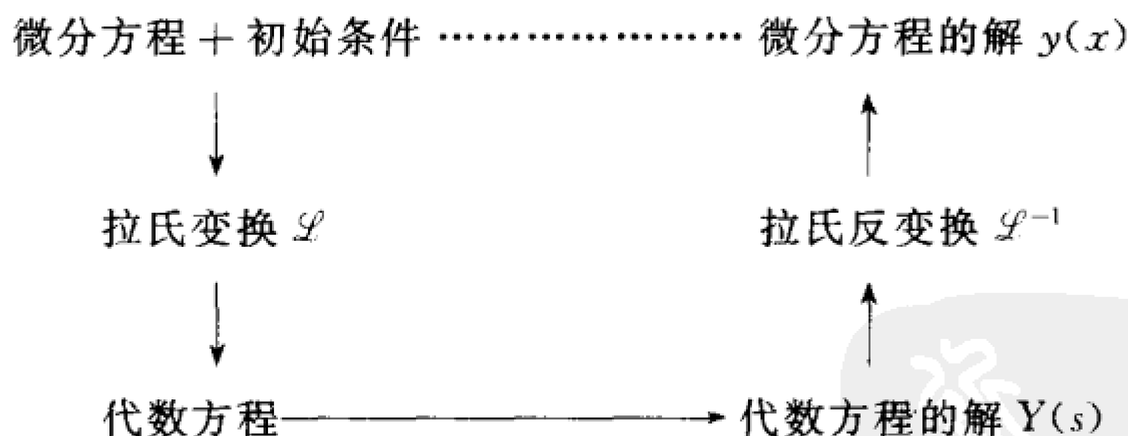
或

$$A(s)Y(s)=F(s)+B(s).$$

$A(s)$,$B(s)$ 为 s 的已知多项式，$F(s)$ 为 s 的已知函数，由此得

$$Y(s)=\frac{F(s)+B(s)}{A(s)},$$

它是 $y(x)$ 的象函数，查拉氏变换表或由反变换公式计算得出象原函数 $y(x)$（即方程的解）. 求解过程示意如下：



例 24.3.6 (1) 求方程 $y''+2y'+y=e^{-t}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的解.

(2) 求 $y''+a^2y=b\sin at$ 满足 $y(0)=y_0$, $y'(0)=y'_0$ 的解（a,b 为非零的常数）.

(3) 求 $y''+4y=h(t)$, $h(t)=\begin{cases}1, & \pi\leqslant t\leqslant 2\pi,\\ 0, & 0\leqslant t<\pi \text{ 和 } t\geqslant 2\pi\end{cases}$

满足初始条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 的解.

解 (1) 对方程两边进行拉氏变换得

$$s^2Y(s)+2sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s+1},$$

因此有 $Y(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3}$. 查表得象原函数 $y(x)=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x}$, 即方程的特解.

(2) 对方程两边进行拉氏变换得

$$s^2Y(s)-y_0s-y_0'+a^2Y(s)=\frac{ab}{s^2+a^2},$$

因此有

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+y_0\frac{s}{s^2+a^2}+y_0'\frac{1}{s^2+a^2}\\&=\frac{b}{2a^2}\left[\frac{a}{s^2+a^2}-a\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]+y_0\frac{s}{s^2+a^2}+\frac{y_0'}{a}\frac{a}{s^2+a^2}.\end{aligned}$$

查表得象原函数

$$y(x)=\frac{1}{2a^2}[(b+2ay_0')\sin ax+a(2ay_0-bx)\cos ax],$$

即所求的特解.

(3) $h(t)$ 为分段连续函数,记为 $h(t)=u_\pi(t)-u_{2\pi}(t)$ 阶跃函数(见表 24.3). 对方程进行拉氏变换得

$$(s^2+4)Y(s)-sy(0)-y'(0)=\frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s}.$$

代入初始条件并解出 $Y(s)$

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{s}{s^2+4}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s(s^2+4)}-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s(s^2+4)}\\&=\frac{s}{s^2+4}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{4}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{4}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right).\end{aligned}$$

查表得象原函数

$$y(t)=\cos 2t+\frac{1}{4}u_{\pi}(t)[1-\cos 2(t-\pi)]$$

$$-\frac{1}{4}u_{2\pi}(t)[1-\cos 2(t-2\pi)]$$

或

$$y(t)=\begin{cases}\cos 2t, & 0\leqslant t<\pi,\\ \frac{3}{4}\cos 2t+\frac{1}{4}, & \pi\leqslant t<2\pi,\\ \cos 2t, & 2\pi\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

定义 24.3.7 方程

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x), \quad (24.10)$$

$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 均为常数，称为 **Euler 方程**. 它是特殊的变系数线性微分方程. 通过自变量变换 $x=\mathrm{e}^t$，方程化为常系数方程 $F(D)y=f(\mathrm{e}^t)$，其中

$$F(D)=a_0D(D-1)\cdots(D-n+1)+a_1D(D-1)\cdots(D-n+2)$$

$$+\cdots+a_{n-1}D+a_n, \qquad D\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}.$$

例 24.3.8 求解 $x^2y''+2xy'-6y=0$.

解 作变换 $x=\mathrm{e}^t$，方程化为

$$[D(D-1)+2D-6]y=0,$$

其特征根为 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$，通解为 $y=c_1\mathrm{e}^{2t}+c_2\mathrm{e}^{-3t}$. 故原方程通解为

$$y=c_1x^2+c_2x^{-3}.$$

24.4 变系数线性微分方程的幂级数解

定义 24.4.1 二阶微分方程

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0, \quad (24.11)$$

若 $p(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}, q(x)=\dfrac{R(x)}{P(x)}$ 在 $x=x_0$ 点是解析的，则点 x_0 称为微分方程(24.11)的**常点**(ordinany point)，否则称为**奇点**(singular point).

定理 24.4.2 如果 x_0 是微分方程(24.11)的常点，即系数 $p(x)=\dfrac{Q}{P}, q(x)=\dfrac{R}{P}$ 在 $x=x_0$ 是解析的，在区间 $|x-x_0|<r$ $(r>0)$ 上均能展成 $x-x_0$ 的幂级数，则方程(24.11)在区间 $|x-x_0|<r$ 上有幂级数解 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$.

定义 24.4.3 对方程(24.11)的奇点 x_0，如果函数 $(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ 和 $(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ 在 $x=x_0$ 是解析的，则称 x_0 是方程(24.11)的**正则奇点**(regular singular point)，否则称为**非正则奇点**(irregular singular point).

定理 24.4.4 广义幂级数解定理 如果 x_0 是方程(24.11)的正则奇点，即 $(x-x_0)p(x)$ 和 $(x-x_0)^2q(x)$ 在 $x=x_0$ 是解析的. 它们的幂级数分别为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n$，收敛区间为 $|x-x_0|<r$，则方程(24.11)在区间 $|x-x_0|<r$ 上有广义幂级数(或称 Frobinus 型级数)解 $y=(x-x_0)^{\rho}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，其中 $a_0\neq 0$，ρ 是待定常数.

Airy(艾里)方程

$$y''-xy=0, \qquad -\infty<x<\infty, \tag{24.12}$$

求在常点 $x=0$ 邻域的级数解.

设级数解为 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，求各阶导数

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

代入方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

$$= 2\cdot 1a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0.$$

于是有

$$2a_2 = 0 \quad 及 \quad (n+2)(n+1)a_{n-2} - a_{n-1} = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

系数的一般公式为

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \qquad 1 \leqslant n,$$

a_0, a_1 为任意的. 因此 Airy 方程的通解为

$$y = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots 3\cdot 2}\right]$$

$$+ a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)3n(3n-2)(3n-3)\cdots 4\cdot 3}\right],$$

$$-\infty < x < \infty.$$

Hermite(埃尔米特)方程(Hermite equation)

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad (24.13)$$

λ 为常数. 求级数解 $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

解 将 $y = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 及其各阶导数代入方程得

$$(2a_2 + \lambda a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n]x^n = 0.$$

系数的递推公式

$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n, \qquad 0 \leqslant n,$$

a_0 和 a_1 是任意的. Hermite 方程的解为

$$y=a_0\left[1-\frac{\lambda}{2!}x^2-\frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4-\frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6-\cdots\right]$$

$$+a_1\left[x+\frac{2-\lambda}{3!}x^3+\frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5\right.$$

$$\left.+\frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!}x^7+\cdots\right], \qquad -\infty<x<\infty.$$

如果 λ 是非负的偶整数,上面级数中之一或之二将是有限的(例如:分别对 $\lambda=0,2,4,6$, Hermite 方程的一个解为 $1, x, 1-2x^2$ 和 $x-\frac{2x^3}{3}$). 对应于 $\lambda=2n$ 的多项式解,乘上适当的常数,就是熟知的 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_n(x)$.

Legendre 方程(Legendre equation)

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0, \qquad (24.14)$$

其中 α 为实常数.

$x=0$ 是常点. 设幂级数解为 $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_n x^k$. 将它及其各阶导数代入方程,可得出两个线性无关解

$$y_1(x)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m[\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2m+2)\cdot$$

$$(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2m-1)]x^{2m}/(2m)!,$$

$$y_2(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m[(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)\cdot$$

$$(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2m)]x^{2m+1}/(2m+1)!,$$

方程的通解为

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

当 $\alpha=n$ 是整数时,则 y_1, y_2 中有一个是多项式 $\mathrm{P}_n(x)$,另一

个是无穷级数. 当多项式解 $P_n(x)$ 满足条件 $P_n(1)=1$ 时，称 $P_n(x)$ 为 Legendre 多项式，其一般表示式为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

$\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示小于或等于 $\frac{n}{2}$ 的最大的整数. 例如 $\alpha=n=0,1,2,3,4$ 的 Legendre 多项式为：$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$，$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$.

Legendre 多项式 $P_n(x)$ 称为第一类 Legendre 函数，另一个与 $P_n(x)$ 线性无关的特解为无穷级数，记为 $Q_n(x)$，称为第二类 Legendre函数. Legendre 方程的通解可表示为 $y=c_1P_n(x)+c_2Q_n(x)$.

υ 阶 **Bessel 方程**(Bessel equation)

$$x^2y''+xy'+(x^2-\upsilon^2)y=0, \tag{24.15}$$

υ 为任意实数(或复数). $x=0$ 为正则奇点. 方程有广义幂级数解 $y=x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$a_0\neq 0$. 将它及其各阶导数代入方程，确定常数 ρ 和诸系数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 得

$$(\rho^2-\upsilon^2)a_0x^\rho+[(\rho+1)^2-\upsilon^2]a_1x^{\rho+1}$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\{[(\rho+k)^2-\upsilon^2]a_k+a_{k-2}\}x^{\rho+k}=0.$$

令 x 的各次幂的系数为 0，确定 ρ 和 a_n. $(\rho^2-\upsilon^2)a_0=0$，因为 $a_0\neq 0$，所以 $\rho=\pm\upsilon$. 关于 ρ 的方程称为**指标方程**(indicial equation).

(1) $\rho=\upsilon$，得 $a_1=0$，$a_k=\frac{-a_{k-2}}{k(2\upsilon+k)}(k=2,3,\cdots)$. 故有 $a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2m+1}=0(m=0,1,2,\cdots)$，

$$a_{2m}=(-1)^m \frac{a_0}{2^{2m}m!\ (\upsilon+1)(\upsilon+2)\cdots(\upsilon+m)}, \qquad m=0,1,2,\cdots.$$

取 $a_0=\frac{1}{2^\upsilon\Gamma(\upsilon+1)}$（$\Gamma$ 是 gamma 函数）得 Bessel 方程的一个特解，记作

$$\mathrm{J}_\upsilon(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{\upsilon+2m}}{2^{\upsilon+2m}m!\,\Gamma(\upsilon+m+1)}, \qquad \upsilon\geqslant 0,$$

它称为 υ 阶第一类 Bessel 函数.

(2) $\rho=-\upsilon$，得另一个特解

$$\mathrm{J}_{-\upsilon}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{-\upsilon+2m}}{2^{-\upsilon+2m}m!\,\Gamma(-\upsilon+m+1)},$$

$-\upsilon$ 阶第一类 Bessel 函数.

当 υ 不为整数时，J_υ 与 $\mathrm{J}_{-\upsilon}$ 线性无关，Bessel 方程的通解为

$$y(x)=c_1\mathrm{J}_\upsilon(x)+c_2\mathrm{J}_{-\upsilon}(x), \qquad c_1,c_2 \text{ 为任意常数}.$$

当 $\upsilon=n$ 为整数时，$\mathrm{J}_n(x)$ 与 $\mathrm{J}_{-n}(x)$ 线性相关. 取 J_υ 和 $\mathrm{J}_{-\upsilon}$ 的线性组合 $\mathrm{N}_\upsilon(x)=\frac{\mathrm{J}_\upsilon(x)\cos\upsilon\pi-\mathrm{J}_{-\upsilon}(x)}{\sin\upsilon\pi}$. 记

$$\mathrm{N}_n(x)=\lim_{\upsilon\to n}\frac{\mathrm{J}_\upsilon(x)\cos\upsilon\pi-\mathrm{J}_{-\upsilon}(x)}{\sin\upsilon\pi},$$

它是 Bessel 方程的一个解，与 $\mathrm{J}_n(x)$ 线性无关，称 $\mathrm{N}_n(x)$ 为 n 阶第二类 Bessel 函数（或 Neuman 函数）. 此时 Bessel 方程的通解为

$$y(x)=c_1\mathrm{J}_n(x)+c_2\mathrm{N}_n(x).$$

可化为 Bessel 方程的类型

(1) $x^2y''+xy'-(x^2+\upsilon^2)y=0.$

经变换 $x=\mathrm{i}t$，方程化为 Bessel 方程

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(t^2-\upsilon^2)y=0.$$

原方程的通解为

$$y=c_1\mathrm{J}_\upsilon(\mathrm{i}x)+c_2\mathrm{J}_{-\upsilon}(\mathrm{i}x),\qquad \upsilon\neq\text{整数},$$

$$y=c_1\mathrm{J}_n(\mathrm{i}x)+c_2\mathrm{N}_n(\mathrm{i}x),\qquad \upsilon=n\ \text{整数}.$$

(2) $x^2y''+xy'+(k^2x^2-\upsilon^2)y=0$，常数 $k\neq0$. 经变换 $t=kx$，方程化为 Bessel 方程

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(t^2-\upsilon^2)y=0,$$

原方程的通解为

$$y=c_1\mathrm{J}_\upsilon(kx)+c_2\mathrm{J}_{-\upsilon}(kx),\qquad \upsilon\neq\text{整数},$$

$$y=c_1\mathrm{J}_n(kx)+c_2\mathrm{N}_n(kx),\qquad \upsilon=n\ \text{整数}.$$

24.5 线性微分方程组

n 个一阶线性微分方程组的一般形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+f_1(t),\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+f_n(t).\end{cases}\tag{24.16}$$

用向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))^{\mathrm{T}}$ 和矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t)&a_{12}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\a_{21}(t)&a_{22}(t)&\cdots&a_{2n}(t)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}(t)&a_{n2}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

表示方程(24.16)如下

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t),\tag{24.17}$$

式中的 $a_{ik}(t)$ 和 $f_i(t)(i,k=1,2,\cdots,n)$ 都是 t 的已知函数.

(1) 如果至少有一个 $f_i(t)$ 不恒为零，则方程组称为**非齐次线性微分方程组**. 如果所有的 $f_i(t)$ 恒为零，则称为**齐次线性方程组**，其表示式为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n, \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_n + \cdots + a_{nn}(t)x_n, \end{cases} \tag{24.18}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{24.19}$$

(2) 如果齐次线性方程组(24.18)与非齐次线性方程组(24.16)具有相同的系数，则称方程组(24.18)为方程组(24.16)的**对应的齐次线性微分方程组**.

(3) $a_{ik}(t)(i,k=1,2,\cdots,n)$ 称为方程组的系数，如果所有的 $a_{ik}(t)$ 都是常数，则称为**常系数线性微分方程组**；否则称为**变系数线性微分方程组**.

定理 24.5.1 解的存在惟一性定理　如果方程组(24.17)的所有系数 $a_{ik}(t)$ 和 $f_i(t)(i,k=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则对于区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的任何数 t_0 及任一常数向量 $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$，方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t),$$

存在惟一解 $\boldsymbol{x}(t)$，定义在整个区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上，且满足初始条件

$$\boldsymbol{x}(t_0) = (x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}.$$

向量函数的线性相关性　定义在区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 上的向量函数 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$ 是**线性相关**的，如果存在不全为 0 的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$，使得恒等式

$$c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + \cdots + c_m\boldsymbol{x}_m(t) \equiv \boldsymbol{0}, \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

成立；否则，称 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_m(t)$ 为**线性无关的**.

向量函数的 Wronski 行列式 定义在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上的 n 个向量函数

$$\boldsymbol{x}_1(t)=(x_{11}(t),x_{21}(t),\cdots,x_{n1}(t))^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{x}_2(t)=(x_{12}(t),x_{22}(t),\cdots,x_{n2}(t))^{\mathrm{T}},$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{x}_n(t)=(x_{1n}(t),\cdots,x_{nn}(t))^{\mathrm{T}},$$

由它们所构成的行列式

$$\boldsymbol{W}[\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]$$
$$\equiv\boldsymbol{W}(t)\equiv\begin{vmatrix}x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t)\\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

称为这 n 个**向量函数的 Wronski 行列式**.

定理 24.5.2 方程(24.19)的 n 个解向量 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$

(1) 线性无关的充要条件是：由它们所构成的 Wronski 行列式 $\boldsymbol{W}[\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)]$ 在解的区间上恒不为零.

(2) 线性相关的充要条件是：由它们所构成的 Wronski 行列式 $\boldsymbol{W}(t)$ 在解区间上恒为零.

解的基本结构 (1) 齐次线性微分方程组的任意 k 个解的线性组合仍是该方程组的解，即解的叠加原理.

(2) 含有 n 个未知函数的齐次线性方程组的通解可以表示为它的 n 个线性无关解的线性组合.

这 n 个线性无关解称为齐次线性微分方程组的**基本解组**(fundamental set of solutions)基本解组是不惟一的.

(3) 含有 n 个未知函数的非齐次线性微分方程组的通解可以表示为它的一个特解和与它对应的齐次线性微分方程组的通解之和.

24.6 常系数线性微分方程组的解法

常系数线性微分方程组的表示式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \qquad (\text{非齐次}), \tag{24.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad (\text{齐次}), \tag{24.21}$$

其中

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$a_{ik}(i,k=1,2,\cdots,n)$均为常数.

待定指数函数法 设方程组(24.21)具有指数函数形式的解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\xi}\mathrm{e}^{\lambda t}$,其中常数 λ 和常数向量 $\boldsymbol{\xi}$ 待定. 将其代入方程组得

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}, \tag{24.22}$$

$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 此代数方程组有解的充要条件为系数行列式为零,即

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0. \tag{24.23}$$

方程(24.23)称为方程组(24.21)的**特征方程**(characteristic equation),它的根称为**特征根**. 将特征根代入(24.22),求得的向量 $\boldsymbol{\xi}$,称为**特征向量**.

根据特征根的不同情形,方程组(24.21)的线性无关解具有表 24.4中的形式.

参数变易法 与高阶线性方程一样,参数变易法是求非齐次线性方程组(24.20)特解的一般方法. 设对应的齐次线性方程组(24.21)的通解为

表 24.4

特　征　根	线性无关解中相应的形式	说　　明
λ 是单根	$x_j(t)=A_j e^{\lambda t}(j=1,2,\cdots,n)$	A_j 是待定常数
λ 是 r 重根	$x_j(t)=P_j(t)e^{\lambda t}(j=1,2,\cdots,n)$	$P_j(t)$ 是系数待定的次数不超过 $r-1$ 次的多项式
$\lambda=\alpha\pm i\beta$ 是 r 重复数根	$x_j(t)=e^{\alpha t}[P_j(t)\cos\beta t+Q_j(t)\sin\beta t]$ $(j=1,2,\cdots,n)$	$P_j(t),Q_j(t)$ 是系数待定的次数不超过 $r-1$次的多项式

$$\boldsymbol{x}_c=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}(t)+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}(t)+\cdots+c_n\boldsymbol{x}^{(n)}(t),$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意常数，向量 $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)=(x_1^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$ 为基本解组. 变易任意常数为 t 的函数 $c_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$，使非齐次线性方程有形为

$$\boldsymbol{x}_p(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$$

的特解. 式中的 $c_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 是待定函数，满足下列方程组

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{c}_n(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

因为 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t),\boldsymbol{x}^{(2)}(t),\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}(t)$ 是基本解组，故其 Wronski 行列式不为零，所以 $\dot{c}_1(t),\cdots,\dot{c}_n(t)$ 可惟一解出，再积分就得出所要求的 $c_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$.

例 24.6.1　求 $\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{pmatrix}e^t\\ t\end{pmatrix}$ 的通解.

解　对应齐次线性方程组的特征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=0,$$

特征根为 $\lambda_{1,2}=2$，其对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. 求得一特解为 $\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}$，与其线性无关的特解为 $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}a_1+a_2t\\b_1+b_2t\end{pmatrix}e^{2t}$，$a_i$，$b_i(i=1,2)$ 待定. 代入方程组得 $\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{pmatrix}-t\\1+t\end{pmatrix}e^{2t}$. 齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{x}_c=c_1\boldsymbol{x}^{(1)}+c_2\boldsymbol{x}^{(2)}$.

用参数变易法求非齐次线性方程组的一个特解 $\boldsymbol{x}_s=c_1(t)\boldsymbol{x}^{(1)}+c_2(t)\boldsymbol{x}^{(2)}$，代入原方程组，$c_1(t)$，$c_2(t)$ 满足下列方程组：

$$\begin{bmatrix}e^{2t} & -te^{2t}\\-e^{2t} & (1+t)e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{c}_1\\\dot{c}_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}e^t\\t\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases}\dot{c}_1-t\dot{c}_2=e^{-t},\\-\dot{c}_1+(1+t)\dot{c}_2=te^{-2t}.\end{cases}$$

解出 $\dot{c}_1$，$\dot{c}_2$ 并积分得

$$c_1(t)=-\left[(t+2)e^{-t}+\frac{1}{4}(2t^2+2t+1)e^{-2t}\right],$$

$$c_2(t)=-\left[e^{-t}+\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t}\right],$$

故

$$\boldsymbol{x}_s=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}(8e^t+t+1)\\\frac{1}{4}(4e^t-t)\end{pmatrix}.$$

非齐次线性微分方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}-t\\1+t\end{pmatrix}e^{2t}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-(8e^t+t+1)\\4e^t-t\end{pmatrix}.$$

算子解法　这方法实际上是消元法，将线性方程组化为高阶线性方程求解，举例说明方法.

例 24.6.2 求已给方程组的通解(D 为微分算子)

$$\begin{cases}(D^2+3)x+Dy=e^{-t}, & (24.24)\\ -4Dx+(D^2+3)y=\sin 2t. & (24.25)\end{cases}$$

解 方法1 通过消元法消去 y,用(D^2+3)对(24.24)进行运算,用 D 对(24.25)进行运算,然后相减得

$$[(D^2+3)^2+4D^2]x=(D^2+3)e^{-t}-D(\sin 2t). \qquad (24.26)$$

根据前面算子及逆算子运算公式,求得 x 的一个特解为

$$x=\frac{1}{(D^2+3)^2+4D^2}(4e^{-t}-2\cos 2t)=\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{2}{15}\cos 2t.$$

(24.26)式的相应齐次线性方程的特征方程为

$$(\lambda^4+10\lambda^2+9)=(\lambda^2+9)(\lambda^2+1)=0,$$

特征根为$\pm 3i,\pm i$,所以

$$x=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3\sin 3t+c_4\cos 3t+\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{2}{15}\cos 2t.$$

为求出 y,用 D 对式(24.24) 进行运算,然后减去式(24.25) 得

$$(D^3+7D)x-3y=-e^{-t}-\sin 2t.$$

由此得

$$y=\frac{1}{3}[(D^3+7D)x+e^{-t}+\sin 2t],$$

将 x 的通解代入得

$$y=-2c_1\sin t+2c_2\cos t+2c_3\sin 3t$$
$$-2c_4\cos 3t-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{15}\sin 2t.$$

故方程组的通解为

$$\begin{cases}x=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3\cos 3t+c_4\sin 3t+\dfrac{1}{5}e^{-t}+\dfrac{2}{15}\cos 2t,\\ y=-2c_1\sin t+2c_2\cos t+2c_3\sin 3t-2c_4\cos 3t-\dfrac{1}{5}e^{-t}+\dfrac{1}{15}\sin 2t.\end{cases}$$

方法 2 把方程组看成两个未知数 x,y 的代数方程，利用 Cramer(克拉默)行列式法则形式地求出特解. 系数行列式

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix} D^2+3 & D \\ -4D & D^2+3 \end{vmatrix}=(D^2+3)^2+4D^2,$$

$$x=\begin{vmatrix} e^{-t} & D \\ \sin 2t & D^2+3 \end{vmatrix}\Big/\Delta(D)$$

$$=\frac{1}{(D^2+3)^2+4D^2}(4e^{-t}-2\cos 2t)$$

$$=\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{2}{15}\cos 2t,$$

$$y=\begin{vmatrix} D^2+3 & e^{-t} \\ -4D & \sin 2t \end{vmatrix}\Big/\Delta(D)$$

$$=\frac{1}{(D^2+3)^2+4D^2}(-\sin 2t-4e^{-t})$$

$$=\frac{1}{15}\sin 2t-\frac{1}{5}e^{-t}.$$

通过直接验证知

$$\begin{cases} x=\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{2}{15}\cos 2t, \\ y=-\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{15}\sin 2t \end{cases}$$

是方程组的一个特解.

当方程组右端函数为 $e^{\lambda t}f(t)$，而且 $\Delta(\lambda)=0$ 时，则此解法不能用，只能采用方法 1.

例 24.6.3 $\begin{cases} \dot{x}+x-y=e^t, \\ \dot{y}+3x-2y=2e^t, \end{cases}$

初始条件 $x(0)=y(0)=1$. 求此方程组的特解.

解 对方程组两端进行拉氏变换得

$$\begin{cases}(s+1)X(s)-Y(s)=\dfrac{s}{s-1},\\ 3X(s)+(s-2)Y(s)=\dfrac{s+1}{s-1}.\end{cases}$$

解出

$$X(s)=\frac{1}{s-1},\qquad Y(s)=\frac{1}{s-1}.$$

查表，得所求的特解为

$$\begin{cases}x(t)=\mathrm{e}^t,\\ y(t)=\mathrm{e}^t.\end{cases}$$

例 24.6.4 $\begin{cases}(3\mathrm{D}^2+1)x+(\mathrm{D}^2+3)y=\mathrm{e}^t,\\ (2\mathrm{D}^2+1)x+(\mathrm{D}^2+2)y=\mathrm{e}^{-t},\end{cases}$

初始条件 $x(0)=y(0)=1, \dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0$、求此方程组的特解.

解 对方程组两端进行拉氏变换得

$$\begin{cases}(3s^2+1)X+(s^2+3)Y=\dfrac{1}{s-1}+4s,\\ (2s^2+1)X+(s^2+2)Y=\dfrac{1}{s+1}+3s.\end{cases}$$

解出

$$\begin{aligned}X(s)&=\frac{s^5-2s^3+2s^2+5}{(s+1)^2(s-1)^2(s^2+1)}\\&=\frac{3}{4}\,\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{9}{8}\,\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s+1)^2}\\&\quad+\frac{11}{8}\,\frac{1}{s+1}+\frac{3}{4}\,\frac{s+1}{s^2+1},\\Y(s)&=\frac{s^5-s^3-5s^2+s-2}{(s+1)^2(s-1)^2(s^2+1)}\\&=-\frac{3}{4}\,\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{5}{8}\,\frac{1}{s-1}-\frac{1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

$$-\frac{3}{8}\frac{1}{s+1}+\frac{3}{4}\frac{s+1}{s^2+1}.$$

查表,所求的特解为

$$\begin{cases} x(t)=-\frac{9}{8}e^t+\frac{3}{4}te^t+\frac{11}{8}e^{-t}+te^{-t}+\frac{3}{4}(\cos t+\sin t), \\ y(t)=\frac{5}{8}e^t-\frac{3}{4}te^t-\frac{3}{8}e^{-t}-te^{-t}+\frac{3}{4}(\cos t+\sin t). \end{cases}$$

24.7 在振动问题上的应用

机械振动和电路中的电磁振荡这两个领域中的振动问题,在一定条件下可归结为二阶常系数线性微分方程、机械振动的微分方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t),$$

x 为位移,$\dot{x}$ 为速度,m 为质量,c 为阻尼常数,k 为弹性常数,$F(t)$ 为外力. R-L-C 电路中的电磁振荡方程为

$$L\ddot{Q}+R\dot{Q}+\frac{1}{c}Q=E(t),$$

Q 为电荷,$\dot{Q}=I$ 为电流,L 为电感,R 为电阻,c 为电容,$E(t)$ 为外电源,两个方程中的系数均为常数.以机械振动方程为例进行详细讨论,电路问题完全类似.

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$

中 $c\dot{x}$ 为阻尼力,kx 为弹性恢复力.因为 $m\neq 0$,方程化为

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+\omega_0^2x=f(t),$$

其中 $2b=\frac{c}{m}$, $\omega_0^2=\frac{k}{m}$, $f(t)=\frac{F(t)}{m}$.

无阻尼的自由振动 不考虑系统的阻力,且无外力作用.

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0 \tag{24.27}$$

的通解为

$$x(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t=A\sin(\omega_0 t+\varphi),$$

其中 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\sin\varphi=\dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ 或 $\varphi=\arctan\left(\dfrac{c_1}{c_2}\right)$. 通解为正弦函数，表明是周期运动，称为**简谐振动**(harmonic vibration). 振幅 A, φ 初相位，它们都依赖于初始条件；$T=\dfrac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ 为振动周期，与初始条件无关，ω_0 为一个不变的数，称为固有频率或圆频率(见图 24.1).

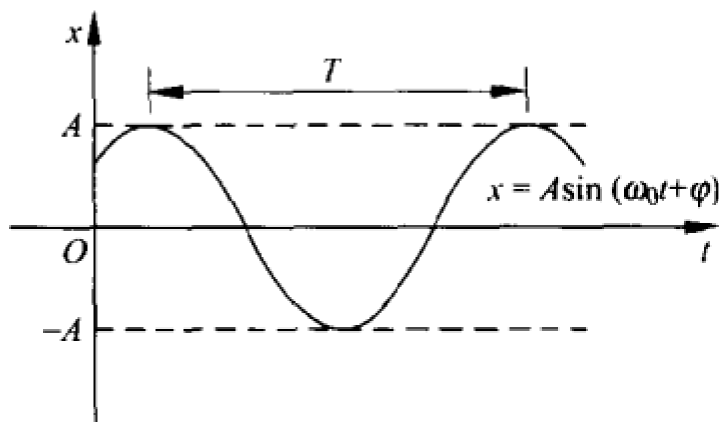


图 24.1　简谐振动

有阻尼的自由振动

$$\ddot{x}+2b\dot{x}+\omega_0^2 x=0,\qquad b,\omega_0 \text{ 均大于 } 0.\qquad (24.28)$$

特征方程和特征根为

$$\lambda^2+2b\lambda+\omega_0^2=0,\qquad \lambda_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-\omega_0^2}.$$

有三种情况：

(1) $b<\omega_0$(小阻尼)　记 $\omega_0^2-b^2=\omega_1^2$. 特征根为一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=-b\pm i\omega_1$. 通解为

$$x(t)=e^{-bt}(c_1\cos\omega_1 t+c_2\sin\omega_1 t)=Ae^{-bt}\sin(\omega_1 t+\varphi),$$

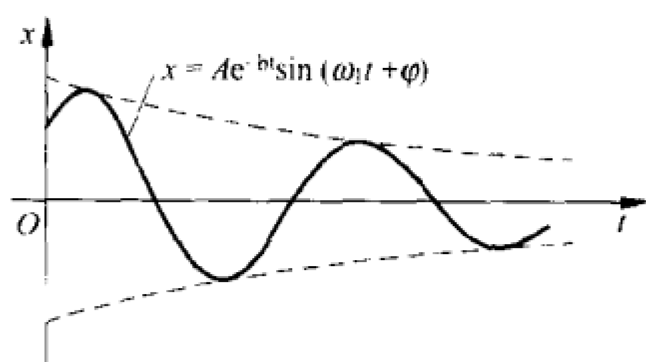
其中 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\sin\varphi=\dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$, $\cos\varphi=\dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$. 运动是振动的，但不是周期的. 振幅 Ae^{-bt} 随 t 增加而指数衰减，当 $t\to+\infty$ 时，

$x \to 0$，称为阻尼振动. 见图 24.2(a)

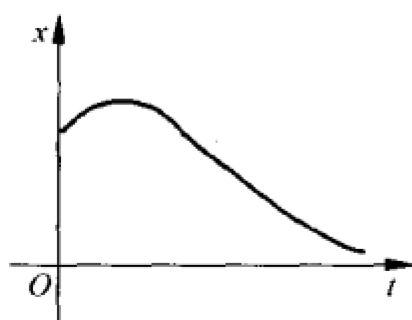
(2) $b > \omega_0$（大阻尼） 特征根为两个互异的负实根. 通解为

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

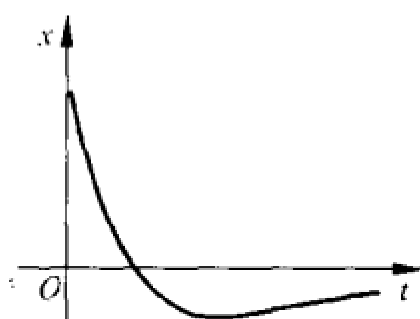
当 $t \to +\infty$ 时，$x \to 0$. 不产生振动现象，称为过阻尼运动，见图 24.2(b). 而且 $x(t)$ 与 t 轴最多只相交一次，因为由方程 $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = 0$，对于 t 最多只有一个解.



(a) 衰减振动



(b) 过阻尼振动



(c) 临界阻尼振动

图 24.2

(3) $b = \omega_0$（临界阻尼） 特征根为相等实根. 通解为

$$x(t) = e^{-bt}(c_1 + c_2 t).$$

运动不是周期的，也不具有振动的性质. 图形与图 24.2(c) 类似. $b = \omega_0$ 称为阻尼的临界值，这数值正好足够抑制振动. 临界是指运动处于振动状态或不振动状态的阻尼分界值.

无阻尼的强迫振动 振动系还受到外力作用时，称为强迫振动. 最常见的外力是周期变化的. 这里考察按正弦变化的外力.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = p\sin(\omega t). \qquad (24.29)$$

通解为

$$x(t)=(c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t)+\frac{p}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t$$

$$=A\sin(\omega_0 t+\varphi)+\frac{p}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\omega t,$$

其中 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$，$\varphi=\arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$，它们都依赖于初始条件. 右端的头一项表示固有振动，以固有频率 ω_0 进行振动；后一项代表强迫振动，以外力的频率 ω 进行振动. 这两个振动合成的振动不一定是简谐振动.

有两种特殊情况：

(1) "拍"(beats)的现象：$\omega\approx\omega_0$　设初始条件为 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=\frac{p}{\omega_0-\omega}$，则得 $c_1=0$，$c_2=\frac{p}{\omega_0^2-\omega^2}$. 解为

$$x(t)=\frac{p}{\omega_0^2-\omega^2}(\sin\omega_0 t+\sin\omega t)$$

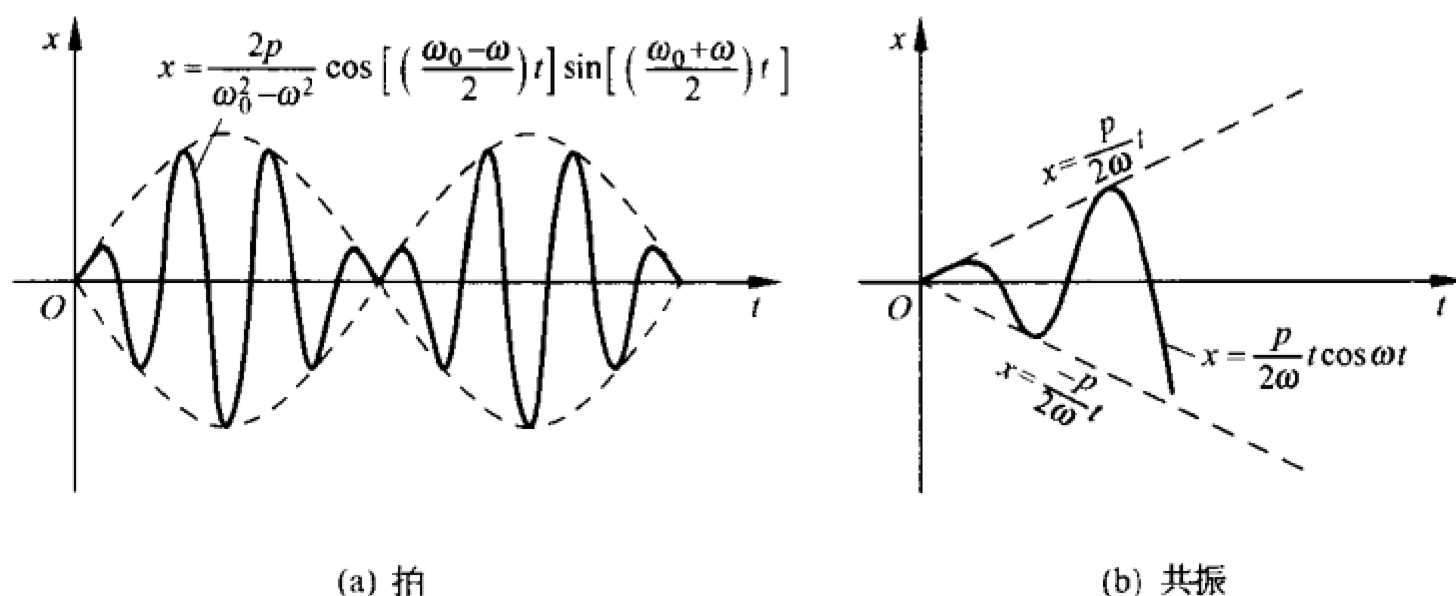
$$=\frac{2p}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left[\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)t\right]\sin\left[\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}\right)t\right].$$

$\cos\left[\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)t\right]$ 以 $\frac{4\pi}{|\omega_0-\omega|}$ 为周期进行振动，$\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}\right)t$ 以 $\frac{4\pi}{\omega_0+\omega}$ 为周期进行振动. 因为 $\omega\approx\omega_0$，所以 $\omega_0+\omega\gg|\omega_0-\omega|$，因此 $\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}\right)t$ 为比 $\cos\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)t$ 振荡快得多的函数. 把解看成以 $\frac{2p}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)t$ 为振幅，以 $\frac{4\pi}{\omega_0+\omega}$ 为周期的周期振动. 具有周期变化振幅的这类型运动称为"拍". 见图 24.3(a).

(2) 共振现象(resonance)：$\omega=\omega_0$　此时方程有一特解 $-\frac{p}{2\omega}t\cos\omega t$. 通解为

$$x(t) = (c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t) - \frac{p}{2\omega}t\cos\omega t.$$

这时强迫振动项的振幅随时间的增加而无限增大，即称产生“共振现象”. 见图 24.3(b).



(a) 拍　　　　(b) 共振

图　24.3

有阻尼的强迫振动

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = p\sin\omega t. \tag{24.30}$$

其对应的齐次线性微分方程的通解记为 $x_c(t)$. 方程的通解为

$$x(t)=x_c(t)+\frac{p}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}\sin(\omega t-\varphi),$$

其中 $\varphi=\arctan\left(\frac{2b\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$. $x_c(t)$有 3 种情况，但当 $t\to+\infty$时都有 $x_c(t)\to 0$. 因此，当 t 相当大时，运动规律基本上由后一项表示，此项称为稳态解，与外力的频率 ω 一样，但相位和振幅不同. 当 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2b^2}$ 时，稳态解的振幅达到最大值，也产生所谓的“共振现象”.

24.8　二阶线性微分方程的边值问题

边值问题(boundary value problem)的一般提法：

给定二阶非齐次线性微分方程

$$L[y]=p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=f(x). \quad (24.31)$$

其对应的齐次线性微分方程为

$$L[y]=p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0. \quad (24.32)$$

假设其中 $p_0(x)$，$p_1(x)$，$p_2(x)$和 $f(x)$均在区间$[a,b]$上连续，且 $p_0(x)\neq0$. 线性边界条件的一般表示式为

$$\begin{cases}U_1(y)\equiv\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)+\beta_{11}y(b)+\beta_{12}y'(b)=\gamma_1,\\U_2(y)\equiv\alpha_{21}y(a)+\alpha_{22}y'(a)+\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b)=\gamma_2.\end{cases} \quad (24.33)$$

当 $\gamma_i(i=1,2)$不全为零时，称为**非齐次边界条件**；当 $\gamma_i(i=1,2)$全为零时，称为**齐次边界条件**，记为

$$U_i(y)\equiv\alpha_{i1}y(a)+\alpha_{i2}y'(a)+\beta_{i1}y(b)+\beta_{i2}y'(b)=0,\quad i=1,2. \quad (24.34)$$

如果微分方程和边界条件都是齐次的，则称为**齐次边值问题**；如果方程和边界条件都是非齐次的，则称为**非齐次边值问题**；如果方程为齐次的而边界条件为非齐次的，或方程为非齐次的而边界条件为齐次的，则称为**半齐次边值问题**.

边值问题可解的条件：

(1) 对于初值问题 $y''=f(x,y,y')$，$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y'_0$只要 f，$\frac{\partial f}{\partial x}$和$\frac{\partial f}{\partial y}$连续，解存在且惟一. 但边值问题解的存在惟一性问题要复杂得多，它可能无解，也可能有无穷多解.

(2) 边值问题可解定理

① 已知非齐次线性方程 $L[y]=f(x)$的一个特解 $y_0(x)$及其对应齐次线性方程 $L[y]=0$ 的基本解组 $y_1(x)$，$y_2(x)$，则非齐次边值问题

$$L[y]=f(x),$$
$$U_i(y)=\gamma_i,\qquad i=1,2$$

可解的充要条件为矩阵

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}U_1(y_1) & U_1(y_2)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2)\end{bmatrix} \tag{24.35}$$

和矩阵

$$\begin{bmatrix}U_1(y_1) & U_1(y_2) & -U_1(y_0)+\gamma_1\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & -U_2(y_0)+\gamma_2\end{bmatrix}$$

具有相同的秩.

② 半齐次边值问题

$$L[y]=0,$$
$$U_i(y)=\gamma_i,\qquad i=1,2$$

可解的充要条件为矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和矩阵

$$\begin{bmatrix}U_1(y_1) & U_1(y_2) & \gamma_1\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \gamma_2\end{bmatrix}$$

具有相同的秩.

③ 齐次边值问题有非零解的充要条件为式(24.35)矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{U}=0$.

定理 24.8.1 边值问题解的存在惟一性定理

(1) 齐次边值问题只有零解的充要条件为

$$\det\boldsymbol{U}\neq 0.$$

(2) 半齐次边值问题 $L[y]=0,U_i(y)=\gamma_i(i=1,2)$ 和非齐次边值问题存在惟一解的充要条件为

$$\det\boldsymbol{U}\neq 0.$$

半齐次边值问题 $L[y]=f(x)$, $U_i(y)=0(i=1,2)$ 的求解问题可以化为半齐次边值问题 $L[y]=0$, $U_i(y)=-\gamma_i(i=1,2)$ 来解决.

设 $y_0(x)$ 为 $L[y]=f(x)$ 的一个特解,求出 $U_i(y_0)=\gamma_i(i=1,2)$. 设 $\bar{y}(x)$ 为 $L[y]=0,U_i(y)=-\gamma_i(i=1,2)$ 的解,则 $y=\bar{y}+y_0$ 是半齐次边值问题 $L[y]=f(x),U_i(y)=0(i=1,2)$ 的解.

非齐次边值问题 $L[y]=f(x), U_i(y)=\gamma_i (i=1,2)$的求解问题可以化为两个半齐次边值问题 $L[y]=f(x), U_i(y)=0 (i=1,2)$及 $L[y]=0$，$U_i(y)=\gamma_i (i=1,2)$的求解问题.

待定常数解法 如果边值问题中所考虑的线性微分方程的通解可以求出,则利用给定的边界条件确定其中的任意常数,便可求得所讨论的边值问题的特解.

(1) 求解半齐次边值问题

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

$$y(a)=\alpha, \qquad y(b)=\beta, \qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

解 首先设法求出齐次线性方程的两个特解 $y_1(x), y_2(x)$，为求解方便起见,令 $y_1(x), y_2(x)$分别满足初始条件

$$y_1(a)=1, \qquad y'_1(a)=0, \tag{24.36}$$

$$y_2(a)=0, \qquad y'_2(a)=1. \tag{24.37}$$

方程的通解为

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x).$$

令其满足边界条件,得

$$\begin{cases} c_1y_1(a)+c_2y_2(a)=\alpha, \\ c_1y_1(b)+c_2y_2(b)=\beta. \end{cases}$$

利用条件(24.36),(24.37),当 $y_2(b)\neq 0$ 时,得

$$c_1=\alpha, \qquad c_2=\frac{\beta-\alpha y_1(b)}{y_2(b)}.$$

因此边值问题的惟一非零解为

$$y(x)=\alpha y_1(x)+\frac{\beta-\alpha y_1(b)}{y_2(b)}y_2(x).$$

例 24.8.2 求解 $y''+\frac{4x}{1+x^2}y'+\frac{2}{1+x^2}y=0, y(0)=1, y(2)=1.$

解 易验证 $y_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$和 $y_2(x)=\frac{x}{1+x^2}$分别满足初始条

件 $y_1(0)=1, y'_1(0)=0$ 及 $y_2(0)=0, y'_2(0)=1$. 又 $y_2(2)=\frac{2}{5}\neq 0$. 所以其解为

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1-y_1(2)}{y_2(2)}y_2(x)=\frac{1+2x}{1+x^2}.$$

(2) 求解非齐次边值问题

$$\begin{aligned}&y''+p(x)y'+q(x)y=f(x),\\&y(a)=\alpha, y(b)=\beta, \qquad a\leqslant x\leqslant b,\end{aligned}$$

可以按非齐次边值问题直接求解,但下面求法简便些.

设法求出非齐次线性方程的一个特解 $y_0(x)$,并满足初始条件 $y_0(a)=\alpha, y'_0(a)=0$. 然后求出其对应齐次线性方程的一个特解 $y_1(x)$,并满足初始条件 $y_1(a)=0, y'_1(a)=1$. 当 $y_1(b)\neq 0$ 时,该边值问题的惟一非零解为 $y(x)=y_0(x)+\frac{\beta-y_0(b)}{y_1(b)}y_1(x)$.

定义 24.8.3 对于齐次边值问题(24.32),(24.34),一个在正方形域 $a\leqslant x,\xi\leqslant b$ 上定义的函数 $G(x,\xi)$ 称为此齐次边值问题的 Green **函数**(Green function),如果它满足下列条件:

(1) $G(x,\xi)$ 在正方形域 $a\leqslant x,\xi\leqslant b$ 上是连续的;

(2) $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}$ 在 $a\leqslant x,\xi\leqslant b$ 上 $(x\neq\xi)$ 连续,而在 $x=\xi$ 处有第一类间断点,即

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-0}-\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-0}=\frac{1}{p_0(\xi)};$$

(3) $G(x,\xi)$ 在 $[a,\xi)$ 和 $(\xi,b]$ 上看作 x 的函数,满足方程(24.32)和边界条件(24.34).

定理 24.8.4 Green 函数存在惟一定理 如果齐次边值问题(24.32),(24.34)只有惟一的零解(即 $\det \boldsymbol{U}\neq 0$),则此齐次边值问题存在惟一的 Green 函数.

证明 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程(24.32)的基本解组. 因为

$G(x,\xi)$在$[a,\xi),(\xi,b]$上也满足方程(24.32),故应有

$$G(x,\xi)=a_1(\xi)y_1(x)+a_2(\xi)y_2(x), \qquad a\leqslant x\leqslant \xi,$$
$$G(x,\xi)=b_1(\xi)y_1(x)+b_2(\xi)y_2(x), \qquad \xi\leqslant x\leqslant b,$$

$a_i(\xi),b_i(\xi)(i=1,2)$待定. 根据定义 24.8.3 中的条件(1)和(2),故有

$$b_1y_1(\xi)+b_2y_2(\xi)-[a_1y_1(\xi)+a_2y_2(\xi)]=0,$$
$$b_1y_1'(\xi)+b_2y_2'(\xi)-[a_1y_1'(\xi)+a_2y_2'(\xi)]=\frac{1}{p_0(\xi)}.$$

令 $b_i-a_i=c_i(i=1,2)$则

$$\begin{cases}c_1y_1(\xi)+c_2y_2(\xi)=0,\\ c_1y_1'(\xi)+c_2y_2'(\xi)=\dfrac{1}{p_0(\xi)}.\end{cases}$$

其系数行列式为

$$W(\xi)=W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1(\xi) & y_2(\xi)\\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi)\end{vmatrix}\neq 0,$$

所以 c_1,c_2 的方程组有惟一解

$$c_1=-\frac{y_2(\xi)}{p_0(\xi)W(\xi)}, \qquad c_2=\frac{y_1(\xi)}{p_0(\xi)W(\xi)}.$$

下面进一步利用边界条件确定 $a_i(\xi),b_i(\xi)$. 记边界条件(24.34)为

$$U_i(y)\equiv U_{i,a}(y)+U_{i,b}(y)=0, \qquad i=1,2,$$

其中 $U_{i,a}(y)$是包含所有项 $y(a),y'(a)$的和,$U_{i,b}(y)$是包含所有项 $y(b),y'(b)$的和. 于是得

$$U_i(G)\equiv a_1(\xi)U_{i,a}(y_1)+a_2(\xi)U_{i,a}(y_2)$$
$$+b_1(\xi)U_{i,b}(y_1)+b_2(\xi)U_{i,b}(y_2)=0, \qquad i=1,2.$$

以 $a_i=b_i-c_i$ 代入上式,得

$$b_1(\xi)U_1(y_1)+b_2(\xi)U_1(y_2)=c_1U_{1,a}(y_1)+c_2U_{1,a}(y_2),$$
$$b_1(\xi)U_2(y_1)+b_2(\xi)U_2(y_2)=c_1U_{2,a}(y_1)+c_2U_{2,a}(y_2).$$

因为

$$\det \boldsymbol{U} = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 $b_1(\xi), b_2(\xi)$ 有惟一的一组解. 由 $a_i = b_i - c_i$ 可以惟一地确定 $a_i(i=1,2)$. 至此证明了齐次边值问题 Green 函数的存在惟一, 同时给出 Green 函数的做法.

边值问题的 Green 函数解法

(1) 求解半齐次边值问题

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$
$$U_1(y) = 0, \qquad U_2(y) = 0.$$

设相应的齐次边值问题只有零解, 根据定理 24.8.4 存在惟一的 Green 函数 $G(x,\xi)$. 上述半齐次边值问题的解为

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

(2) 非齐次边值问题的求解

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$
$$U_1(y) = \gamma_1, \qquad U_2(y) = \gamma_2.$$

根据非齐次边值问题, 化为两个半齐次边值问题求解. 设 $y_1(x)$ 是

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ U_1(y) = \gamma_1, \qquad U_2(y) = \gamma_2 \end{cases}$$

的解, 而 $y_2(x)$ 是

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ U_1(y) = 0, \qquad U_2(y) = 0 \end{cases}$$

的解. 则非齐次边值问题的解为

$$y = y_1(x) + y_2(x) = y_1(x) + \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

例 24.8.5 解非齐次边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ y(0) = 1, \qquad y'(1) = 2, \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上连续.

解 化为两个半齐次边值问题求解

(1) $y'' = 0, y(0) = 1, y'(1) = 2$.

其解为 $y_1 = 1 + 2x$.

(2) $y'' = f(x), y(0) = 0, y'(1) = 0$.

先求 Green 函数 $G(x,\xi)$. $y'' = 0$ 的通解为 $y = c_1 + c_2 x$, 所以

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi) + a_2(\xi)x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ b_1(\xi) + b_2(\xi)x, & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

按定理 24.8.4 的方法,求得 $a_1(\xi) = 0, a_2(\xi) = -1, b_1(\xi) = -\xi$, $b_2(\xi) = 0$,所以

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ -\xi, & \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

则此半齐次边值问题的解为

$$y_2(x) = -\int_0^x \xi f(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_x^1 x f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

所给的非齐次边值问题的解为

$$y = y_1 + y_2 = 1 + 2x - \int_0^x \xi f(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_x^1 x f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

24.9 本征值问题

本征值问题 齐次边值问题

$$L(y) = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + [p_2(x) + \lambda r(x)]y = 0,$$

$$U_i(y) \equiv \alpha_{i_1} y(a) + \alpha_{i_2} y'(a) + \beta_{i_1} y(b) + \beta_{i_2} y'(b) = 0, \quad i = 1,2, \qquad (24.38)$$

其中 λ 为参数. 确定参数 λ 取哪些值时,使此边值问题有非零解的问题,称为**本征值问题**(eigenvalue problem). 这些参数值称为**本征值**

(eigenvalue),与其对应的非零解称为**本征函数**(eigen function).

例 24.9.1 求 $y''+\lambda y=0$ 满足边界条件 $y(0)=y(\pi)=0$ 的非零解.

解 当 $\lambda\leqslant 0$ 时,只有零解满足上述边界条件.

当 $\lambda>0$ 时,通解为 $y=c_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$. 由条件 $y(0)=0$,得 $c_1=0$. 由条件 $y(\pi)=0$,得 $c_2\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0$,要有非零解必须 $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi=0$,即 $\sqrt{\lambda}=n$ 或 $\lambda=n^2\,(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$,所以本征值为

$$\lambda_n=n^2,\qquad n=\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

本征函数为

$$y_n=c_2\sin nx.$$

自伴(自共轭)问题

$$L(y)\equiv p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=\lambda r(x)y,\quad a\leqslant x\leqslant b,\tag{24.39}$$

其中 p_0,p_1,p_2,r 是在区间 $[a,b]$ 上给定的实函数,且 $p_0(x)\neq 0$, $r(x)>0$, λ 为参数. 如果线性微分算子 L 具有这样的性质:对于任意两个在区间 $[a,b]$ 上有连续导数并满足一定边界条件的函数 $u(x)$ 和 $v(x)$,关系式

$$\int_a^b \bar{u}(x)L(v)\mathrm{d}x=\int_a^b v\,\overline{L(u)}\,\mathrm{d}x$$

成立(其中上面一横线表示复数共轭),则相应的本征值问题称为**自伴的**(self adjoint) 或**自共轭的**.

定理 24.9.2 自伴问题的基本定理

(1) 自伴问题的本征值必是实数.

(2) 对应于两个不同本征值 $\lambda_m\neq\lambda_n$ 的本征函数 $\varphi_m(x)$, $\varphi_n(x)$,在 $[a,b]$ 上是带权 $r(x)$ 正交的,即

$$\int_a^b \bar{\varphi}_m(x)\varphi_n(x)r(x)\mathrm{d}x=0.$$

(3) 在区间 $[a,b]$ 上平方可积并满足本征值问题边界条件的

任何一个函数 $f(x)$,可以按本征函数$\{\varphi_n(x)\}$展开为一个绝对而且收敛的级数——广义傅氏级数

$$f(x)=\sum_n c_n\varphi_n(x),$$

其中

$$c_n=\frac{\int_a^b\overline{\varphi}_n(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b|\varphi_n(x)|^2\mathrm{d}x}$$

称为广义傅氏系数.

Sturm(施图姆)-Liouville 方程(Sturm-Liouville equation)

(1) $L(y)\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y=\lambda r(x)y,\qquad a\leqslant x\leqslant b,$

$$(24.40)$$

其中 $p(x)$ 在$[a,b]$上连续可微,且 $p(x)>0$, q, r 连续且 $r(x)>0$, λ 为参数. 此方程称为正规的(regular)Sturm-Liouville **方程**. 简称 S-L 方程.

(2) 对于二阶线性齐次方程

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=\lambda r(x)y,$$

只要 $p_0(x)\neq0$ 且可微,则乘以函数 $\exp\int\frac{p_1-p_0'}{p_0}\mathrm{d}x$ 后,总可化为 S -L 型方程.

(3) S -L 方程和分离边界条件

$$U_1(y)=\alpha_1y(a)+\alpha_2y'(a)=0,$$
$$U_2(y)=\beta_1y(b)+\beta_2y'(b)=0,$$

$\alpha_i,\beta_i(i=1,2)$是实常数,且 $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq0,\beta_1^2+\beta_2^2\neq0$ 所组成的本征值问题是自伴的.

(4) S -L 方程和周期的边界条件

$$y(a)=y(b),\qquad y'(a)=y'(b)$$

所组成的本征值问题也是自伴的.

(5) S -L 方程和一般的齐次边界条件

$$U_1(y)=\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)+\beta_{11}y(b)+\beta_{12}y'(b)=0,$$

$$U_2(y)=\alpha_{21}y(a)+\alpha_{22}y'(a)+\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b)=0$$

所组成的本征值问题,当且仅当

$$p(a)(\beta_{12}\beta_{21}-\beta_{22}\beta_{11})=p(b)(\alpha_{21}\alpha_{12}-\alpha_{11}\alpha_{22})$$

成立时才是自伴的.

25 稳定性理论

微分方程的研究大致可分为定量和定性两部分．由于绝大多数的微分方程不可能用已知函数的积分来表示其通解，从定性方面提出的任务是：直接根据微分方程的结构来研究解的属性，定性研究本身有意义，同时对定量研究有指导作用.

稳定性理论是定性理论研究的一个重要组成部分．它研究的是当微分方程右端函数与初始条件发生变化时，解的变化情况，即研究在什么条件下可以将非线性方程简化成线性方程来处理，而不至于产生太大的误差；及研究当初始条件有微小变化时，方程的解的变化也小（稳定）或有很大的变化（不稳定）.

25.1 基本概念

微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{y}),\qquad (t,\boldsymbol{y})\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\tag{25.1}$$

满足初始条件 $\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0$ 的解 $\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{y}}(t)$ 的稳定性的研究，可以归结为对零解的稳定性的研究. 此方程组中的 $\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{\varphi}$ 为 n 维向量 $\boldsymbol{y}=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))^{\mathrm{T}}$，$\mathbb{R}^n$ 为 n 维实数域．作变换

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}},$$

方程组(25.1)化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}),\tag{25.2}$$

其中

$$\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}+\overline{\boldsymbol{y}})-\boldsymbol{\varphi}(t,\overline{\boldsymbol{y}}).$$

(25.1)的解 $\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{y}}(t)$对应于方程组(25.2)的零解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

不失一般性，下面只讨论方程组(25.2)零解的稳定性问题，并假设其右端函数 $\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$(或 $\boldsymbol{x}\in G,\boldsymbol{0}\in G\subset\mathbb{R}^n$)和 $t\geqslant 0$ 上连续，且满足解的存在惟一性条件．此外，设 $\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{0})\equiv 0$，因而方程组(25.2)具有零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 下面用 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^0)$表示方程组(25.2)满足初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^0$ 的解，并假设(25.2)的所有解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^0)$在 $t\geqslant t_0\geqslant 0$ 上均有意义.

定义 25.1.1 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 和 $t_0\geqslant 0$，存在 $\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当$|\boldsymbol{x}^0|<\delta(t_0,\varepsilon)$时，有

$$|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^0)|<\varepsilon,\qquad \text{对一切 } t\geqslant t_0.$$

则称(25.2)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是(局部)**稳定的**(stable).

定义 25.1.2 如果方程组(25.2)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的，且存在这样的 $\delta_1>0$，使得当$|\boldsymbol{x}^0|<\delta_1$ 时，有 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^0)\to\boldsymbol{0}$(当 $t\to+\infty$时). 则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为(局部)**渐近稳定的**(asymtotic stable).

定义 25.1.3 如果方程组(25.2)的零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是稳定的，且对任何初值 $\boldsymbol{x}^0\in\mathbb{R}^n$(或 $\boldsymbol{x}^0\in G$, $\boldsymbol{0}\in G\subset\mathbb{R}^n$)，有

$$\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^0)\to\boldsymbol{0},\qquad \text{当 } t\to+\infty.$$

则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为**全局渐近稳定的**(在区域 G 中渐近稳定的)，有时称为大范围稳定性.

定义 25.1.4 如果对于预先给定的 $\varepsilon>0$，不论 $\delta>0$ 怎样小，总存在满足$|\boldsymbol{x}^0|<\delta$ 的初值 $\boldsymbol{x}^*$ 及 $\tau>t_0$，使由初值 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^*$ 所确定的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^*)$，不满足条件$|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}^*)|<\varepsilon$，则称零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是**不稳定的**(unstable)，见图 25.1.

定义 25.1.5 给定微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}). \quad (25.2)$$

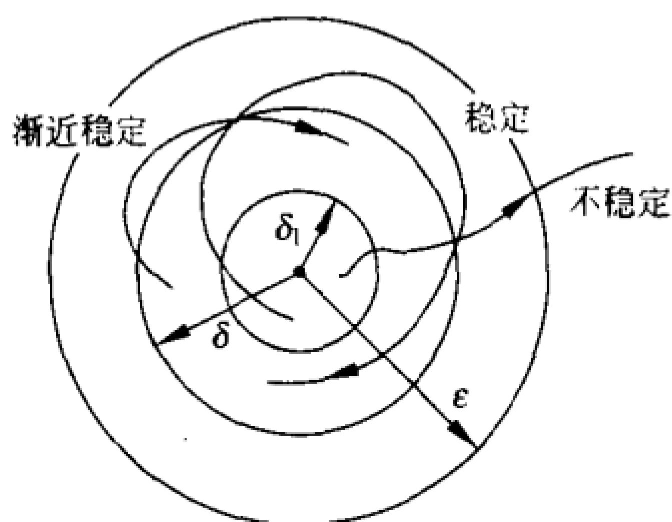


图 25.1

如果把时间 t 作为参数,仅考虑以$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为坐标的空间,此空间称为方程组(25.2)的**相空间**(phase space). 当 $n=2$ 时,(x_1,x_2)的平面称为**相平面**(phase plane). 相空间中的每一点称为相点. 方程组(25.2)的积分曲线在相空间上的投影称为**相轨线**,简称**轨线**(trajectory).

定义 25.1.6 方程组(25.2)当右端函数不明显含 t 时,称为**自治方程组**(autonomous system)(或定常、驻定方程组);右端函数明显含有 t 时,称为**非自治方程组**(nonautonomous system)(或非定常、非驻定方程组).

定义 25.1.7 自治(定常)方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}). \tag{25.3}$$

如果 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^0)\neq\boldsymbol{0}$,则称相点 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,)$为方程组(25.3)的**常点**(ordinary point);如果 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}^0)=\boldsymbol{0}$,则称相点 $\boldsymbol{x}^0$ 为方程组(25.3)的**奇点**(singular point),或称为系统的**平衡点**(equilibrium point),**静止点**(stationary point).

在奇点的某个邻域内再没有其他奇点时,称此奇点为**孤立奇点**.

奇点本身是方程组(25.3)的一条孤立轨线.

25.2 常系数齐次线性方程组零解的稳定性

为简便起见,只研究二阶线性方程组. 设方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy,\end{cases}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\tag{25.4}$$

a,b,c,d 均为实常数，且系数行列式 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0$. 显然坐标原点 (0,0)是线性方程组的孤立奇点(平衡点). 根据线性微分方程组(25.4)的特征方程

$$\begin{vmatrix}a-\lambda&b\\c&d-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

的特征根的不同情况，通过非奇异的实线性变换

$$\begin{cases}\xi=k_{11}x+k_{12}y,\\ \eta=k_{21}x+k_{22}y,\end{cases}$$

将(25.4)化成标准形式，其系数矩阵为下列 4 种形式之一：

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\alpha,\beta$ 为实数.

相异的实特征根 $\lambda_1\neq\lambda_2$

方程组(25.4)中的 $b=c=0$ 时，已呈标准形式. 当 b,c 不同时为零时，可按 $b\neq0$ 或 $c\neq0$ 的情况，分别采用线性变换

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d-\lambda_1&-b\\d-\lambda_2&-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad 或\quad \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c&a-\lambda_1\\-c&a-\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

将(25.4)化为标准形式

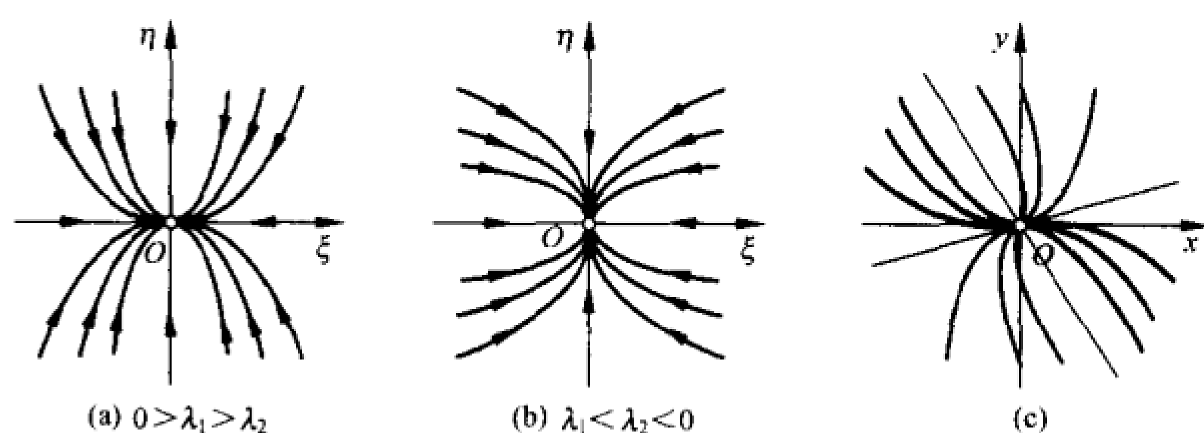
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}.$$

其通解为

$$\xi(t)=A\mathrm{e}^{\lambda_1 t},\qquad \eta(t)=B\mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

A,B 为任意常数(下同).

(1) $\lambda_1<0, \lambda_2<0$　零解是渐近稳定的. 轨线形状如图 25.2（箭头表示 t 增大的方向. 下同）. 这种奇点称为**稳定结点**（stable node）.

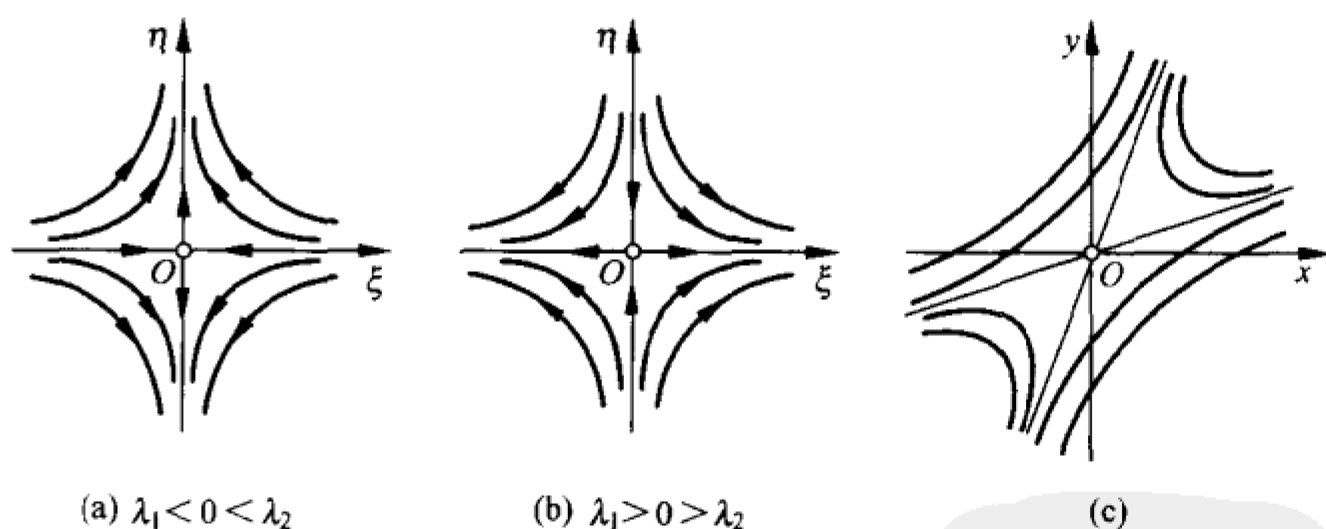


(a) $0>\lambda_1>\lambda_2$　(b) $\lambda_1<\lambda_2<0$　(c)

图 25.2

(2) $\lambda_1>0, \lambda_2>0$　零解是不稳定的. 轨线形状与图 25.2 相同，但轨线的走向均改为相反的方向. 这种奇点称为**不稳定结点**（unstable node）.

(3) $\lambda_1<0<\lambda_2$（或 $\lambda_2<0<\lambda_1$）　零解是不稳定的. 轨线如图 25.3. 这种奇点称为**鞍点**（saddle point）.



(a) $\lambda_1<0<\lambda_2$　(b) $\lambda_1>0>\lambda_2$　(c)

图 25.3

共轭复数特征根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta,\ \beta\neq 0$.

线性变换为

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}c & \sqrt{2}(a-\alpha)\\ 0 & \sqrt{2}\beta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}(d-\alpha) & -\sqrt{2}b\\ \sqrt{2}\beta & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

将(25.4)化为标准形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}. \tag{25.5}$$

引入极坐标 $\xi=r\cos\theta, \eta=r\sin\theta$,(25.5)化为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\alpha r, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\beta.$$

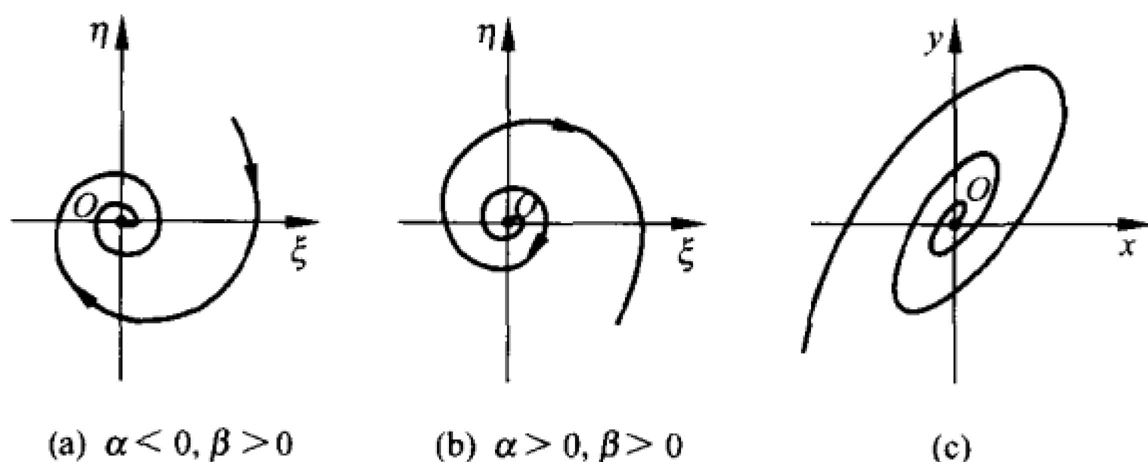
(25.5)解的极坐标形式为

$$r=A\mathrm{e}^{\alpha t}, \qquad \theta=-\beta t+B,$$

其中 $A>0$.

(1) $\alpha<0$ 零解是渐近稳定的. 轨线如图 25.4(a). 这种奇点称为**稳定焦点**(stable spiral).

(2) $\alpha>0$ 零解是不稳定的. 轨线如图 25.4(b). 奇点称为**不稳定焦点**.



(a) $\alpha<0,\beta>0$ (b) $\alpha>0,\beta>0$ (c)

图 25.4

(3) $\alpha=0$ 零解是稳定的. 轨线是闭曲线,是以原点为中心的一族圆,如图 25.5. 奇点称为**中心**(center).

特征根为重根 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

(1) 当 $b\neq0$ 或 $c\neq0$ 时,分别采用线性变换

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda-d & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad 或 \quad \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ c & \lambda-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

把方程组(25.4)化为标准形式

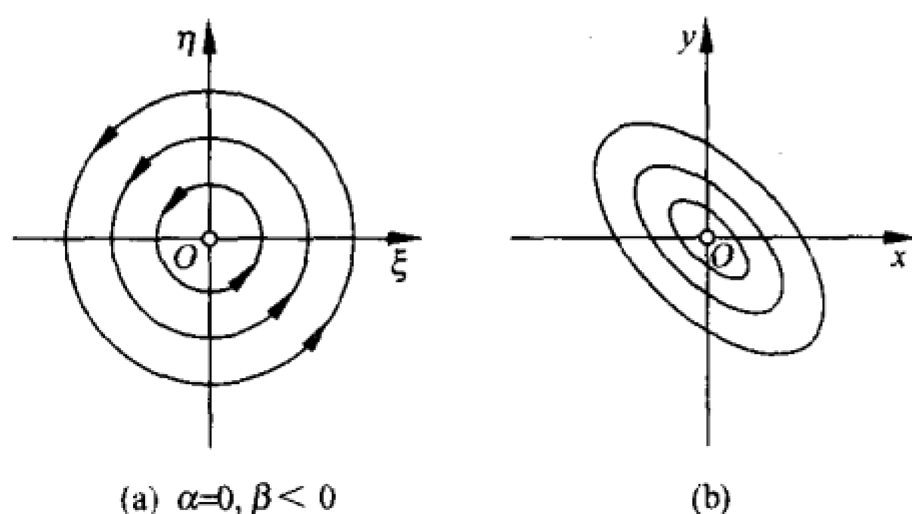


图 25.5

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}.$$

其通解为

$$\xi(t)=(At+B)\mathrm{e}^{\lambda t},\qquad \eta(t)=A\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

当 $\lambda<0$ 时，零解是渐近稳定的. 轨线如图 25.6(a). 奇点称为**稳定的退化结点**(stable degenerate node).

当 $\lambda>0$ 时，零解是不稳定的. 轨线如图 25.6(b). 奇点称为**不稳定退化结点**.

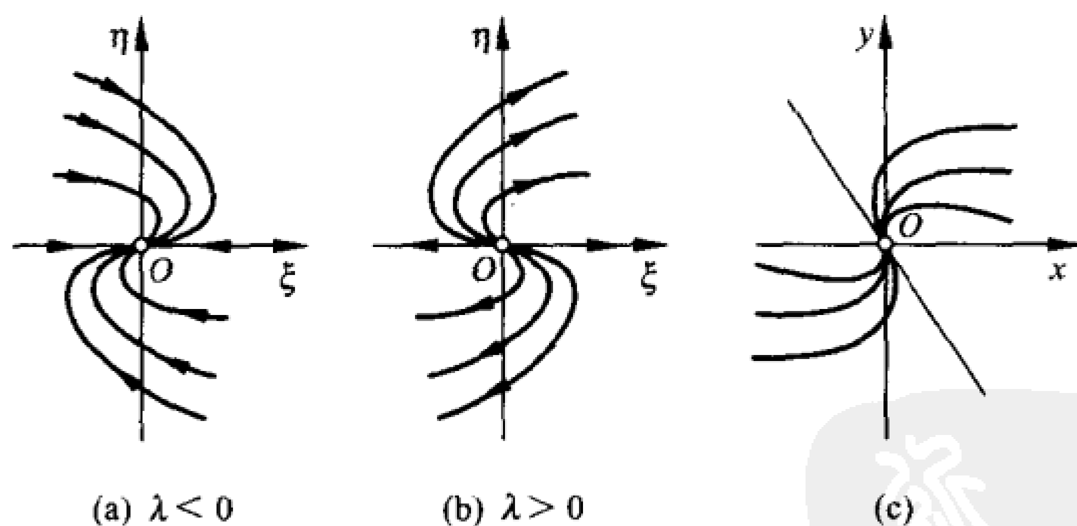


图 25.6

(2) 当 $b=c=0$ 时，方程组(25.4)取形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\lambda y,\qquad \lambda=a=d,$$

其通解为

$$x(t)=Ae^{\lambda t}, \qquad y(t)=Be^{\lambda t}.$$

当 $\lambda<0$ 时,零解是渐近稳定的.轨线如图 25.7(a).奇点称为稳定的**奇结点**或**稳定的临界结点**(stable critical node).

当 $\lambda>0$ 时,零解是不稳定的.轨线如图 25.7(b).奇点称为**不稳定的临界结点**.

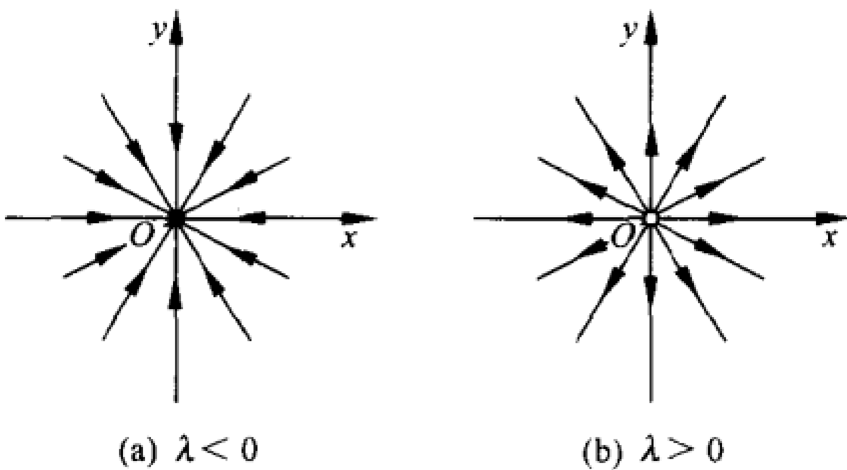


图 25.7

综合上述,结果如表 25.1 所示.

表 25.1 奇点的类型

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax+by, & \text{特征方程}\quad \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=cx+dy, & \text{特征根}\quad \lambda_{1,2}=\dfrac{(a+d)\pm\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2}\end{cases}$$

$$ad-bc\neq 0 \qquad\qquad =\frac{1}{2}\left[(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}\right]$$

根的判别式	奇点类型	稳定性
$(a-d)^2+4bc>0$ 互异的实根	$ad-bc>0$, λ_1,λ_2 同号, 结点	$a+d<0$ 渐近稳定 $a+d>0$ 不稳定
	$ad-bc<0$, λ_1,λ_2 异号,鞍点	不稳定
$(a-d)^2+4bc<0$ 共轭复数根	$a+d=0$,纯虚根,中心	稳定
	$a+d\neq 0$,焦点	$a+d<0$ 渐近稳定 $a+d>0$ 不稳定
$(a-d)^2+4bc=0$ 重根	b,c 不同时为零,退化结点 $b=c=0$,临界结点	$a+d<0$ 渐近稳定 $a+d>0$ 不稳定

对 $n=2$ 的线性系统,结论是:

(1) 若所有特征根都有负的实部,则零解是渐近稳定的.

(2) 若具有正实部的根,则零解是不稳定的.

(3) 若没有正实部的根,但有实部为零的根,则零解是稳定的.

定理 25.2.1 设 n 阶常系数线性方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,实常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

特征方程为 $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0$,$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵.

(1) 如果所有的特征根都具有负的实部,则零解是渐近稳定的;

(2) 如果具有正实部的特征根,则零解是不稳定的;

(3) 如果没有正实部的特征根,但有零特征根或实部为零的特征根,而且均为单根或均具有单重的初等因子,则零解是稳定的,否则零解是不稳定的.

25.3 按线性近似判定稳定性

对于非线性自治方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}), \tag{25.6}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为实常数矩阵,$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$,且满足

$$\frac{\|\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\to 0, \qquad \|\boldsymbol{x}\|\to 0.$$

显然 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是方程组(25.6)的解.(25.6)的线性部分

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{25.7}$$

称为方程组(25.6)的线性近似方程组,简称为**线性近似**或**一次近似**.

定理 25.3.1 如果线性近似(25.7)的特征方程没有零根或零实部的根,则非线性方程组(25.6)零解的稳定性与其线性近似的零解的稳定性一致.当线性近似的特征方程的根均具有负实部时,方程组(25.6)的零解是渐近稳定的;当特征方程具有正实部的根时,(25.6)的零解是不稳定的.

定理 25.3.2 **Hurwitz 定理**(Hurwitz theorem) 实系数的 n 次代数方程

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \qquad a_0>0. \tag{25.8}$$

作 Hurwitz 行列式

$$\Delta_1=a_1, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}\equiv a_n\Delta_{n-1},$$

其中如果 $i>n$,则 $a_i=0$.

方程(25.8)的全部根具有负实部的充要条件为:Hurwitz 行列式均为正的,即 $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$,$\cdots$,$\Delta_{n-1}>0$, $a_n>0$.

判定零解不稳定的简便准则 根据 Hurwitz 定理的必要条件,当线性近似(25.7)的特征方程的系数不同号(必具有正实部的根)时,零解是不稳定的.

Hurwitz 定理的应用

(1) 判断零解的稳定性　下列各非线性方程组的高次项部分都满足线性近似的条件.

① $$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-2x_1+x_2-x_3+x_1^2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-x_2+x_1x_2,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=x_1+x_2-x_3+x_3^2,\end{cases}$$

其线性近似的特征方程为

$$\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+3=0.$$

其 Hurwitz 行列式:$\Delta_1=4>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}>0$, $a_3=3>0$. 所以特征根均具有负实部. 因此,非线性方程组的零解是渐近稳定的.

② $$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+8\sin x_2,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=2-e^{x_1}+x_2-\cos x_2,\end{cases}$$

将 $\sin x_2$, e^{x_1}, $\cos x_2$ 按 Taylor 公式展开,方程组可写成

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+8x_2+R_1(x_1,x_2),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1+x_2+R_2(x_1,x_2),\end{cases}$$

其中 R_1,R_2 为 x_1,x_2 高于一次的项的总和. 线性近似的特征方程为

$$\lambda^2-3\lambda+10=0.$$

由于特征方程的系数异号,因此特征根具有正实部. 所以非线性方程组的零解是不稳定的.

③ $$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_2+x_1^3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2^3,\end{cases}$$ 及 $$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_2-x_1^3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1-x_2^3,\end{cases}$$

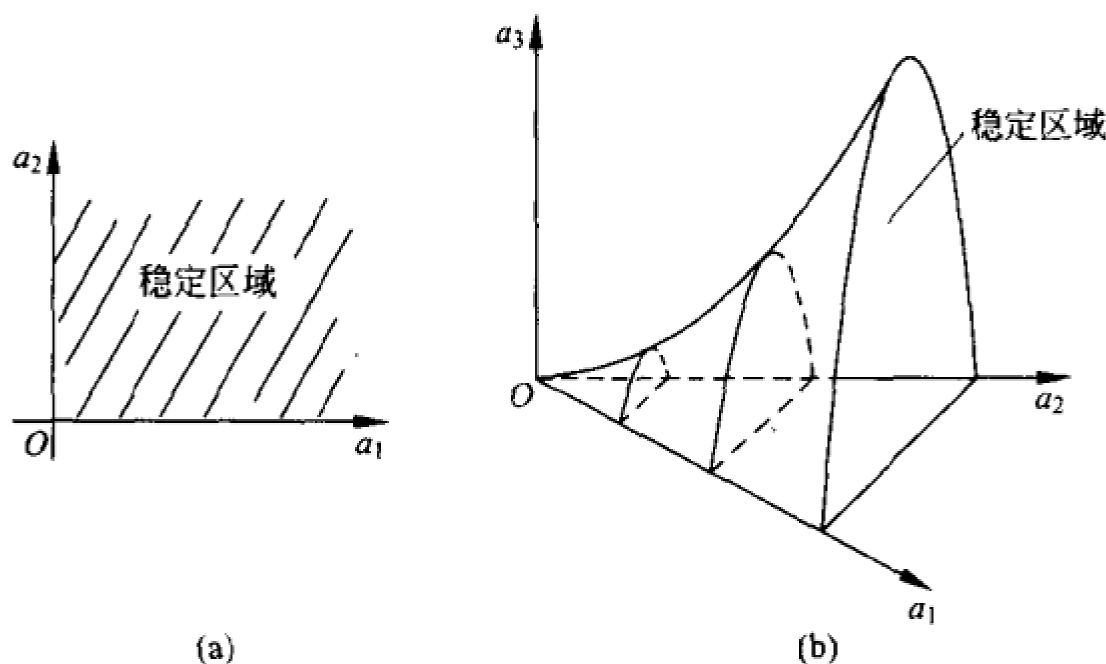
这两个方程组的线性近似的特征根均具有零实部，根据线性近似不能判定非线性方程组零解的稳定性. 但由 Liapunov（李雅普诺夫）第二方法（见下节）可以判定前一个方程的零解是不稳定的，后一个方程的零解是渐近稳定的.

（2）确定微分方程组的稳定区域　设非线性方程组（25.6）的线性近似的特征方程如下：

① $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$　根据 Hurwitz 条件，稳定区域为：$a_1>0$，$a_2>0$. 如图 25.8(a).

② $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$　Hurwitz 条件为：$a_1>0$，

$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_3>0$，$a_3>0$. 稳定区域如图 25.8(b).



(a)　(b)

图　25.8

③ $\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0$　Hurwitz 条件为：$a_1>0$，$\Delta_2=a_1a_2-a_3>0$，$\Delta_3=a_3(a_1a_2-a_3)-a_1^2a_4>0$，$a_4>0$.

25.4　Liapunov 第二方法

Liapunov 第二方法是研究微分方程稳定性问题的一般方法. 它借助于构造一个特殊的函数 V，使它与微分方程组的右端函数

发生关系，从而直接判断方程组的稳定性. 因此，也称它为直接方法. 方法的主要优点是对方程组的解不要求有所了解.

定义 25.4.1 设 $V(\boldsymbol{x})$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$（或域 G, $\mathbf{0}\in G\subset\mathbb{R}^n$）上的单值、连续可微函数，且 $V(\mathbf{0})=0$.

(1) 定号函数 如果 $V(\boldsymbol{x})>0(V(\boldsymbol{x})<0)\ \forall\, \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathbb{R}^n$（或 G）上的**定正**(positive definite)（**定负**(negative definite)）函数. 定正或定负函数统称为**定号函数**.

(2) 常号函数 如果 $V(\boldsymbol{x})\geqslant 0(V(\boldsymbol{x})\leqslant 0)\ \forall\, \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，则称 $V(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathbb{R}^n$（或 G）上的**常正**(positive semidefinite)（**常负**(negative semidefinite)）函数. 常正或常负函数，统称为**常号函数**.

定义 25.4.2 (1) $V(\boldsymbol{x})$ 称为在空间 $\mathbb{R}^n$ 中的定正无限大函数，如果 $V(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中定正，且

$$V(\boldsymbol{x})\to+\infty,\qquad \|\boldsymbol{x}\|\to\infty.$$

(2) $V(\boldsymbol{x})$ 称为在区域 G 中的定正无限大函数，如果 $V(\boldsymbol{x})$ 在 G 中定正，且

$$V(\boldsymbol{x})\to+\infty,\qquad \rho(\boldsymbol{x})\to\infty,$$

其中 $\rho(\boldsymbol{x})=\max\{d(\mathbf{0},\boldsymbol{x}),1/d(\partial G,\boldsymbol{x})\}$，而 d 表示距离，∂G 表示 G 的边界.

定义 25.4.3 设 $V(t,\boldsymbol{x})$ 定义在 $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$（或 $[0,\infty)\times G$, $\mathbf{0}\in G\subset\mathbb{R}^n$）上的单值、连续可微函数. 且

$$V(t,\mathbf{0})=0,\qquad t\in[0,\infty).$$

(1) 称函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 为常正（常负）的，如果在 $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$（或 $[0,\infty)\times G$）上

$$V(t,\boldsymbol{x})\geqslant 0\qquad (V(t,\boldsymbol{x})\leqslant 0).$$

(2) $W(\boldsymbol{x})$ 为定正函数，对函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 在 $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$（或 $[0,\infty)\times G$）上，差 $V(t,\boldsymbol{x})-W(\boldsymbol{x})$ 或 $-V(t,\boldsymbol{x})-W(\boldsymbol{x})$ 为常正的，则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 为定号的. 如 $V-W\geqslant 0$，则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 为定正的；如 $-V-W\geqslant 0$，则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 为定负的.

定义 25.4.4 设 V 为有界函数，如果对于任给 $\varepsilon>0$，存在有 $\delta>0$，使当 $|\boldsymbol{x}|\leqslant\delta$ 及一切 $t\geqslant t_0$（t_0 为某一常数）时，有不等式

$$|V(t,\boldsymbol{x})|<\varepsilon,$$

则称 $V(t,\boldsymbol{x})$ 具有无限小上界.

定理 25.4.5 Liapunov 稳定性定理（Liapunov stability theorem） 对于微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{X}(x)=(X_1(x),\cdots,X_s(\boldsymbol{x}),\cdots,X_n(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}.\tag{25.9}$$

如果可以找到一个在原点邻域内的可微函数 $V(\boldsymbol{x})$（称为 Liapunov 函数或简称为 V 函数）：

(1) $V(\boldsymbol{x})$是定号的；

(2) $V(\boldsymbol{x})$关于 t 沿方程组(25.9)的全导数

$$\dot{V}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(\boldsymbol{x})$$

是与 V 符号相反的常号函数，或者恒等于零. 则方程组(25.9) 的零解是稳定的.

定理 25.4.6 Liapunov 渐近稳定性定理 对于方程组(25.9)如果可以找到一个在原点邻域内的可微函数 $V(\boldsymbol{x})$：

(1) $V(\boldsymbol{x})$是定号的；

(2) $V(\boldsymbol{x})$关于 t 沿方程组(25.9)的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(\boldsymbol{x})$$

是与 V 符号相反的定号函数. 则方程组(25.9) 的零解是渐近稳定的.

定理 25.4.7 对于方程组(25.9)，存在正定函数 $V(\boldsymbol{x})$，使得它关于 t 沿方程组(25.9) 的全导数

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(\boldsymbol{x})$$

是常负的，并且$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 除点 O 外，不包含(25.9)的整条轨线，则方

程组(25.9)的零解是渐近稳定的.

定理 25.4.8 对于方程组(25.9),如果在$\mathbb{R}^n$中存在定正无限大函数$V(\boldsymbol{x})$,且它关于时间t沿方程组(25.9)的全导数$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$于$\mathbb{R}^n$中是定负的,则(25.9)的零解是全局渐近稳定的.

定理 25.4.9 对于方程组(25.9),如果在$\mathbb{R}^n$中存在定正无限大函数$V(\boldsymbol{x})$,其关于t沿方程组(25.9)的全导数$\dot{V}$于$\mathbb{R}^n$中是常负的,而且$\dot{V}=0$除点O外,不包含(25.9)的其他任何整条轨线,则(25.9)的零解是全局渐近稳定的.

定理 25.4.10 对于方程组(25.9),如果可以找到函数$V(\boldsymbol{x})$,它关于t沿方程组(25.9)的全导数$\dot{V}$是定号函数,而V是与$\dot{V}$具有同号的常号函数,则(25.9)的零解是不稳定的.

定理 25.4.11 对于方程组(25.9),如果可以找到函数$V(\boldsymbol{x})$,满足下列条件:

(1) 在坐标原点的任意小的邻域,存在$V>0$的区域,在此区域的边界上$V=0$;

(2) 在$V>0$的区域上,V关于t沿方程组(25.9)的全导数$\dot{V}>0$.

则方程组(25.9)的零解是不稳定的.

定理 25.4.12 对于方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{X}(t,\boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{X}=(X_1(t,\boldsymbol{x}),\cdots,X_s(t,\boldsymbol{x}),\cdots,X_n(t,\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}. \tag{25.10}$$

如果在区域$\|\boldsymbol{x}\|\leqslant H$, $t\geqslant 0$上(常数$H>0$),存在定正函数$V(t,\boldsymbol{x})$,而$V(t,\boldsymbol{x})$关于t沿方程组(25.10)的全导数

$$\dot{V}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}X_s(t,\boldsymbol{x})$$

是常负的或者恒等于零,则(25.10)的零解是稳定的.

定理 25.4.13 对于方程组(25.10),如果在区域 $\|x\|\leqslant H$, $t\geqslant 0$ 上存在定正函数 $V(t,x)$,具有无限小上界,且其关于 t 沿方程组(25.10)的全导数$\dot{V}$定负,则(25.10)的零解是渐近稳定的.

定理 25.4.14 对于方程组(25.10),如果在$[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$上存在定正无限大函数 $V(t,x)$,具有无限小上界,且$\dot{V}$在$[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$上是定负的,则(25.10)的零解是全局渐近稳定的.

定理 25.4.15 对于方程组(25.10),如果存在具有无限小上界的函数 $V(t,x)$,它关于 t 沿方程组(25.10)的全导数$\dot{V}$是定号函数,对任意大的 t 值,总存在坐标原点的任意小邻域,使 $V\dot{V}>0$,则(25.10)的零解是不稳定的.

定理 25.4.16 对于方程组(25.10),如果可以找到函数 $V(t,x)$,满足下列条件:

(1) 在任意大的 t 值和任意小的坐标原点邻域内,存在有 $V>0$ 的区域;

(2) 在区域 $V>0$ 内,函数 V 是有界的;

(3) 在区域 $V>0$ 内,全导数$\dot{V}$为定正的,则(25.10)的零解是不稳定的.

25.5 V 函数的某些做法和应用

运用 Liapunov 方法的困难在于如何构造 V 函数.至今,对于一般的非线性微分方程组还没有构造 V 函数的一般规则,但有一些可以遵循的规则,例如,在作 V 函数时,通常总是兼顾对 V 和 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$的要求,根据问题的具体条件来选择 V 和 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$的具体表达式,反复尝试,才能找到 V 函数的较好具体形式,从而导出较好的稳定性条件.一般地是先对非线性系统的线性近似系统构造 V 函数,

然后作必要的修改，使之适用于非线性系统. 常取 V 函数为系数待定的二次型，或二次型加非线性函数的积分. 还可以根据系统的物理背景取系统的广义总能量作为 V 函数等.

下面为一些特殊非线性系统 V 函数的做法.

定理 25.5.1 设常系数线性方程组为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{25.11}$$

$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 非奇异常数矩阵. (25.11)的零解渐近稳定的充要条件为：对给定的正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}$，必存在惟一正定对称矩阵 $\boldsymbol{P}$，满足矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}, \tag{25.12}$$

亦即给定 $\boldsymbol{Q}$，可以作出正定二次型 $V=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，使其沿方程组(25.11)的全导数 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$ 是负定的.

常系数线性方程组 V 函数的公式　根据 Барбашин 的方法求 V 函数的公式.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，要求的正定二次型为

$$V(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}x_ix_j,$$

而

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2W(\boldsymbol{x})=2\sum_{i,j=1}^{n}w_{ij}x_ix_j$$

为负定二次型.

当 $n=2$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$，根据矩阵方程(25.12)有

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}w_{11} & w_{12}\\ w_{12} & w_{22}\end{pmatrix},$$

展开后为

$$
\begin{cases}
a_{11}p_{11}+a_{21}p_{12} & =w_{11}, \\
a_{12}p_{11}+(a_{11}+a_{22})p_{12}+a_{21}p_{22} & =2w_{12}, \\
a_{12}p_{12}+a_{22}p_{22} & =w_{22}.
\end{cases}
$$

解此线性代数方程组得

$$
p_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \qquad p_{12}=\frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \qquad p_{22}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta},
$$

其中

$$
\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{11}=\begin{vmatrix} w_{11} & a_{21} & 0 \\ 2w_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ w_{22} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},
$$

$$
\Delta_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & w_{11} & 0 \\ a_{12} & 2w_{12} & a_{21} \\ 0 & w_{22} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & w_{11} \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} & 2w_{12} \\ 0 & a_{12} & w_{22} \end{vmatrix}.
$$

所以 V 函数可以写成

$$
V=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ w_{11} & a_{11} & a_{21} & 0 \\ 2w_{12} & a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ w_{22} & 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.
$$

同理,当 $n=3$ 时,V 函数为

$$
V=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & x_2^2 & 2x_2x_3 & x_3^2 \\ w_{11} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 2w_{12} & a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ 2w_{13} & a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & 0 & a_{21} & a_{31} \\ w_{22} & 0 & a_{12} & 0 & a_{22} & a_{32} & 0 \\ 2w_{23} & 0 & a_{13} & a_{12} & a_{23} & a_{22}+a_{33} & a_{32} \\ w_{33} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},
$$

其中 Δ 为方程组(25.12)中关于 p_{ij} 的系数行列式.

对一般的 n，作

$$V=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & \cdots & 2x_ix_k & \cdots & x_n^2 \\ w_{11} & a_{11} & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2w_{jl} & a(11,jl) & \cdots & a(ik,jl) & \cdots & a(nn,jl) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{nn} & a(11,nn) & \cdots & a(ik,nn) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$a(ik,jl)$表示$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2W$ 两边 x_jx_l 对应项系数相等后所得到的方程组(25.12)中 p_{ik} 的系数. 它们满足

$$a(ik,jl)=a(ki,jl)=a(ki,lj),$$

$$a(ik,jl)=\begin{cases} 0, & i\neq j,\ k\neq l, \\ a_{kl}, & i=j,\ k\neq l, \\ a_{ii}+a_{kk}, & i=j,\ k=l,\ i\neq k, \\ a_{ii}, & i=j=k=l, \end{cases}$$

其中 Δ 为(25.12)中关于 p_{ij} 的系数行列式.

例 25.5.2 作线性系统 $\dot{x}=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}x$ 的 V 函数，验证零解的稳定性.

解 取 $W=-x_1^2-x_2^2$，作 V 函数如下

$$V(x_1,x_2)=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{160}(56x_1^2+64x_1x_2+48x_2^2)$$

$$=\frac{1}{20}(7x_1^2+8x_1x_2+6x_2^2),$$

其中 $\Delta=-160$，V 定正，$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2W$ 负定，所以零解是渐近稳定的.

例 25.5.3 确定 $\dddot{x}+a\ddot{x}+b\dot{x}+cx=0$ 的稳定范围.

解 令 $x_1=x$，得等价方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-ax_2+x_3,\\ \dot{x}_3=-cx_1-bx_2.\end{cases}$$

容易求出 $\Delta=c(ab-c)$，作 V 使 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-2x_2^2$.

$$V=\frac{-1}{c(ab-c)}\begin{vmatrix}0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & x_2^2 & 2x_2x_3 & x_3^2\\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & -b & 0 & -c & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -c\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -a & -b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -a & -b\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{ab-c}(acx_1^2+2cx_1x_2+bx_2^2+x_3^2).$$

只要 $a>0$，$c>0$，$ab-c>0$，零解是稳定的，而且是渐近稳定的.

取二次型作为 V 函数，以二阶系统为例.

(1) 二次型函数 $V(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ 为正定(负定)的充要条件为：$a>0(a<0)$ 和 $4ac-b^2>0$.

(2) 例

① 确定零解的稳定性

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x+xy^2,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x^2y-y^3.$$

解 作 $V(x,y)=ax^2+by^2$（a，b 待定常数），其沿方程组的全导数为

$$\frac{dV}{dt}=-2ax^2+(2a-4b)x^2y^2-2by^4.$$

选择 a,b 使 V 正定，$\frac{dV}{dt}$负定. 试令 $2a-4b=0$，取 $b=1,a=2$. 因而有 $V(x,y)=2x^2+y^2$ 正定的，$\frac{dV}{dt}=-4x^2-2y^4$ 为负定的. 所以零解是渐近稳定的.

② $\frac{dx}{dt}=-y+\alpha x^3,\frac{dy}{dt}=x+\alpha y^3$，

其线性近似不能判定非线性方程组零解的稳定性. 现取正定函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，其沿方程组的全导数为：$\frac{dV}{dt}=\alpha(x^4+y^4)$当 $\alpha<0$ 时，$\frac{dV}{dt}$负定，零解渐近稳定；当 $\alpha>0$ 时，$\frac{dV}{dt}$正定，零解不稳定；当 $\alpha=0$，$\frac{dV}{dt}=0$，零解是稳定的.

(3) 变系数线性系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{A}(t)$的元素在所考虑的域中连续. 取 $V=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{P}$ 为对称矩阵，V 沿方程组的全导数为

$$\frac{dV}{dt}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{x}.$$

令$\frac{dV}{dt}=-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{Q}$ 为给定的正定对称常数矩阵，于是有

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}+\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}. \tag{25.13}$$

只要求出此矩阵微分方程组的一组特解，就可决定 $\boldsymbol{P}(t)$，从而求出 V 函数.

例 25.5.4 二阶方程组

$$\dot{x}_1=\frac{1-t}{2t}x_1+\frac{1-t}{t}x_2, \qquad \dot{x}_2=\frac{1+t}{t}x_1+\frac{1+t^2}{2t(1-t)}x_2.$$

取 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$,则式(25.13)为

$$\begin{cases}\dot{p}_{11}+\dfrac{1-t}{t}p_{11}+\dfrac{2(1-t)}{t}p_{12}=-1,\\ \dot{p}_{12}+\dfrac{1-t}{t}p_{11}+\left[\dfrac{1-t}{2t}+\dfrac{1+t^2}{2t(1-t)}\right]p_{12}+\dfrac{1+t}{t}p_{22}=0,\\ \dot{p}_{22}+\dfrac{2(1-t)}{t}p_{12}+\dfrac{1+t^2}{t(1-t)}p_{22}=-1.\end{cases}$$

这方程组有一特解:

$$p_{11}=1+\frac{1}{t}, \quad p_{12}=0, \quad p_{22}=1-\frac{1}{t},$$

故

$$V=\left(1+\frac{1}{t}\right)x_1^{\,2}+\left(1-\frac{1}{t}\right)x_2^2.$$

当 $t\geqslant 2$ 时,V 为正定无限大函数,具有无限小上界,而 $\dot{V}$ 定负,故零解全局渐近稳定.

利用广义 Hurwitz 条件作 V 函数的方法. 系统

$$\dot{x}_i=\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(x_j), \qquad i=1,2,\cdots,n, \tag{25.14}$$

其中 $f_{ij}(0)=0$,f_{ij} 单值连续且保证系统解存在惟一. 将方程组(25.14)中的非线性项 $f_{ij}(x_j)$ 写成 $\dfrac{f_{ij}(x_j)}{x_j}x_j$,把 $\dfrac{f_{ij}(x_i)}{x_j}$ 看成常数,写出此时方程组(25.14)的 Hurwitz 条件,这就是所谓的**广义 Hurwitz 条件**. 在作 V 函数时,充分利用广义 Hurwitz 条件,先给出 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 和 V 的一部分,再根据 V 和 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ 之间的关系,利用待定系数法决定其余部分. 具体做法见下面例子.

例 25.5.5 (1) $\dot{x}=f(x)+by, \qquad \dot{y}=cx+dy \qquad (25.15)$

其中 b,c,d 为常数. $f(0)=0$,$f(x)$为单值连续. 系统(25.15)的广

义 Hurwitz 条件为

$$\frac{f(x)}{x}+d<0,\quad \frac{df(x)}{x}-bc>0,\qquad x\neq 0$$

或

$$x[f(x)+dx]<0,\quad x[df(x)-bcx]>0,\qquad x\neq 0.\tag{25.16}$$

作如下形式的 V 函数：

$$V=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+\delta\int_0^x[df(x)-bcx]\mathrm{d}x,\tag{25.17}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 待定，使 V 沿系统(25.15)对 t 的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=[df(x)-bcx][f(x)+dx].\tag{25.18}$$

求(25.17)沿系统(25.15)的全导数，并与式(25.18)右端比较同类项的系数，得

$$\delta=1,\quad \alpha=\frac{d^2}{2},\quad \beta=-\frac{bd}{2},\quad \gamma=\frac{b^2}{2},$$

故得

$$V=\frac{1}{2}(dx-by)^2+\int_0^x[df(x)-bcx]\mathrm{d}x.$$

由条件(25.16)V 为定正，而由式(25.18)$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，它仅在 $x=0$ 时为零. 但在 $x=0$ 上不包含(0,0)以外的正半轨线. 如果还满足条件 $\int_0^x[df(x)-bcx]\mathrm{d}x\to\infty$（当 $|x|\to\infty$ 时），则系统(25.15)的零解是全局渐近稳定的.

(2) $$\dot{x}=f_1(x)+by,\qquad \dot{y}=f_2(x)+dy\tag{25.19}$$

其中 $f_1(0)=f_2(0)=0$，$f_1(x),f_2(x)$ 连续，保证解惟一. 系统(25.19)的广义 Hurwitz 条件为

$$x[f_1(x)+dx]<0,\quad x[df_1(x)-bf_2(x)]>0,\quad x\neq 0.\tag{25.20}$$

求

$$V = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta\int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]\mathrm{d}x \quad (25.21)$$

使其沿系统(25.19)对 t 的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = [f_1(x) + dx][df_1(x) - bf_2(x)]. \quad (25.22)$$

对(25.21)具体求导，并与(25.22)比较同类项的系数，得

$$\delta = 1, \quad \alpha = \frac{1}{2}d^2, \quad \beta = -\frac{1}{2}bd, \quad \gamma = \frac{1}{2}b^2,$$

故

$$V = \frac{1}{2}(dx - by)^2 + \int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]\mathrm{d}x.$$

由条件(25.20)V 为定正，由(25.22)式得 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$，且仅在 $x=0$ 时变为零，而在 $x=0$ 上没有异于(0,0)的正半轨线，故系统(25.19)的零解全局渐近稳定的充分条件为(25.20)和

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]\mathrm{d}x = +\infty.$$

可证系统(25.19)零解全局渐近稳定的充要条件为

$$\lim_{|x|\to\infty} \left\{[f_1(x) + dx]\operatorname{sgn} x - \int_0^x [df_1(x) - bf_2(x)]\mathrm{d}x\right\} = -\infty.$$

(3) $\dddot{x} + a\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + f(x) = 0$，$a$ 为常数，$f(x)$ 连续可微，$\varphi(\dot{x})$ 连续，且 $\varphi(0) = f(0) = 0$. 其等价方程组为

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = z - ay, \qquad \dot{z} = -f(x) - \varphi(y). \quad (25.23)$$

此系统的广义 Hurwitz 条件为

$$a > 0, \quad \frac{\varphi(y)}{y} > 0, \quad y \neq 0, \quad \frac{f(x)}{x} > 0, \quad x \neq 0, \quad (25.24)$$

$$a\frac{\varphi(y)}{y} - \frac{f(x)}{x} > 0, \qquad x \neq 0,\ y \neq 0. \quad (25.25)$$

设对应系统(25.23)的线性系统为

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = z - ay, \qquad \dot{z} = -bx - cy. \quad (25.26)$$

对线性系统作二次型 V_1 函数，使其沿(25.26)的全导数为：$\dot{V}_1=-(ac-b)y^2$. 不难求出

$$V_1=\frac{ab}{2}x^2+bxy+\frac{c}{2}y^2+\frac{1}{2}z^2.$$

把 $\frac{1}{2}bx^2=\int_0^x bx\,\mathrm{d}x$ 换成 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x$，$\frac{c}{2}y^2=\int_0^y cy\,\mathrm{d}y$ 换成 $\int_0^y \varphi(y)\mathrm{d}y$，对于非线性系统(25.23)作其 V 函数为

$$V=a\int_0^x f(x)\mathrm{d}x+f(x)y+\int_0^y \varphi(y)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}z^2,$$

其沿(25.23)的导数为

$$\dot{V}=-\left[a\frac{\varphi(y)}{y}-f'(x)\right]y^2.$$

可证得，如果 $a>0$，$f(x)$，$\varphi(y)$ 满足下列条件：$f(x)x>0\ (x\neq0)$，$a\frac{\varphi(y)}{y}-f'(x)>0$（当 $y\neq0$），及

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}\left[a\int_0^x f(x)\mathrm{d}x+f(x)y+\int_0^y \varphi(y)\mathrm{d}y\right]=\infty,$$

系统(25.23)零解为全局渐近稳定.

变量分离方法　研究方程

$$\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+g(\dot{x})f(x)=0, \tag{25.27}$$

其等价系统为

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-g(y)f(x)-\varphi(y). \tag{25.28}$$

利用变量分离法，寻找形如

$$V=F(x)+\Phi(y)$$

的 V 函数，其沿系统(25.28)的导数为

$$\dot{V}=F'(x)y+\Phi'(y)[-g(y)f(x)-\varphi(y)].$$

现在要求 $\dot{V}$ 也具有变量可分离的形式，即要求恒满足条件

$$F'(x)y-\Phi'(y)g(y)f(x)=0.$$

分离变量得

$$\frac{F'(x)}{f(x)}=\frac{\Phi'(y)g(y)}{y},$$

此式两边分别为 x,y 的函数，只有当两边都等于常数时才可能成立，令此常数为 1，由此得

$$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x, \qquad \Phi(y)=\int_0^y \frac{y}{g(y)}\mathrm{d}y,$$

即

$$V=\int_0^x f(x)\mathrm{d}x+\int_0^y \frac{y}{g(y)}\mathrm{d}y,$$

$$\dot{V}=-y\frac{\varphi(y)}{g(y)}.$$

故系统(25.28)零解全局渐近稳定的条件为

(1) $xf(x)>0, x\neq 0, f(0)=0$;

(2) $g(y)>0, y\neq 0$;

(3) $y\varphi(y)>0, y\neq 0$;

(4) $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x\to\infty,\ |x|\to\infty$;

(5) $\int_0^y \frac{y}{g(y)}\mathrm{d}y\to\infty,\ |y|\to\infty$.

例 25.5.6
$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\sin\theta_0-\sin(\theta_0+x)-\eta z\sin(\theta_0+x)\\ \qquad +\zeta[\sin 2\theta_0-\sin 2(\theta_0+x)],\\ \dot{z}=\eta y\sin(\theta_0+x)-\alpha z.\end{cases} \tag{25.29}$$

此系统为同步电动机的过渡方程组．其中 η、ζ、α 为非零常数，x 代表工作角的偏差，z 代表由于负载对电动机影响所引起的电压偏差.

作 V 函数

$$V=\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z).$$

求出其沿(25.29)的导数

$$\dot{V}=\varphi'(x)y+\psi'(y)\{\sin\theta_0-\sin(\theta_0+x)-\eta z\sin(\theta_0+x)+\zeta[\sin 2\theta_0-\sin 2(\theta_0+x)]\}+\chi'(z)[\eta y\sin(\theta_0+x)-\alpha z].$$

要求$\dot{V}$仅为 z 的函数,这只要下列两个等式成立即可:

$$\varphi'(x)y+\psi'(y)\{\sin\theta_0-\sin(\theta_0+x)+\zeta[\sin 2\theta_0-\sin 2(\theta_0+x)]\}=0, \tag{25.30}$$

$$-\psi'(y)z+\chi'(z)y=0. \tag{25.31}$$

由(25.31)得

$$\frac{\chi'(z)}{z}=\frac{\psi'(y)}{y}=\text{常数}. \tag{25.32}$$

令比例常数为 1,推得

$$\chi(z)=\frac{1}{2}z^2,\qquad \psi(y)=\frac{1}{2}y^2.$$

把 $\psi'(y)=y$ 代入式(25.30)得

$$\varphi(x)=\int_0^x\{\sin(\theta_0+x)-\sin\theta_0+\zeta[\sin 2(\theta_0+x)-\sin 2\theta_0]\}\mathrm{d}x,$$

所求的 V 沿(25.29)的导数为

$$\dot{V}=-\alpha z^2.$$

易见,若 $\alpha>0$,则$\dot{V}\leqslant 0$,且仅在 $z=0$ 上变为零.

设 θ_0,ζ 使得存在 $l>0$,满足条件

$$x\{\sin(\theta_0+x)-\sin\theta_0+\zeta[\sin 2(\theta_0+x)-\sin 2\theta_0]\}>0,\qquad |x|<l. \tag{25.33}$$

由条件(25.33)知,在 $z=0$ 上的区域$|x|<l$ 之内,除原点外无其他平衡点. 故可断言:如果 $\alpha>0$ 且存在 $l>0$ 满足(25.33),则系统(25.29)的零解渐近稳定.

Walker(沃克)及 Clark(克拉克)的积分方法　考虑非线性自治系统

$$\frac{d^n x}{dt^n}+g\left(x,\dot{x},\cdots,\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)=0. \tag{25.34}$$

其等价系统为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3,\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}=x_n,\\ \dot{x}_n=-g(x_1,x_2,\cdots,x_n).\end{cases} \tag{25.35}$$

作 V 函数的积分方法其步骤如下：

(1) $$\frac{\partial H}{\partial x_1}=h_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=h_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_{n-2}}=h_{n-2}(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_{n-1}}=g(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_n}=x_n+h_n(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

这里 $h_i=\int\frac{\partial}{\partial x_i}g(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n)dx_{n-1}$.

(2) $$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_1}&=\frac{\partial H}{\partial x_1}+f_1,\\ \frac{\partial V}{\partial x_2}&=\frac{\partial H}{\partial x_2}+f_2,\\ &\vdots\\ \frac{\partial V}{\partial x_n}&=\frac{\partial H}{\partial x_n}+f_n,\end{aligned} \tag{25.36}$$

f_i 是待确定的函数，满足

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

(3) $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$

$$=x_2\frac{\partial V}{\partial x_1}+\cdots+\left(-g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial V}{\partial x_n}\right).$$

使$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$为负定或者负半定,来确定 $f_1,f_2,\cdots,f_n$.

(4) 用(25.36)的线积分来确定 V.

$$V=\int_0^{x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1,0,\cdots,0)\mathrm{d}x_1+\int_0^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1,x_2,0,\cdots,0)\mathrm{d}x_2$$

$$+\cdots+\int_0^{x_n}\frac{\partial V}{\partial x_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

例 25.5.7 (1) $$\dddot{x}+a\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+f(x)=0, \tag{25.37}$$

a 为常数,$f(x)$连续可微,$\varphi(\dot{x})$连续,且 $\varphi(0)=f(0)=0$,其等价方程组为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3,\\ \dot{x}_3=-ax_3-\varphi(x_2)-f(x_1)=-g(x_1,x_2,x_3).\end{cases}$$

① $$\frac{\partial H}{\partial x_1}=h_1=\int\frac{\partial}{\partial x_1}g(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2=x_2\frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=g(x_1,x_2,x_3)=ax_3+\varphi(x_2)+f(x_1),$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_3}=x_3+\int\frac{\partial}{\partial x_3}g(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2=x_3+ax_2.$$

② $$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{\partial H}{\partial x_1}+f_1=x_2\frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1}+f_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=\frac{\partial H}{\partial x_2}+f_2=ax_3+\varphi(x_2)+f(x_1)+f_2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3}=\frac{\partial H}{\partial x_3}+f_3=x_3+ax_2+f_3,$$

其中$\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

③ $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}$$

$$=\left[x_2\frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1}+f_1\right]x_2+[ax_3+\varphi(x_2)+f(x_1)+f_2]x_3$$

$$-(x_3+ax_2+f_3)[ax_3+\varphi(x_2)+f(x_1)]$$

$$=-a^2x_2x_3-ax_2f(x_1)-x_2^2\left[a\frac{\varphi(x_2)}{x_2}-\frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\right]$$

$$+x_2f_1+x_3f_2-f_3[ax_3+\varphi(x_2)+f(x_1)].$$

如果假定

$$a\frac{\varphi(x_2)}{x_2}-\frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1}>0,$$

并选取 $f_1=af(x_1),f_2=a^2x_2,f_3=0$. 则有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-x_2^2\left[a\frac{\varphi(x_2)}{x_2}-\frac{\mathrm{d}f(x_1)}{\mathrm{d}x_1}\right]$$

是负半定的.

④ $$V=\int_0^{x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1,0,0)\mathrm{d}x_1+\int_0^{x_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1,x_2,0)\mathrm{d}x_2$$

$$+\int_0^{x_3}\frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3$$

$$=\int_0^{x_1}af(x_1)\mathrm{d}x_1+\int_0^{x_2}[\varphi(x_2)+f(x_1)+a^2x_2]\mathrm{d}x_2$$

$$+\int_0^{x_3}(x_3+ax_2)\mathrm{d}x_3$$

$$=\int_0^{x_1}af(x_1)\mathrm{d}x_1+\int_0^{x_2}\varphi(x_2)\mathrm{d}x_2+f(x_1)x_2+\frac{a^2}{2}x_2^2$$

$$+\frac{1}{2}{x_3}^2+ax_2x_3$$

$$=\frac{1}{2}(ax_2+x_3)^2+\int_0^{x_2}\varphi(u)\mathrm{d}u+x_2f(x_1)+a\int_0^{x_1}f(v)\mathrm{d}v.$$

如果假设 $a>0,\dfrac{f(x_1)}{x_1}>0$,并且当 $x\to\infty$ 时有 $V\to\infty$,则系统(25.37)的零解是渐近稳定的.

$$(2)\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3,\\ \dot{x}_3=-3x_1^2x_3-2x_2-6x_1x_2^2-x_1^3.\end{cases}\tag{25.38}$$

① $$\frac{\partial H}{\partial x_1}=\int\frac{\partial}{\partial x_1}g(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2$$
$$=\int(6x_1x_3+6x_2^2+3x_1^2)\mathrm{d}x_2$$
$$=6x_1x_2x_3+2x_2^3+3x_1^2x_2,$$
$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=3x_1^2x_3+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3,$$
$$\frac{\partial H}{\partial x_3}=x_3+\int\frac{\partial}{\partial x_3}g(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_2=x_3+3x_1^2x_2.$$

② $$\frac{\partial V}{\partial x_1}=6x_1x_2x_3+2x_2^3+3x_1^2x_2+f_1,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_2}=3x_1^2x_3+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3+f_2,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x_3}=x_3+3x_1^2x_2+f_3.$$

③ $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}$$
$$=\frac{\partial V}{\partial x_1}x_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}x_3-\frac{\partial V}{\partial x_3}(3x_1^2x_3+2x_2+6x_1x_2^2+x_1^3)$$
$$=(6x_1x_2^2-9x_1^4x_2)x_3+(2x_2^3-18x_1^3x_2^2-3x_1^5)x_2$$
$$-3x_1^2x_2^2+x_2f_1+x_3f_2-f_3(3x_1^2x_3+2x_2$$
$$+6x_1x_2^2+x_1^3).$$

如果取

$$f_1=(-2x_2^3+18x_1^3x_2^2+3x_1^5),$$

$$f_2 = (-6x_1x_2^2 + 9x_1^4x_2),$$
$$f_3 = 0,$$

则

$$\dot{V} = -3x_1^2x_2^2 \leqslant 0.$$

④ $$V = \int_0^{x_1} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1,0,0)\mathrm{d}x_1 + \int_0^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1,x_2,0)\mathrm{d}x_2 + \int_0^{x_3} \frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3$$
$$= \frac{1}{2}(x_3 + 3x_1^2x_2)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^3\right)^2 + \frac{1}{4}x_1^6$$

是全平面正定的 V 函数. 故系统(25.38)的零解是全局渐近稳定的.

一般非线性自治系统作 V 函数的方法　设系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}, \tag{25.39}$$

其右端函数 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 对 $x_i(i = 1,\cdots,n)$ 连续可微,且 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. 将 $\boldsymbol{X}$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 处展开,其 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

作关于 $\boldsymbol{X}$ 的二次型的 V 函数

$$V = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X},$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 为对称的正定常数矩阵. V 沿(25.39)对 t 的全导数为

$$\dot{V} = \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{J})\boldsymbol{X}.$$

由于假定 V 是正定的,为了决定系统(25.39)的稳定性,必须考察

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{J} = -\boldsymbol{Q}.$$

若 Q 是正定的，就保证了系统的渐近稳定性.

例 25.5.8 $\dot{x}_1=-x_1$，$\dot{x}_2=x_1-x_2-x_2^3$.

解 此系统的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1-3x_2^2\end{pmatrix}.$$

作 $V=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=x_1^2+(x_1-x_2-x_2^3)^2$，即取 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$，于是

$$\dot{V}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{J})\boldsymbol{X},$$

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2-6x_2^2\end{pmatrix}.$$

由于 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{J}$ 对所有的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 是负定的，所以 $\boldsymbol{x}=0$ 是渐近稳定的. 此外，当 $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ 时 $V\to\infty$，所以系统的零解是全局渐近稳定的.

能量度量算法 对有广义能量函数的系统，Wall（沃尔）的能量度量算法求 V 函数的过程归纳为下面 6 个步骤：

（1）将所研究的系统写成一阶联立微分方程组

$$\dot{x}_i=F_i(\boldsymbol{x}),\qquad i=1,\cdots,n, \tag{25.40}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

（2）将方程组写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_j}=\frac{F_i(\boldsymbol{x})}{F_j(\boldsymbol{x})},\qquad i<j, \tag{25.41}$$

共有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个方程.

（3）再将以上方程组写成

$$F_j(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i=F_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_j,\qquad i<j. \tag{25.42}$$

（4）用适当的代换及加法，将(25.42)化为

$$w=w_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1+\cdots+w_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_n=0,$$

这里的 $w_1(\boldsymbol{x}),\cdots,w_n(\boldsymbol{x})$ 由(25.42)中 $\mathrm{d}x_i$ 前面的系数所决定.

（5）$V(\boldsymbol{x})=\int_0^{x_1}w_1(\tau_1,0,\cdots,0)\mathrm{d}\tau_1+\int_0^{x_2}w_2(x_1,\tau_2,0,\cdots,0)\mathrm{d}\tau_2$

$$+\cdots+\int_0^{x_n} w_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},\tau_n)\mathrm{d}\tau_n.$$

(6) 算出 $V(\boldsymbol{x})$ 沿系统(25.40) 的全导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\dot{x}_n\\&=\frac{\partial V}{\partial x_1}F_1(\boldsymbol{x})+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}F_n(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

由所得的 $V(\boldsymbol{x})$和$\dot{V}(\boldsymbol{x})$,再利用稳定性的有关定理,可以得出系统零解稳定性的结论.

Stewart(斯图尔特)算子变换方法　此方法是将上述能量度量算法的步骤用矩阵式子表示出来.以三阶方程组为例说明.

设系统为

(1)
$$\begin{cases}\dot{x}_1=F_1(\boldsymbol{x}),\\ \dot{x}_2=F_2(\boldsymbol{x}),\\ \dot{x}_3=F_3(\boldsymbol{x}).\end{cases}\tag{25.43}$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}=\dfrac{F_1}{F_2},\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_3}=\dfrac{F_2}{F_3},\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_3}=\dfrac{F_1}{F_3}.$

(3)
$$\begin{cases}-F_2\mathrm{d}x_1+F_1\mathrm{d}x_2=0, & (25.44\text{a})\\ -F_3\mathrm{d}x_1+F_1\mathrm{d}x_3=0, & (25.44\text{b})\\ -F_3\mathrm{d}x_2+F_2\mathrm{d}x_3=0. & (25.44\text{c})\end{cases}$$

(4) 将式(25.44a)—式(25.44c),可以写成

$$(1,1,1)\begin{pmatrix}-F_2\mathrm{d}x_1 & F_1\mathrm{d}x_2 & 0\\ -F_3\mathrm{d}x_1 & 0 & F_1\mathrm{d}x_3\\ 0 & -F_3\mathrm{d}x_2 & F_2\mathrm{d}x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0,$$

即

$$(F_1,F_2,F_3)\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}x_3\end{pmatrix}=0.$$

令

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\\mathrm{d}x_2\\\mathrm{d}x_3\end{pmatrix},$$

上式即为

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0,\qquad \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})=(w_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\boldsymbol{w}_n(\boldsymbol{x})),$$

所以

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{TF}. \tag{25.45}$$

(5) $$V=\int_0^{x_1}w_1(\tau_1,0,0)\mathrm{d}\tau_1+\int_0^{x_2}w_2(x_1,\tau_2,0)\mathrm{d}\tau_2+\int_0^{x_3}w_3(x_1,x_2,\tau_3)\mathrm{d}\tau_3,$$

定义一个特殊的积分运算

$$I_i[h(\boldsymbol{x})]=\int_0^{x_i}h(x_1,\cdots,x_{i-1},\tau_i,0,\cdots,0)\mathrm{d}\tau_i, \tag{25.46}$$

则将 $V(\boldsymbol{x})$ 写成

$$V(\boldsymbol{x})=I_1w_1+I_2w_2+I_3w_3$$

或者,用矩阵形式写成

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w},\qquad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}I_1\\I_2\\I_3\end{pmatrix},$$

将(25.45)代入,得

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{TF}. \tag{25.47}$$

(6) $$\dot V(\boldsymbol{x})=\dot x_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+\dot x_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\dot x_3\frac{\partial V}{\partial x_3}.$$

定义一个偏微分运算 D

$$\mathrm{D}_i[h(\boldsymbol{x})]=\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}, \tag{25.48}$$

则上式可写成

$$\dot V(\boldsymbol{x})=(\dot x_1\mathrm{D}_1+\dot x_2\mathrm{D}_2+\dot x_3\mathrm{D}_3)V(\boldsymbol{x}),$$

或者，其矩阵形式为

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\dot{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}V, \qquad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}\mathrm{D}_1\\ \mathrm{D}_2\\ \mathrm{D}_3\end{pmatrix},$$

将(25.43)，(25.47)代入，得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}.$$

总结如下：如果 n 阶系统为

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}F_1(\boldsymbol{x})\\ \vdots\\ F_n(\boldsymbol{x})\end{pmatrix},$$

则

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}, \qquad \dot{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F},$$

其中

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{I}$ 是由(25.46)所定义的特殊的积分算子向量，$\boldsymbol{D}$ 是由(25.48)所定义的微分算子向量.

如果上述的第 4 步骤，将(25.44)中的 $a_1(\boldsymbol{x})\times(1)+a_2(\boldsymbol{x})\times(2)+a_3(\boldsymbol{x})\times(3)$（这里 a_1,a_2,a_3 为 x_1,x_2,x_3 的函数），可以写成

$$(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}-F_2\mathrm{d}x_1 & F_1\mathrm{d}x_2 & 0\\ -F_3\mathrm{d}x_1 & 0 & F_1\mathrm{d}x_3\\ 0 & -F_3\mathrm{d}x_2 & F_2\mathrm{d}x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=0,$$

即

$$(F_1,F_2,F_3)\begin{pmatrix}0 & a_1 & a_2\\ -a_1 & 0 & a_3\\ -a_2 & -a_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \mathrm{d}x_3\end{pmatrix}=0. \qquad (25.49)$$

记

$$T^{*}=\begin{pmatrix}0 & -a_1 & -a_2\\ a_1 & 0 & -a_3\\ a_2 & a_3 & 0\end{pmatrix},$$

(25.49)写成

$$F^{\mathrm{T}}T^{*\mathrm{T}}\mathrm{d}x=0, \quad 故 \quad w=T^{*}F.$$

(25.49)称为加权公式.

例 25.5.9 下面用能量度量算法和 Stewart 算子变换方法求 V 函数,考虑方程

$$\dddot{x}+(1+\dot{x}^2)\ddot{x}+\dot{x}+x=0. \tag{25.50}$$

(1) 将方程(25.50)写成下面的方程组

$$\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=x_3, \quad \dot{x}_3=-x_2^2x_3-x_3-x_2-x_1. \tag{25.51}$$

(2) 由(25.51)得

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2}=\frac{x_2}{x_3}, \qquad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_3}=\frac{x_3}{-(x_2^2x_3+x_3+x_2+x_1)}, \tag{25.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_3}=\frac{x_2}{-(x_2^2x_3+x_3+x_2+x_1)}.$$

(3) 再将(25.52)写成

$$x_3\mathrm{d}x_1-x_2\mathrm{d}x_2=0, \tag{25.53a}$$

$$x_3\mathrm{d}x_3+(x_2^2x_3+x_3+x_2+x_1)\mathrm{d}x_2=0, \tag{25.53b}$$

$$x_2\mathrm{d}x_3+(x_2^2x_3+x_3+x_2+x_1)\mathrm{d}x_1=0. \tag{25.53c}$$

由方程(25.53a)得 $x_3\mathrm{d}x_1=x_2\mathrm{d}x_2$,代入方程(25.53c),得

$$x_2\mathrm{d}x_3+(x_2^3+x_2)\mathrm{d}x_2+(x_2+x_1)\mathrm{d}x_1=0. \tag{25.53d}$$

由(25.53b)+(25.53d)得

$$(x_2+x_1)\mathrm{d}x_1+(x_2^2x_3+2x_2+x_1+x_2^3+x_3)\mathrm{d}x_2+(x_2+x_3)\mathrm{d}x_3=0.$$

(4) 因此,

$$w_1=x_1+x_2, w_2=x_2^2x_3+2x_2+x_1+x_2^3+x_3, w_3=x_2+x_3.$$

(5) $V=\int_0^{x_1}\tau_1\mathrm{d}\tau_1+\int_0^{x_2}(x_1+2\tau_2+\tau_2^3)\mathrm{d}\tau_2+\int_0^{x_3}(x_2+\tau_3)\mathrm{d}\tau_3$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}x_2^4.$$

(6) $\dot{V} = - x_2^2 x_3^2$.

系统是全局稳定的.

下面用算子变换方法求 V 函数.

(1) $V = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T} \boldsymbol{F}$

$$= (I_1, I_2, I_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -(x_2^2+1)x_3 - x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2,$$

$$\dot{V} = -(x_2 x_3)x_2^2 - x_2^2 x_3^2.$$

虽然 V 是正定的,但要$\dot{V}$是负的,仅当 $x_2 x_3 > 0$. 这就比 Wall 方法增加了限制 $x_2 x_3 > 0$.

(2) 若取 $\boldsymbol{T}$ 为加权公式 $\boldsymbol{T}^*$,

$$\boldsymbol{T}^* = \begin{pmatrix} 0 & -(x^2+1) & -1 \\ (x^2+1) & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

给出

$$V = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{T}^* \boldsymbol{F} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{4}x_2^4,$$

$$\dot{V} = -(x_2 x_3)^2,$$

这就与 Wall 所得的结果一致.

变量-梯度法　变量-梯度法建立在这样的基础上:如果存在着特殊的 V 函数,因而能证明给定系统的稳定性,则这个 V 函数的单值梯度也是存在的. 设系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}).$$

设要求的 V 函数为 $\boldsymbol{x}$ 的显函数

$$V(\boldsymbol{x})=V(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

V 对 t 的全导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)(\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)^{\mathrm{T}}\\&=\operatorname{grad}V\cdot\dot{\boldsymbol{x}}=\delta\cdot\dot{\boldsymbol{x}},\end{aligned}\tag{25.54}$$

其中 $\delta=\operatorname{grad}V$ 是函数 V 的梯度，是个 n 维行向量. V 可由 $\operatorname{grad}V$ 沿向量 $\boldsymbol{x}$ 的线积分计算求得，即

$$V=\int_0^x\delta\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

积分的简单路线由下式给出

$$\begin{aligned}V=&\int_0^{x_1}\delta_1(\tau_1,0,\cdots,0)\mathrm{d}\tau_1+\int_0^{x_2}\delta_2(x_1,\tau_2,0,\cdots,0)\mathrm{d}\tau_2+\cdots\\&+\int_0^{x_n}\delta_n(x_1,\cdots,x_{n-1},\tau_n)\mathrm{d}\tau_n,\end{aligned}\tag{25.55}$$

其中 $\delta_i(i=1,\cdots,n)$是向量 $\boldsymbol{\delta}$ 在 x_i 指向的分量. V 是纯量函数，其梯度的旋度必定等于零，于是有 $\operatorname{rot}\boldsymbol{\delta}=\operatorname{rot}(\operatorname{grad}V)=0$，旋度方程可写成

$$\frac{\partial\delta_i}{\partial x_j}=\frac{\partial\delta_j}{\partial x_i},\qquad i,j=1,2,\cdots,n,\tag{25.56}$$

这样的方程总数为 $n(n-1)/2$ 个，于是确定满足稳定性定理的 V 函数问题，转化为确定 V 函数的梯度 δ，使得 $\operatorname{rot}\boldsymbol{\delta}=0$，计算 V 函数的步骤如下：

(1) 取 $\boldsymbol{\delta}$ 为下列形式的向量

$$\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix},$$

系数 a_{ij} 可以是常数或是 t 的函数和(或) $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数. a_{ij} 选择为常数或 t 的函数是方便的. 有些 a_{ij} 可以选取为零，或者加

给$\dot{V}$的约束条件，或者由旋度方程来确定；

(2) 由(25.54)确定$\dot{V}$；

(3) 限制$\dot{V}$为定号的或至少是常号的；

(4) 应用旋度方程(25.56)确定 $\boldsymbol{\delta}$ 中尚未确定的系数；

(5) 根据(4)所得的结果可能改变$\dot{V}$，重新校核$\dot{V}$；

(6) 利用积分公式(25.55)确定 V；

(7) 确定渐近稳定性的范围.

例 25.5.10 利用变量-梯度法作系统

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_2$$

的 V 函数.

解 设 $\boldsymbol{\delta} = \text{grad } V = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + 2x_2)$，

$$\begin{aligned}\dot{V} = \boldsymbol{\delta} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\dot{x}_1 + (a_{21}x_1 + 2x_2)\dot{x}_2 \\ &= -a_{11}x_1^2 - (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + 2a_{11}x_1^3x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2 - 2x_2^2.\end{aligned}$$

试探地选取 $a_{11} = 1$，$a_{12} = a_{21} = 0$，则

$$\dot{V} = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - 2x_2^2.$$

如果 $1 - 2x_1x_2 > 0$，则$\dot{V}$是负定的，而

$$\boldsymbol{\delta} = (x_1, 2x_2).$$

注意到$\dfrac{\partial \delta_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \delta_2}{\partial x_1} = 0$ 是满足旋度方程的.

$$V = \int_0^{x_1} \tau_1 \mathrm{d}\tau_1 + \int_0^{x_2} 2\tau_2 \mathrm{d}\tau_2 = \frac{x_1^2}{2} + x_2^2.$$

在 $x_1x_2 < \dfrac{1}{2}$ 范围内，V 正定，$\dot{V}$ 负定. 所以系统是渐近稳定的.

若取 $a_{11} = \dfrac{2}{(1 - x_1x_2)^2}$，$a_{12} = \dfrac{-x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2}$，$a_{21} = \dfrac{x_1^2}{(1 - x_1x_2)^2}$，

则$\dot{V} = -2x_1^2 - 2x_2^2$，在整个 x_1, x_2 平面上是负定的. 而

$$\boldsymbol{\delta} = \left\{\frac{2x_1}{(1 - x_1x_2)^2} - \frac{x_1^2x_2}{(1 - x_1x_2)^2}, \frac{x_1^3}{(1 - x_1x_2)^2} + 2x_2\right\},$$

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial x_2}=\frac{3x_1^2-x_1^3x_2}{(1-x_2x_3)^3}=\frac{\partial \delta_2}{\partial x_1}$$

满足旋度方程. 所以 V 为

$$V=\int_0^{x_1}2\tau_1\mathrm{d}\tau_1+\int_0^{x_2}\left[\frac{x_1^3}{(1-x_1\tau_2)^2}+2\tau_2\right]\mathrm{d}\tau_2$$

$$=\frac{x_1^2}{1-x_1x_2}+x_2^2.$$

在 $1-x_1x_2>0$ 范围内, V 是正定的. 所以系统在 $x_1x_2<1$ 范围内, 零解是渐近稳定的.

这例说明 V 函数不是惟一的. 第二个解法中, V 函数导出较好的稳定性条件.

25.6 周期解和极限环

定义 25.6.1 方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y) \tag{25.57}$$

满足 $x(t+T)=x(t)$, $y(t+T)=y(t)$的解称为具有周期 T 的**周期解**(periodic solutions).

周期解在相平面上所对应的轨线是闭曲线. 反过来, 闭轨线对应于不是常数解的周期解.

定义 25.6.2 方程组(25.57)的孤立周期解, 在相平面上称它为方程组的**极限环**(limit cycle).

当极限环邻近的轨线均正向(即 $t\to+\infty$时)趋近于它时, 称极限环是稳定的. 如果邻近的轨线是负向(即 $t\to-\infty$)趋近于它时, 则称极限环是不稳定的. 当极限环一侧的轨线正向趋近于它, 而另一侧的轨线负向趋近于它, 此时称极限环是半稳定的.

定理 25.6.3 设自治系统(25.57)右端函数 X, Y 在相平面的某个域 G 内有一阶连续偏导数. 如果域 G 内存在有界的环形闭

域 D，在 D 内不含有系统(25.57)的奇点. 系统(25.57)的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$经过域 D 的点，当 $t\geqslant t_0$(或 $t\leqslant t_0$)时不离开该域，则解或者本身是一个周期解(闭轨线)，或者它按正向(或负向)趋近于 D 内的某一周期解(闭轨线).

定理 25.6.4 如果在域 G 内存在单连通域 D^*，在 D^* 内方程组(25.57)右端函数的$\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$不变号，且在 D^* 内的任何子域上不恒等于零，则方程组(25.57)在域 D^* 内不存在任何周期解，更不存在任何极限环.

定理 25.6.5 **Liénard(李纳)方程**

$$\ddot{x}+f(x,\dot{x})\dot{x}+g(x)=0$$

或其等价方程组

$$\dot{x}=y,\qquad \dot{y}=-f(x,y)y-g(x),$$

其中 f,g 是连续的，在满足下列条件时，

此方程至少有一个周期解：

(1) 存在一正数 $a>0$，使得 $f(x,y)>0$ 当 $\sqrt{x^2+y^2}>a$；

(2) $f(0,0)<0$(因此 $f(x,y)<0$ 在原点邻域内)；

(3) $g(0)=0, g(x)>0(x>0)$ 和 $g(x)<0(x<0)$；

(4) $G(x)=\int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u\to\infty$ 当 $x\to\infty$.

定理 25.6.6 中心存在定理 方程$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$ 或其等价系统$\dot{x}=y$，$\dot{y}=-f(x)y-g(x)$. 当在原点的某邻域内 f 和 g 是连续的，且满足下列条件：

(1) $f(x)$ 是奇函数，且在 $x>0$ 的半平面保持一个号；

(2) $g(x)>0(x>0)$，且 $g(x)$ 是奇函数($g(0)=0$)；

(3) $g(x)>\alpha f(x)F(x)(x>0)$，这里 $F(x)=\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$，且 $\alpha>1$.

则原点是系统的中心.

定理25.6.7 极限环存在定理 方程 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$ 有惟一的周期解，如果 f 和 g 是连续的，且满足下列条件：

(1) $F(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$ 是奇函数；

(2) $F(x)$仅在 $x=0,x=a,x=-a$ $(a>0)$处为零；

(3) 对 $x>a$，$F(x)$单调地趋于∞，当 $x\to\infty$；

(4) $g(x)$是奇函数，且 $g(x)>0$ $(x>0)$.

(这些条件包含$f(x)$是偶函数，对 $x>0$ 有 $f(0)<0$ 且 $f(x)>0$.)

26 非线性微分方程的近似解法

主要介绍二阶非线性自治系统的一些有效近似方法.

26.1 图解法

图解法是定性方法,它不提供解,仅说明解的一些性质. 但对数值解在两方面是有用处的:(1)它揭露方程解的特性,可指出对某些参数的限制,避免过量的计算;(2)对求出的数值解进行检验.

图解法基本上是一种逐步作图法.

等倾线(isocline)法 用在一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y). \tag{26.1}$$

令

$$f(x,y)=m,$$

m 为常数. 此方程称为等倾线方程. 它所代表的曲线族称为方程(26.1)的等倾线.

作图步骤:

(1) 准确地画出等倾线,并在曲线上作斜率为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m$ 的短线. 给出 m 的不同数值,得到由方程(26.1)所确定的方向场;

(2) 根据已给的初始条件(x_0,y_0),从这点出发画出所要求的解的曲线,使曲线与等倾线相交时,其斜率与方向场在该点的方向一致.

等倾线分布较密时，画出的积分曲线较准确.

例 26.1.1 作方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{x^2+y^2}$过(0,0),(1,0),(−1,0)的近似积分曲线.

解 作等倾线$\sqrt{x^2+y^2}=m$，即$x^2+y^2=m^2$方向场与近似积分曲线，如图26.1所示.

相平面(phase plane)法 这方法只适用于二阶方程. 设二阶方程为

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x}). \tag{26.2}$$

作变换$\dot{x}=y$，将原方程化成方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=f(x,y).\end{cases} \tag{26.3}$$

以x,y为直角坐标的平面称为**相平面**，相平面上的点(x,y)(或$(x,\dot{x})$)称为**相点**. 由方程组(26.3)消去t得

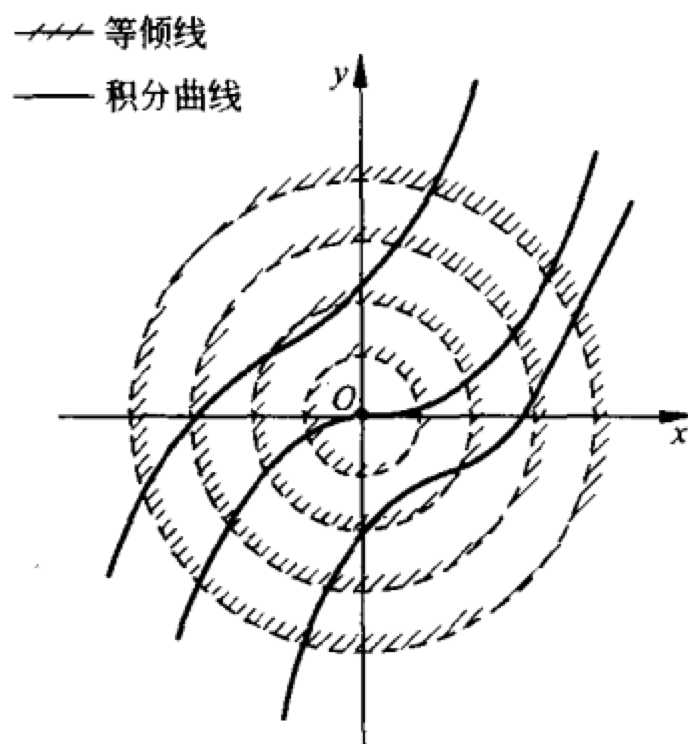


图 26.1

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x,y)}{y}.$$

这方程称为**相轨线方程**，它的积分曲线称为方程(26.3)的**相轨线**(trajectories). 由一族相轨线所组成的图象，称为**相平面图**(phase diagram). 相点(x,y)(或$(x,\dot{x})$)沿解曲线的运动方向如下确定：y在上半平面($\dot{x}>0$)是增加的，在下半平面($\dot{x}<0$)是减小的. 作相轨线的图解法就是等倾线法.

例 26.1.2 作$\ddot{x}+\sin x=0$起始点为$A(-\pi,0)$，$B\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$的相轨线.

解　令 $\dot{x}=y,\dot{y}=-\sin x$. 相轨线方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sin x}{y},$$

等倾线方程为

$$\frac{-\sin x}{y}=m \quad 或 \quad y=-\frac{\sin x}{m}, \qquad m\neq 0.$$

当 $m=0$ 时，$\sin x=0$，$x=\pm n\pi(n=0,1,2\cdots)$. 见图 26.2.

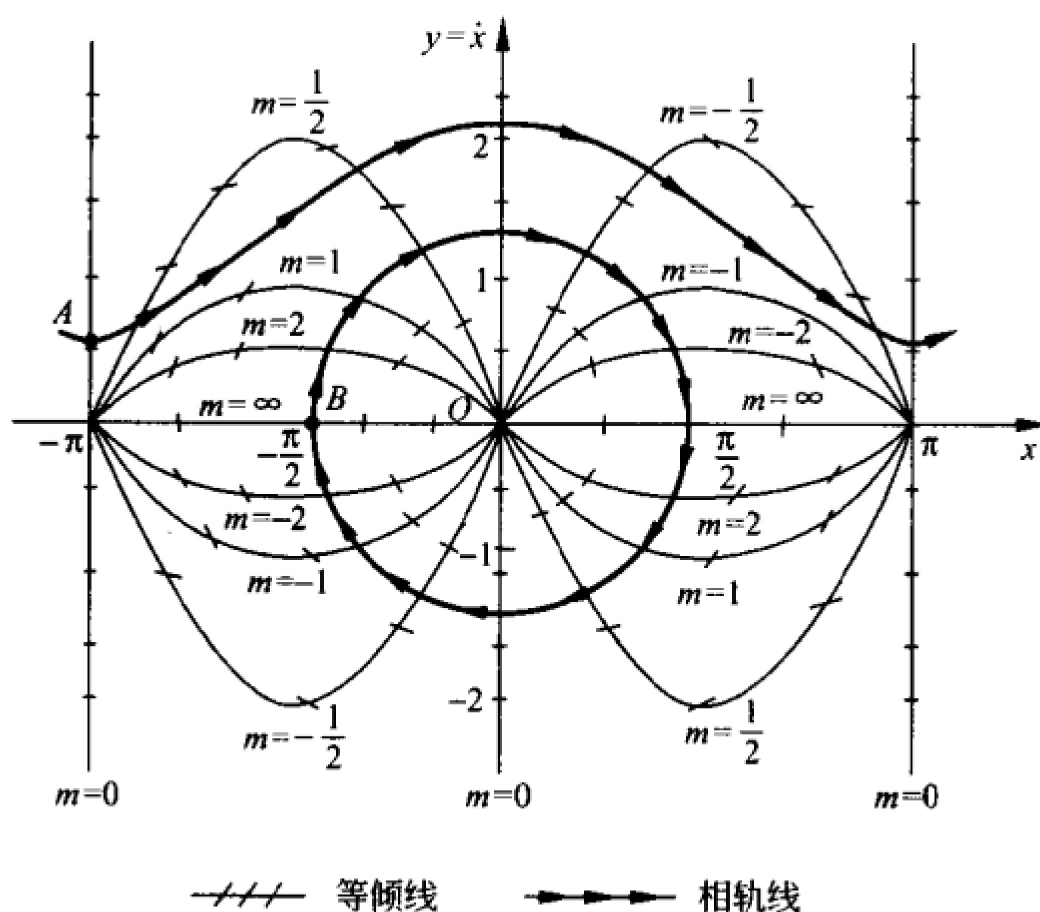


图　26.2

一般的自治方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f_1(x,y), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f_2(x,y). \tag{26.4}$$

消去 t，得相轨线方程

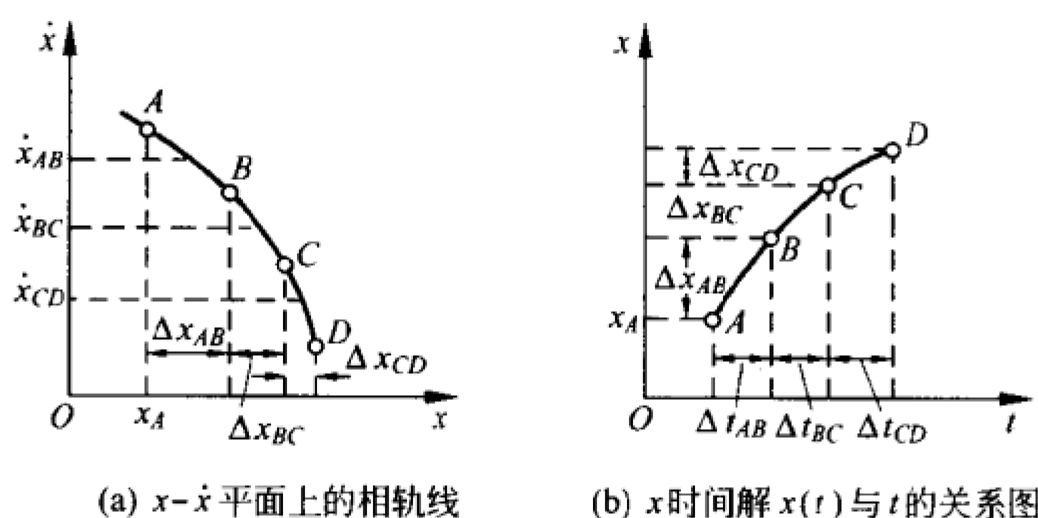
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}.$$

当 t 增加时，相点 (x,y) 沿解曲线运动的方向由(26.4)的 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

来确定，其速度的大小为$\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

由相平面 x-$\dot{x}$ 图求 x-t 图形的图解法　对于小增量 Δx 和 Δt，其平均速度$\dot{x}_{\mathrm{av}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$，因此时间增量

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{\dot{x}_{\mathrm{av}}}.$$



(a) x-$\dot{x}$ 平面上的相轨线　　(b) x时间解 $x(t)$ 与 t 的关系图

图　26.3

图 26.3(a) 表示 x-$\dot{x}$ 平面上的一条相轨线. 表示点通过位移增量 Δx_{AB} 所需要的时间增量 $\Delta t_{AB}=\frac{\Delta x_{AB}}{\dot{x}_{AB}}$. Δx_{AB} 可以量出，$\dot{x}$ 在区间 $0<t<\Delta t_{AB}$ 的平均值$\dot{x}_{AB}$ 可以估计出来. 根据(Δt_{AB}，$x_A+\Delta x_{AB}$) 画在 x-t 平面上. 重复这个过程，得到 $x=x(t)$ 的近似图形.

这方法的准确性很显然地对增量 Δx 是敏感的.

Liénard 方法　处理特殊类型方程的作图法.

$$\ddot{x}+f(\dot{x})+x=0,$$

阻尼项是速度$\dot{x}$ 的非线性函数，弹性恢复力是位移 x 的线性函数. 令$\dot{x}=y$，方程化为

$$\dot{x}=y,\qquad \dot{y}=-[x+f(y)].$$

相轨线方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x+f(y)}{y}.$$

设在相平面的起始点为 $P_0(x_0, y_0)$，作图步骤(见图 26.4)：

(1) 作曲线 $x=-f(y)$；

(2) 由起始点 $P_0(x_0, y_0)$ 画一条与 x 轴平行的直线，交 $x=-f(y)$ 于 Q 点；

(3) 过 Q 点作垂线交 x 轴于 R 点；

(4) 联 RP_0，易证得直线 RP_0 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0+f(y_0)}$. 所以过 P_0 的相轨线与 RP_0 垂直. 画一小线段 $P_0P_1 \perp RP_0$，作为相轨线的近似；

(5) 从 P_1 点开始，重复(2) ~ (4) 的过程.

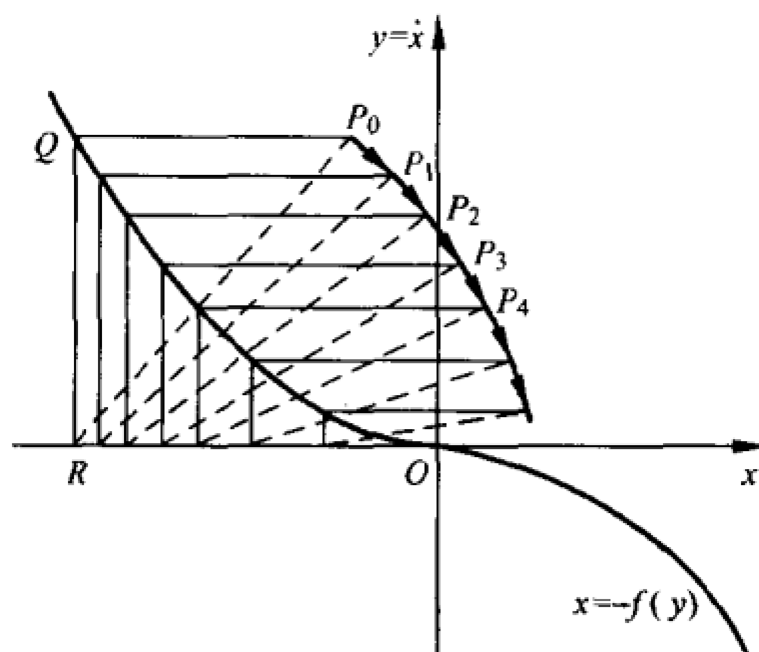


图 26.4 Liénard 作图法

例 26.1.3 用 Liénard 作图法作 $\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+x=0$, $\varphi(\dot{x})=\frac{\dot{x}^3}{3}-\dot{x}$ 的相轨线图.

解 把方程化为方程组

$$\dot{x}=y, \qquad \dot{y}=y-\frac{y^3}{3}-x.$$

相轨线方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x+y-\frac{y^3}{3}}{y},$$

作图形如图 26.5 所示.

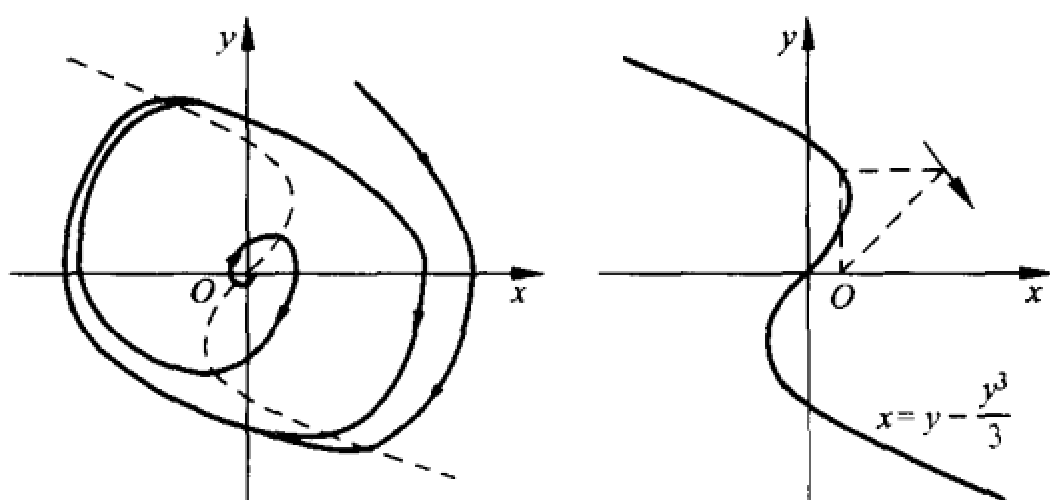


图 26.5　$\ddot{x}+\varphi(\dot{x})+x=0$ 相轨线图

线性化方法　对于非线性系统

$$\dot{x}=P(x,y),\qquad \dot{y}=Q(x,y).$$

可能有多于一个的奇点(平衡点);用线性近似在 x-y 平面上得到每个奇点附近的解曲线及奇点的性质;然后根据这些奇点附近的解曲线,勾画出解曲线的完整图形.

当线性近似方程组奇点不是中心时,非线性方程组奇点的类型和稳定性与线性近似方程组是一致的;对于中心,非线性系统奇点可能是中心或焦点.但对于系统

$$\ddot{x}=f(x)\quad 或\quad \dot{x}=y,\qquad \dot{y}=f(x)$$

(即保守系统)其奇点类型和性质与线性近似方程组完全相同.

作图步骤:

(1) 求出系统的奇点,即使 $P(x,y)=0,Q(x,y)=0$ 的点.

(2) 在每个奇点的邻域内将 P,Q 展开为 Taylor 级数,忽略二阶及高阶项,得线性近似方程组,例如在奇点 $P_0(x_0,y_0)$ 有

$$\dot{x}=a(x-x_0)+b(y-y_0),\qquad \dot{y}=c(x-x_0)+d(y-y_0),$$

其中

$$a=\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{P_0},\quad b=\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{P_0},\quad c=\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{P_0},\quad d=\left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{P_0}.$$

(3) 判定奇点类型. 在每个奇点附近画出局部的解曲线;在鞍点附近画出两条渐近线,并确定分界线(separatrix).

(4) 勾画全部解曲线.

例 26.1.4 确定 $\ddot{x}+x-0.25x^2=0$ 的奇点及其性质,并在相平面上描绘解曲线族.

解 取$\dot{x}=y,\dot{y}=0.25x^2-x$. 系统的奇点为(0,0),(4,0). 在(0,0) 点:线性近似方程组为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}$ 的特征根为 $\pm \mathrm{i}$,故奇点(0,0) 为中心,但系统系保守系统,故(0,0) 亦为中心. 在(4,0) 点:$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}$ 的特征根λ 为± 1,故奇点(4,0) 为鞍点. 对应的特征向量为:$\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}_{\lambda=1}$,$\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}_{\lambda=-1}$,它们是(4,0) 附近解曲线族的渐近方向. 为确定分界线,由相轨线方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{0.25x^2-x}{y}$$

解得

$$y^2=\frac{x^3}{6}-x^2+c.$$

在相平面上最大的闭曲线过(4,0),取它为初值,得曲线方程为

$$y^2=\frac{x^3}{6}-x^2+\frac{16}{3}\quad \text{或}\quad 6(x^2+y^2)-x^3=32.$$

初值位于此曲线圈内的运动是振荡,初值位于此曲线圈外的是不稳定运动,故称此曲线为分界线(见图 26.6).

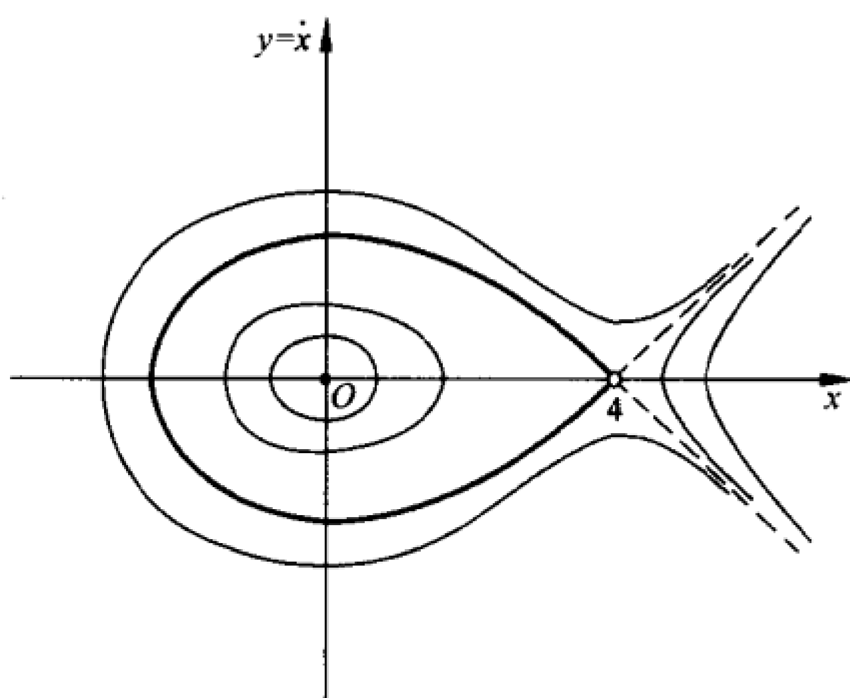


图　26.6

26.2　摄动法

摄动法(perturbation method)是求微分方程带有小的非线性项的有效近似解法之一. 把解展开为无量纲的小参数的幂级数求近似的周期解. 根据渐近展开的经验，只要参数适当地小，通常只取一两项就足够了.

符号"O","o"　已给两个函数 $f(\varepsilon),g(\varepsilon)$，如果当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|$ 是有界的，则记 $f=O(g)$；如果当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\to 0$，则记 $f=o(g)$.

函数序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 称为当 $\varepsilon\to 0$ 的**渐近序列**(asymptotic sequence)，如果当 $\varepsilon\to 0$，$\varphi_{n+1}=o(\varphi_n)$ 对每个 $n\geqslant 0$ 成立.

最简单的例子：$\varphi_n(\varepsilon)=\varepsilon^n$.

$f(x,\varepsilon)$ 为 x 的函数，含有参数 ε，由级数

$$\sum_{n=0}^{N}\varphi_n(\varepsilon)f_n(x),\quad \varepsilon\to 0$$

近似，因此

$$f(x;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(\varepsilon) f_n(x) + o(\varphi_N(\varepsilon)), \qquad \varepsilon \to 0.$$

这个表示式称为函数 $f(x;\varepsilon)$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时关于渐近序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 的 $N+1$ 项**渐近近似**(asymptotic approximation).

(1) 如果这个表示式对每个 $N \geqslant 0$ 都成立,则称它为 $f(x;\varepsilon)$ 当 $\varepsilon \to 0$ 的一个**渐近展开**(asymptotic expansion).

(2) 如果上述表示式对所有的 x 是一致成立的,则称为**一致有效的**(uniformly valid);否则称为不一致有效的.

(3) 收敛的级数展开总是渐近的,但反之不然. 渐近级数展开不必是收敛的,实际上,它们通常是发散的. 在渐近展开中不需要无穷级数,当 ε 足够小时,只要渐近展开的前几项.

Poincaré(庞加莱) 直接展开　　方程

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + [q(t) + \varepsilon r(t)]x = 0,$$

初始条件

$$x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = b,$$

其中 ε 为小参数. 设方程的解可用展开式

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots \tag{26.5}$$

表示. 其中 $x_n(t)$ 是待定的可导函数,由已给初始条件得

$$x_0(0) = a,\ \dot{x}_0(0) = b,\ 和\ x_n(0) = 0,\ \dot{x}_n(0) = 0, \qquad n \geqslant 1.$$

将展开式代入方程

$$(\ddot{x}_0 + \varepsilon\ddot{x}_1 + \cdots) + p(t)(\dot{x}_0 + \varepsilon\dot{x}_1 + \cdots) + [q(t) + \varepsilon r(t)](x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots) = 0,$$

并令 ε 的同次幂的系数为 0,得方程组

$$O(\varepsilon^0):\ \ddot{x}_0 + p(t)\dot{x}_0 + q(t)x_0 = 0,$$

$$O(\varepsilon^1):\ \ddot{x}_1 + p(t)\dot{x}_1 + q(t)x_1 = -r(t)x_0,$$

$$O(\varepsilon^2):\ \ddot{x}_2 + p(t)\dot{x}_2 + q(t)x_2 = -r(t)x_1,$$

$$\cdots$$

与相应的初始条件,方程可逐次地求解. 展开式(26.5)可展至所要求的项数.

Lindstidl(林斯泰特)-Poincaré 方法　具有弱非线性项的振动方程

$$\ddot{x}+x=\varepsilon f(x,\dot{x}), \tag{26.6}$$

ε 是小参数. 非线性方程周期解的频率 ω 一般地说是参数 ε 的函数. 为使频率 ω 显示出来,引入变换 $\tau=\omega t$,此时 ω 是 ε 未定的函数. 经此变换,方程化为

$$\omega^2 x''+x=\varepsilon f(x,\omega x'), \qquad x'\equiv\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}. \tag{26.7}$$

设解 $x(\tau,\varepsilon)$ 和频率 ω 都展开为 ε 的级数

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\cdots,$$

$$\omega(\varepsilon)=1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots,$$

其中 $x_i(\tau)$ 是待定函数,ω_i 是待定常数. 将它们代入(26.7),给出

$$(1+\varepsilon\omega_1+\cdots)^2(x_0''+\varepsilon x_1''+\cdots)+(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)$$

$$=\varepsilon f[x_0+\varepsilon x_1,\cdots,(1+\varepsilon\omega_1+\cdots)(x_0'+\varepsilon x_1'+\cdots)].$$

令方程左右两端 ε 同次幂的系数相等,得

$$O(\varepsilon^0):\ x_0''+x_0=0,$$

$$O(\varepsilon^1):\ x_1''+x_1=-2\omega_1 x_0''+f(x_0,x_0'),$$

$$\cdots$$

第一个方程的通解为

$$x_0=a\cos\theta, \qquad \theta=\tau+\varphi.$$

将其代入第二个方程

$$x_1''+x_1=2\omega_1 a\cos\theta+f(a\cos\theta,-a\sin\theta). \tag{26.8}$$

如果方程的右端含有 $\cos\theta$ 或 $\sin\theta$ 项,特解中将含有型如 $\tau\cos\theta$, $\tau\sin\theta$ 的项,解将不是周期的,而且当 τ 增大时,$\frac{x_1}{x_0}$ 是无界的,x_1 将不是 x_0 的小修正项. $\tau\cos\theta,\tau\sin\theta$ 以及 $\tau^m\cos\theta,\tau^m\sin\theta$ 这种类型的项称为**长期项或永年项**(secular terms). 为消去长期项适当地选择 a 和 ω_1. 为此将 $f(a\cos\theta,-a\sin\theta)$ 展成 Fourier 级数如下:

$$f(a\cos\theta,-a\sin\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n(a)\cos n\theta+B_n(a)\sin n\theta],$$

其中

$$A_n(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a\cos\theta,-a\sin\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

$$B_n(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(a\cos\theta,-a\sin\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

将它们代入(26.8)并消去 $\cos\theta$ 或 $\sin\theta$ 项，给出的条件为

$$2\omega_1 a+A_1(a)=0,\qquad B_1(a)=0.$$

由这组方程确定 a 和 ω_1. 由此准确到 $O(\varepsilon)$ 的最低阶的近似解为

$$x(t,\varepsilon)=a\cos\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{2a}A_1(a)\right)t+\varphi\right].$$

例 26.2.1 求 Duffing(达芬)方程 $\ddot{x}+x=-\varepsilon x^3$ 满足

$$x(0)=A,\qquad \dot{x}(0)=0$$

的解.

解 作变换 $\tau=\omega t$，方程化为

$$\omega^2x''+x=-\varepsilon x^3,\quad x(0)=A,\quad x'(0)=0.$$

设解 $x(\tau,\varepsilon)$ 和 ω 展开式为

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\cdots,$$

$$\omega(\varepsilon)=1+\varepsilon\omega_1+\cdots,$$

有关的初始条件为：$x_0(0)=A, x_0'(0)=0$ 和 $x_i(0)=0, x_i'(0)=0(i\geqslant 1)$. 代入 Duffing 方程，给出

$$(1+\varepsilon\omega_1+\cdots)^2(x_0''+\varepsilon x_1''+\cdots)+(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)$$
$$=-\varepsilon(x_0^3+3\varepsilon x_0^2x_1+\cdots).$$

令两端 ε 的同次幂系数相等，得

$O(\varepsilon^0)$: $x_0''+x_0=0$,

$O(\varepsilon^1)$: $x_1''+x_1=-x_0^3-2\omega_1x_0''$,

$O(\varepsilon^2)$: $x_2''+x_2=-3x_0^2x_1-2\omega_1x_1''-(\omega_1^2+2\omega_2)x_0''$,

$\cdots$

由第一个方程,有 $x_0=A\cos\tau$. 将 x_0 代入第二个方程,经整理后为

$$x_1''+x_1=\left(\frac{-3}{4}A^3+2\omega_1 A\right)\cos\tau-\frac{A^3}{4}\cos 3\tau,$$

为消去永年项,令

$$-\frac{3}{4}A^3+2\omega_1 A=0,\quad 即\quad \omega_1=+\frac{3}{8}A^2.$$

因此方程成为

$$x_1''+x_1=-\frac{1}{4}A^3\cos 3\tau,$$

特解为

$$x_1=\frac{A^3}{32}(-\cos\tau+\cos 3\tau).$$

将 x_0,x_1 代入第三个方程式有

$$x_2''+x_2=\left(\frac{21}{128}A^5+2\omega_2 A\right)\cos\tau+\frac{24}{128}A^5\cos 3\tau-\frac{3}{128}A^5\cos 5\tau.$$

消去永年项,选 $\omega_2=-\frac{21}{256}A^4$,第三个方程成为

$$x_2''+x_2=\frac{24}{128}A^5\cos 3\tau-\frac{3}{128}A^5\cos 5\tau,$$

求得解为

$$x_2=\frac{1}{1024}A^5(23\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau).$$

因此原方程的渐近解为

$$x(t,\varepsilon)=A\cos\omega t-\varepsilon\frac{1}{32}A^3(\cos\omega t-\cos 3\omega t)$$

$$+\varepsilon^2\frac{1}{1024}A^5(23\cos\omega t-24\cos 3\omega t+\cos 5\omega t)+O(\varepsilon^3),$$

$$\omega(\varepsilon)=1+\frac{3}{8}A^2\varepsilon-\frac{21}{256}A^4\varepsilon^2+\cdots$$

定义 26.2.2 将非线性方程(26.7)的解 $x(t,\varepsilon)$ 看成是多个自变量(多个不同单位的时间变量)的函数,其展开式也是多个自

变量,这方法称为多重时间尺度法(multiple timescales method).

根据引进的一些新变量

$$T_n = \varepsilon^n t, \qquad n=0,1,2\cdots, \tag{26.9}$$

这里 T_{n-1} 总是比 T_n 慢,并假设这些 T_n 是独立的.因此对 t 的导数变成对 T_n 的偏导数的展开式,即

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}T_0}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial T_2} + \cdots \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \cdots, \qquad (26.10)\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \cdots,\end{aligned}$$

其中 $D_n = \dfrac{\partial}{\partial T_n}(n=0,1,2,\cdots)$. 故此法也称为导数展开方法(derivative expansion method).

设方程的解 $x(t,\varepsilon)$ 可展开为

$$x(t,\varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2, \cdots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \cdots) + \cdots. \tag{26.11}$$

展开式中所需的独立时间尺度变量的个数,取决于需要求到哪一阶近似解.如近似展开式要算到 $O(\varepsilon^2)$,则只需独立时间变量 T_0, T_1,如需算到 $O(\varepsilon^3)$,需要 T_0, T_1, T_2.

将式(26.10),式(26.11)代入式(26.6),令方程两端 ε 的同次幂的系数相等,得

$$O(\varepsilon^0):\ D_0^2 x_0 + x_0 = 0,$$

$$O(\varepsilon^1):\ D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + f(x_0, D_0 x_0),$$

$$O(\varepsilon^n):\ D_0^2 x_n + x_n = F(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}), \qquad n \geqslant 2.$$

各方程的解中含有待定的任意函数,它们也是 $T_0, T_1, \cdots$ 的函数,由高阶近似解中消去永年项的条件加以确定.

仍以 Duffing 方程为例,将式(26.10),式(26.11)代入 $\ddot{x} + x = -\varepsilon x^3$,得

$$(D_0^2+1+2\varepsilon D_0 D_1+\cdots)(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)=-\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\cdots)^3.$$

令两边 ε 的同次幂的系数相等，得

$$O(\varepsilon^0):(D_0^2+1)x_0=0,$$

$$O(\varepsilon^1):(D_0^2+1)x_1=-2D_0D_1x_0-x_0^3,$$

$$O(\varepsilon^2):(D_0^2+1)x_2=-(D_1^2+2D_0D_2)x_0-2D_0D_1x_1-3x_0^2x_1,$$

$$\cdots$$

由第一个方程，有 $x_0=A\cos(T_0+\varphi)$，A,φ 为 $T_1,T_2,\cdots$ 的待定函数. 将 x_0 代入第二个方程，得

$$(D_0^2+1)x_1=2\frac{\partial A}{\partial T_1}\sin(T_0+\varphi)+\left(2A\frac{\partial\varphi}{\partial T_1}-\frac{3}{4}A^3\right)\cos(T_0+\varphi)$$

$$-\frac{1}{4}A^3\cos 3(T_0+\varphi).$$

为消去永年项，令

$$\frac{\partial A}{\partial T_1}=0,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial T_1}=\frac{3}{8}A^2,$$

A 与 T_1 无关，所以

$$A=常数=a,\qquad \varphi=\frac{3}{8}A^2T_1+常数.$$

这里的"常数"一般地讲是更高阶的慢变量 $T_2,T_3,\cdots$ 的函数. 若对解只要求准确至 $O(\varepsilon)$，与 $T_2,T_3,\cdots$ 无关. 解的展开表示为

$$x(t,\varepsilon)=a\cos\left(t+\left(\frac{3}{8}\right)a^2\varepsilon t+常数\right)$$

$$+\varepsilon\frac{1}{32}a^3\cos\left(t+\frac{3}{8}a^2\varepsilon t+常数\right)+O(\varepsilon^2).$$

Крылов-Боголыбов 方法（KB 法）　若只要求一阶近似解（$O(\varepsilon)$），本方法是比较方便的. 以 $\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon f(x,\dot{x})$ 为例说明方法.

当 $\varepsilon=0$ 时，是线性方程，其解为

$$x=A\cos(\omega_0t+\theta),$$

其中 A,θ 为任意常数. 解对 t 的导数为 $\dot{x}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\theta)$.

当 $\varepsilon\neq 0$ 且很小时,设解及其对 t 的导数仍为上述形式,但 A,θ 为 t 的待定缓变函数:

$$x=A(t)\cos(\omega_0 t+\theta(t)),\qquad \dot{x}=-A(t)w_0\sin(\omega_0 t+\theta(t)). \tag{26.12}$$

为确定 $A(t)$ 和 $\theta(t)$ 应满足的方程,将(26.12)的第一式对 t 求导数,然后与第二式进行比较,有

$$\dot{A}\cos\varphi-A\dot{\theta}\sin\varphi=0. \tag{26.13}$$

将(26.12)的第二式对 t 求导数,把结果和(26.12)代入原微分方程,有

$$\dot{A}\omega_0\sin\varphi+\dot{\theta}A\omega_0\cos\varphi=-\varepsilon f(A\cos\varphi,-A\omega_0\sin\varphi). \tag{26.14}$$

由(26.13)和(26.14)解出 $\dot{A}$ 和 $\dot{\theta}$,得到确定 $A(t)$ 和 $\theta(t)$ 的方程组

$$\dot{A}=-\frac{\varepsilon}{\omega_0}f(A\cos\varphi,-A\omega_0\sin\varphi)\sin\varphi, \tag{26.15}$$

$$\dot{\theta}=-\frac{\varepsilon}{\omega_0 A}f(A\cos\varphi,-A\omega_0\sin\varphi)\cos\varphi. \tag{26.16}$$

当 ε 很小时,$\dot{A}$ 和 $\dot{\theta}$ 也很小,因此 A,θ 是 t 的缓变函数. Крылов 和 Боголыбов 作这样的近似,将方程(26.15),(26.16)中的 $\dot{A},\dot{\theta}$ 以在一个周期 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 上的平均值来代替(故此法也称为平均法),在取平均值时,A,θ 都当作常数,得

$$\dot{A}=-\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}f(A\cos\varphi,-A\omega_0\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}t,$$

$$\dot{\theta}=-\frac{\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}}f(A\cos\varphi,-A\omega_0\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}t.$$

或

$$\dot{A}=-\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi}f(A\cos\varphi,-A\omega_0\sin\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \tag{26.17}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 A}\int_0^{2\pi} f(A\cos\varphi, -A\omega_0\sin\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (26.18)$$

一旦右边的积分算出，解一阶微分方程，求出 A,θ 就得到原方程的一阶近似解.

例 26.2.3 用平均法解 Van der Pol 方程 $\ddot{x}+\omega^2 x=\varepsilon(1-x^2)\dot{x}$.

解 $f(x,\dot{x})=(1-x^2)\dot{x}$,

$$f(A\cos\varphi, -A\omega\sin\varphi) = -(1-A^2\cos^2\varphi)A\omega\sin\varphi,$$

根据(26.17),(26.18)有

$$\dot{A} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} -(1-A^2\cos^2\varphi)A\omega\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\varepsilon A}{8}(4-A^2),$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega A}\int_0^{2\pi} -(1-A^2\cos^2\varphi)A\omega\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

解一阶微分方程，得

$$\ln\left[\frac{A^2}{c_1(4-A^2)}\right]=\varepsilon t, \qquad \theta=c_2,$$

c_1,c_2 为任意常数. 设当 $t=0$ 时，$A=A_0$，$\theta=\theta_0$，最后得

$$A=\frac{2}{\left[\left(\frac{4}{A_0^2}-1\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon t}+1\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad \theta=\theta_0.$$

Van der Pol 方程的近似解为

$$x\approx\frac{2\cos(\omega t+\theta_0)}{\left[\left(\frac{4}{A_0^2}-1\right)\mathrm{e}^{-\varepsilon t}+1\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

当 $t\to\infty$ 时，$A\to 2$ 与初始值 A_0 无关. 因此稳态解是振幅为 2 的极限环.

26.3 谐波线性化方法

这方法只用于小的非线性项的情况. 用这方法很容易得到近似的周期解，但很难改进解的精确度. 以下面例子说明此方法.

Van der Pol 方程 $\ddot{x}+\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+\omega^2 x=0$，$\dot{x}(0)=0(0<\varepsilon\ll 1)$. 令 $x=A\cos\omega t$，有 $\dot{x}=-A\omega\sin\omega t$，则非线性项为

$$\varepsilon(x^2-1)\dot{x}=\varepsilon(A^2\cos^2\omega t-1)(-A\omega\sin\omega t)$$

$$=-\varepsilon A\omega\left(\frac{A^2}{4}-1\right)\sin\omega t-\frac{1}{4}\varepsilon A^3\omega\sin 3\omega t.$$

只考虑主要项(一次谐波)而忽略高次谐波项，因此有

$$\varepsilon(x^2-1)\dot{x}\approx\varepsilon\left(\frac{A^2}{4}-1\right)\dot{x}.$$

以此代入原微分方程把方程线性化为

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(\frac{A^2}{4}-1\right)\dot{x}+x=0.$$

这方程特殊在它含有解的参数，具体说就是振幅 A. 如果 $A=2$，阻尼项消失，解为

$$x=2\cos t,\qquad \omega=1.$$

当 ε 很小时，这是 Van der Pol 方程极限环的近似解，振幅为 2.

考虑初始值为 $x(0)=a_0$，$\dot{x}(0)=0$ 的解，将 a_0 作为上述近似的振幅，线性近似方程为

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(\frac{a_0^2}{4}-1\right)\dot{x}+x=0,$$

满足初始条件的解为

$$x(t)=a_0\exp\left[-\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{4}a_0^2-1\right)t\right]\cos\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2\left(\frac{1}{4}a_0^2-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}t,$$

将指数函数和余弦函数都展为 εt 的函数，只要 $\varepsilon t\ll 1$，这个解与 KB 法的近似解是符合的.

矩阵分析与线性系统

27 矩阵范数与测度

27.1 关于矩阵分析的引言

27～30 章是有关矩阵分析的内容.矩阵分析是应用数学中较为年轻的一个分支,它兼有代数与分析的共同属性.是微分方程与控制理论,系统与信息理论中一个强有力的工具,应用广泛;并且,它自身也构成一个完整的体系.

27.2 向量的范数

定义 27.2.1 设 F 为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$,$V(F)$是 F^n 上的向量空间,$\|\cdot\|$ 为 V 到 $\mathbb{R}^+$ 的映射

$$\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}^+.$$

$\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 及 $\forall\,\alpha\in F$,满足

(1) $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\|\boldsymbol{x}\|>0$;

(2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\,\|\boldsymbol{x}\|$;

(3) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

则称 $\|\cdot\|$ 为**向量范数**(norm of a vector).

例 27.2.2 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V$,则下列各式均为上

述定义下的向量范数：

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad p \in \mathbb{R}, p \geqslant 1,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$,均满足 Schwarz **不等式**(Schwarz inequality)

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 \geqslant |\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}|,$$

其中 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.

27.3 矩阵的范数

定义 27.3.1 设 $F^{n\times n}$ 为实数矩阵集 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 或复数矩阵集 $\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|\cdot\|$ 是由 $F^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的映射

$$\|\cdot\|: F^{n\times n} \to \mathbb{R}^+.$$

$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in F^{n\times n}$ 及 $\alpha \in F$ 满足：

(1) 当 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}_{n\times n}$ 时，$\|\boldsymbol{A}\| > 0$，$\boldsymbol{0}_{n\times n}$ 表示 n 阶零阵，

(2) $\|\alpha\boldsymbol{A}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{A}\|$，

(3) $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|$，

(4) $\|\boldsymbol{AB}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{B}\|$.

则称 $\|\cdot\|$ 为**矩阵范数**(norm of a matrix).

例 27.3.2 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$，则下列各式均定义了相应上述意义下的矩阵范数：

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right]^{1/2},$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = n \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

对 $\|\boldsymbol{A}\|_2$ 有下式成立：

$$\|A\|_2=[\operatorname{tr}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}]^{1/2},$$

其中 $\boldsymbol{A}^*=(\overline{\boldsymbol{A}})^{\mathrm{T}}$（共轭转置），$\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的**迹**(trace).

定义 27.3.3 设 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$，$\boldsymbol{x}\in V$，若矩阵范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{ma}}$ 与向量范数 $\|\cdot\|_b$ 满足

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_b\leqslant\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{ma}}\|\boldsymbol{x}\|_b.$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{ma}}$ 与向量范数 $\|\cdot\|_b$ **相容**(compatibility of norms).

定理 27.3.4 设 $\boldsymbol{x}\in F$，$\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$，由下式给出的矩阵范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{ma}}$ 必与向量范数 $\|\cdot\|_b$ 相容：

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{ma}}=\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_b}{\|\boldsymbol{x}\|_b}=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_b=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_b\stackrel{\text{def}}{=}\|\boldsymbol{A}\|_{ib}.$$

由上式定义的矩阵范数 $\|\cdot\|_{ib}$ 称为向量范数 $\|\cdot\|_b$ **导出的范数**（诱导范数）(induced norm).

公式 27.3.5 3 个常用的导出范数公式为

$$\|\boldsymbol{A}\|_{i_1}=\max_j\sum_{i=1}^n|a_{ij}|,$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{i_2}=\max_i[\lambda_i(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})]^{1/2},$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_{i_\infty}=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}|,$$

其中 $\lambda_i(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})$ 表示非负的 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 的第 i 个特征值.

定理 27.3.6 $\forall\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$ 及 $\forall\boldsymbol{x}\in V$，由向量范数导出的矩阵范数，均具有定义 27.3.1 中的全部性质.

27.4 矩阵的测度

定义 27.4.1 设 $\mu(\cdot)$ 为由 $F^{n\times n}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$\mu(\cdot):F^{n\times n}\to\mathbb{R}.$$

$\forall \boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$满足

$$\mu(\boldsymbol{A})=\lim_{h\to 0}\frac{\|\boldsymbol{I}_n+h\boldsymbol{A}\|_i-1}{h},$$

其中$\|\cdot\|_i$为矩阵的导出范数，$\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位阵. 相应于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 3 种导出范数的测度公式分别为

(1) 与$\|\boldsymbol{A}\|_{i_1}$相应的**矩阵测度**(matrix measure)为

$$\mu_1(\boldsymbol{A}) = \max_j\left\{\mathrm{Re}(a_{jj}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|\right\};$$

(2) 与$\|\boldsymbol{A}\|_{i_2}$相应的矩阵测度为

$$\mu_2(\boldsymbol{A}) = \max_i\left\{\lambda_i\left(\frac{\boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{A}}{2}\right)\right\};$$

(3) 与$\|\boldsymbol{A}\|_{i_\infty}$相应的矩阵测度为

$$\mu_\infty(\boldsymbol{A}) = \max_i\left\{\mathrm{Re}(a_{ii}) + \sum_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\right\}.$$

性质 27.4.2 矩阵范数与测度的性质

(1) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\det\boldsymbol{A}\neq 0$,则有

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \geqslant \|\boldsymbol{A}\|^{-1},$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = \min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|},$$

$$\|\boldsymbol{A}\| \geqslant |a_{ij}|, \qquad i,j=1,2,\cdots,n.$$

(2) $\mu(\boldsymbol{I}_n)=1$, $\mu(-\boldsymbol{I}_n)=-1$.

(3) $\mu(\boldsymbol{0}_{n\times n})=0$ (注:$\mu(\boldsymbol{A})=0$ 时未必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}_{n\times n}$);

(4) $\forall \boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$,

$$\mu(\alpha\boldsymbol{A})=\alpha\mu(\boldsymbol{A}), \quad \forall\alpha\geqslant 0,$$

$$\mu(\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}_n)=\mu(\boldsymbol{A})+\alpha, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

(5) $\forall \boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$,

$$|\mu(\boldsymbol{A})| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|,$$

$$-\|\boldsymbol{A}\| \leqslant -\mu(-\boldsymbol{A}) \leqslant \mu(\boldsymbol{A}) \leqslant \|\boldsymbol{A}\|.$$

(6) $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$,

$$\mu(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mu(\boldsymbol{A})+\mu(\boldsymbol{B}).$$

(7) $\forall \boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$,

$$-\mu(-\boldsymbol{A})\leqslant \mathrm{Re}\lambda_i(\boldsymbol{A})\leqslant\mu(\boldsymbol{A}),\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

(8) $\forall \boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$及$\forall \boldsymbol{x}\in F^n$,

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\geqslant\max\{-\mu(-\boldsymbol{A}),-\mu(\boldsymbol{A})\}\|\boldsymbol{x}\|.$$

(9) $\forall \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$,

$$\max\{\mu(\boldsymbol{A})-\mu(-\boldsymbol{B}),-\mu(\boldsymbol{A})+\mu(\boldsymbol{B})\}\leqslant\mu(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}),$$

$$|\mu(\boldsymbol{A})-\mu(\beta)|\leqslant\max\{|\mu(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})|,|\mu(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})|\}.$$

(10) $\forall \boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$且$\det\boldsymbol{A}\neq 0$,

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1}\geqslant\max\{-\mu(-\boldsymbol{A}),-\mu(\boldsymbol{A})\}.$$

(11) $\forall \boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$及$h\geqslant 0$,

$$\|(\boldsymbol{I}_n+h\boldsymbol{A})^{-1}\|^{-1}\geqslant 1-h\mu(-\boldsymbol{A})\geqslant 1-h\|\boldsymbol{A}\|.$$

(12) $\forall \boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\mu(\boldsymbol{A})$一定存在.

28 矩阵的谱分解与不等式

28.1 单纯矩阵

设 $A\in F^{n\times n}$，A 的特征值全体记为 $\Lambda(A)$，A 的 Jordan 标准形记为 J.

定义 28.1.1 设 A 的 n 个特征值中有 s 个相异，记为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，若 $\Lambda(A)$ 中有 m_j 个 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant s)$，则称 m_j 为 λ_j 的代数重度(algebraic multiplicity).

定义 28.1.2 对 A 的特征值 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant s)$，若

$$\operatorname{rank}\,[\lambda_j I-A]=n-\alpha_j,$$

则称 α_j 为 λ_j 的**几何重度**(geometric multiplicity).

定理 28.1.3 设 A 的 s 个相异特征值为 $\lambda_j(1\leqslant j\leqslant s)$，则 $m_j\geqslant\alpha_j$.

定义 28.1.4 若对 A 的所有相异特征值 $\{\lambda_j\mid j=1,\cdots,s\}$，均有 $m_j=\alpha_j$，则称 A 为**单纯矩阵**(simple matrix). 显然，A 相似于对角阵的充要条件是 A 为单纯矩阵，并且 A 为单纯矩阵等价于 A^{T} 为单纯矩阵.

例 28.1.5 在如下 4 个矩阵中，只有 A_4 为单纯矩阵(其中 $\lambda_1\neq\lambda_2$)

$$A_1=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0&0\\0&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_2&1\\0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix},\qquad A_2=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_2&1\\0&0&0&\lambda_2\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\qquad A_4=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{A}_1, s=2, m_1=m_2=2, \alpha_1=\alpha_2=1$;

对 $\boldsymbol{A}_2, s=2, m_1=m_2=2, \alpha_1=2, \alpha_2=1$;

对 $\boldsymbol{A}_3, s=2, m_1=m_2=2, \alpha_1=\alpha_2=1$;

对 $\boldsymbol{A}_4, s=2, m_1=m_2=2, \alpha_1=\alpha_2=2$.

28.2 单纯矩阵的谱分解

定义 28.2.1 设 $\boldsymbol{A}$ 为单纯矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 必有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n$ 存在,即有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i=\lambda_i\boldsymbol{y}_i,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

或

$$\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\lambda_i\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}.$$

称 $\boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**左特征向量**(eigenvector of left side).

例 28.2.2 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{-1}$,则 $\boldsymbol{T}^{-1}$的行向量为 $\boldsymbol{A}$ 的左特征向量,这里 $\boldsymbol{A}$ 为单纯矩阵,$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵.

定义 28.2.3 设单纯矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量(右特征向量)为 $\{\boldsymbol{x}_i \mid i=1,\cdots,n\}$,左特征向量为 $\{\boldsymbol{y}_i \mid i=1,\cdots,n\}$,则

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_i.$$

上式称为单纯矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**谱分解**(spectral resolution),其中$G_i = \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i^{\mathrm{T}}$.

定理 28.2.4 设单纯矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 s 个相异特征值为$\{\lambda_j \mid j = 1, \cdots, s\}$, λ_j 对应的 α_j 个线性无关的右特征向量为 $\boldsymbol{x}_1^j, \cdots, \boldsymbol{x}_{\alpha_j}^j$, α_j 个线性无关的左特征向量为 $\boldsymbol{y}_1^{j\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{y}_{\alpha_j}^{j\mathrm{T}}$,记

$$\boldsymbol{E}_j = \sum_{k=1}^{\alpha j} \boldsymbol{x}_k^j \boldsymbol{y}_k^{j\mathrm{T}} = (\boldsymbol{x}_1^j, \cdots, \boldsymbol{x}_{\alpha_j}^j) \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1^{j\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{\alpha_j}^{j\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

则单纯矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有如下形式的谱分解

$$\boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \boldsymbol{E}_j.$$

性质 28.2.5 谱分解的性质

(1) $\boldsymbol{E}_j^2 = \boldsymbol{E}_j (j=1, \cdots, s)$ (幂等性);

(2) $\boldsymbol{E}_j \boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{0}$ $(j=k=1, \cdots, s; j \neq k)$ (正交性);

(3) $\sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{E}_j = \boldsymbol{I}$ (完备性);

(4) $\boldsymbol{E}_j (j=1, \cdots, s)$惟一确定(惟一性).

28.3 几种矩阵的关系

定义 28.3.1 设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$,若 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵(Hermite matrix);若 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 U 矩阵(酉阵)(U-matrix).

定义 28.3.2 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$,若满足 $\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正规阵**(normal matrix); 当满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 时, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**实正规阵**(real normal matrix).

性质 28.3.3 关于几类矩阵关系的基本结果有：

(1) Hermite 矩阵是单纯矩阵.

(2) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为 Hermite 矩阵，则存在 U 矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{*},$$

这里 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值排成的对角阵.

(3) Hermite 矩阵及 U 矩阵都是正规阵.

(4) 实对称阵及实正交阵都是正规阵.

(5) 对一个正规阵，当且仅当其所有特征值均为实数时，是 Hermite 矩阵.

(6) 对一个正规阵，当且仅当其所有特征值的绝对值(或模)均为 1 时，是 U 矩阵.

(7) 正规阵是单纯矩阵.

(8) $\forall \boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是正规阵，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵 U 矩阵相似，即满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}^{*}$.

28.4 有关特征值的不等式(矩阵不等式)

关于矩阵特征值的上限和下限有如下基本结果(矩阵不等式(matrix inequality)).

定理 28.4.1 设 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$，$\|\boldsymbol{A}\|$ 为任意形式的范数，则

$$\max_i|\lambda_i(\boldsymbol{A})|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

并且，若 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵时，若采用范数 $\|\boldsymbol{A}\|_2$，则上式取等号.

定理 28.4.2 设 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$，$\|\boldsymbol{A}\|$ 为向量范数导出的范数，$\mu(\boldsymbol{A})$为相应的测度，则

(1) $-\|\boldsymbol{A}\|\leqslant-\mu(-\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{Re}\lambda_i(\boldsymbol{A})\leqslant\mu(\boldsymbol{A})\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\ (i=1,\cdots,n)$.

(2) $\min_i|\lambda_i(\boldsymbol{A})|\geqslant\max\{-\mu(-\boldsymbol{A}),-\mu(\boldsymbol{A})\}$.

公式 28.4.3 若 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵，则因其特征值全部为实

数，则有

(1) $\| \boldsymbol{A} \|_2 = \max\limits_i |\lambda_i(\boldsymbol{A})|$；

(2) $\mu_2(\boldsymbol{A}) = \max\limits_i \lambda_i(\boldsymbol{A})$；

(3) $-\mu_2(-\boldsymbol{A}) = \min\limits_i \lambda_i(\boldsymbol{A})$；

(4) $-\max\limits_i |\lambda_i(\boldsymbol{A})| \leqslant \min\limits_i \lambda_i(\boldsymbol{A}) \leqslant \lambda_i(\boldsymbol{A}) \leqslant \max\limits_i \lambda_i(\boldsymbol{A}) \leqslant \max\limits_i |\lambda_i(\boldsymbol{A})|$.

公式 28.4.4 定理 28.4.1 是反映 $\boldsymbol{A}$ 的特征值实部的不等式，若在式中取 $\boldsymbol{B} \overset{\text{def}}{=} -\mathrm{j}\boldsymbol{A}$，则可得到关于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值虚部的如下不等式($\mathrm{j}^2 = -1$)：

$$-\mu(\mathrm{j}\boldsymbol{A}) < \mathrm{Im}\,\lambda_i(\boldsymbol{A}) \leqslant \mu(-\mathrm{j}\boldsymbol{A}), \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

公式 28.4.5 关于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值实部与虚部尚有如下不等式：

(1) $\min\limits_i \lambda_i\left(\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*}{2}\right) \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_i(\boldsymbol{A}) \leqslant \max\limits_i \lambda_i\left(\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*}{2}\right)$,

(2) $\min\limits_i \left(\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*}{2\mathrm{j}}\right) \leqslant \mathrm{Im}\,\lambda_i(\boldsymbol{A}) \leqslant \max\limits_i \lambda_i\left(\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*}{2\mathrm{j}}\right)$.

关于特征值的分布，有如下基本结果.

定理 28.4.6 考虑 z 平面上 $2n$ 个圆，

$$R_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ z \,\middle|\, |z - a_{ii}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$S_j \overset{\text{def}}{=} \left\{ z \,\middle|\, |z - a_{jj}| \leqslant \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \right\}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 的全部特征值都落入 z 平面的 T 域内

$$T = \left(\bigcup_{i=1}^{n} R_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} S_j\right).$$

定理 28.4.7 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 Hermite 矩阵. 其特征值 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 对应的标准化正交集的特征向量为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ 且 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$. 定义函数

$$F(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{A} \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^* \boldsymbol{y}},$$

则有

$$\lambda_1 = F(\boldsymbol{x}_1) \leqslant F(\boldsymbol{y}) \leqslant F(\boldsymbol{x}_n) = \lambda_n.$$

式中的 $F(\boldsymbol{y})$ 称为 Rayleigh（瑞利）商（Rayleigh quotient）. 关于特征值的分布还有：

（1）U 矩阵的特征值分布在 z 平面的单位圆上.

（2）反对称阵的特征值分布在虚轴上.

29 矩阵序列与矩阵级数

29.1 向量序列

向量序列(vector sequence)与标量序列有许多相同之处,但更重要的是它们之间有着显著的不同.以下着重给出向量序列不同于标量序列的若干结果.

定义 29.1.1 将域 F 上向量空间 $V(F)$ 的范数 $\|\cdot\|$ 固定,即考虑 $V(F)$ 为线性赋范空间 $(V(F),\|\cdot\|)$, $V(F)$ 上的向量序列记为 $\{\boldsymbol{x}(k)\}=\{\boldsymbol{x}(k)\mid\boldsymbol{x}(k)\in V(F),k=1,2,\cdots\}$,若存在向量 $\boldsymbol{x}\in V(F)$,使当 $k\to\infty$ 时成立 $\|\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}\|\to0$,则称 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ 称为向量序列 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 的**极限**(limit of a vector sequence),记为 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{x}(k)\to\boldsymbol{x}(k\to\infty)$.

定义 29.1.2 设 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 为向量空间 F^n 上的向量序列,即 $\boldsymbol{x}(k)\in F^n$,记

$$\boldsymbol{x}(k)\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\\\vdots\\x_n(k)\end{pmatrix},\qquad\boldsymbol{x}\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

当 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i(k)=x_i(i=1,\cdots,n)$ 时,称 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}$ 称为向量序列 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 的**极限**.

定义 29.1.3 设向量序列 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 定义在 $V(F)$ 或 F^n 上,当满足

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}\|\boldsymbol{x}(m)-\boldsymbol{x}(n)\|=0.$$

时，称$\{\boldsymbol{x}(k)\}$为$V(F)$或F^n上的**Cauchy 序列**(Cauchy sequence).

性质 29.1.4 向量序列的性质如下：

(1) 若定义在$(V(F),\|\cdot\|)$上的向量序列$\{\boldsymbol{x}(k)\}$收敛，则$\{\boldsymbol{x}(k)\}$必为$(V(F),\|\cdot\|)$上的 Cauchy 序列.

(2) 若向量序列$\{\boldsymbol{x}(k)\}$定义在F^n上，则$\{\boldsymbol{x}(k)\}$收敛的充要条件是$\{\boldsymbol{x}(k)\}$为F^n上的 Cauchy 序列.

上面(1)的逆不成立. 参见下例.

例 29.1.5 设$t\in[0,1]$，考虑$[0,1]$上的实系数多项式全体$P[t,\mathbb{R}]$，形成$\mathbb{R}$上的向量空间，对于$P[t,\mathbb{R}]$上的向量序列和范数，取

$$x(m,t)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{m}\frac{t^k}{k!},$$

$$\|x(m,t)\|_\infty\overset{\text{def}}{=}\max_{t\in[0,1]}|x(m,t)|.$$

因为$\|x(n,t)-x(m,t)\|_\infty\leqslant\frac{1}{(m+1)!}+\cdots+\frac{1}{n!}$，则$\{x(m,t)\}$是 Cauchy 序列，但由于$\lim\limits_{m\to\infty}x(m,t)=e^t\,\overline{\in}\,P[t,\mathbb{R}]$，所以按定义 29.1.1，该向量序列不收敛.

例 29.1.6 对于F^n上的向量序列$\{\boldsymbol{x}(k)\}$，定义 29.1.1 与定义 29.1.2 是等价的.

29.2 矩阵级数

定义 29.2.1 在$F^{n\times n}$上的矩阵序列记为$\{\boldsymbol{A}(k)\}=\{\boldsymbol{A}(k)\mid\boldsymbol{A}(k)\in F^{n\times n},k=1,2,\cdots\}$，当$\boldsymbol{A}(k)$的各元素$\{a_{ij}(k)\}$收敛于$a_{ij}\in F$时，称矩阵序列$\{\boldsymbol{A}(k)\}$收敛于$\{a_{ij}\}_{n\times n}=\boldsymbol{A}$，记为$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}(k)=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$称为矩阵序列$\{\boldsymbol{A}(k)\}$的**极限**(limit of a matrix sequence).

定义 29.2.2 当$\|\boldsymbol{A}(k)-\boldsymbol{A}\|\to0\ (k\to\infty)$时，称矩阵序列

$\{\boldsymbol{A}(k)\}$收敛于 $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A}$ 称为矩阵序列$\{\boldsymbol{A}(k)\}$的极限. 这里 $\|\cdot\|$ 为任意矩阵范数.

定理 29.2.3 定义 29.2.1 与定义 29.2.2 等价.

定义 29.2.4 设$\{\boldsymbol{A}(k)\}$为 $F^{n\times n}$ 上的矩阵序列,若

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|\boldsymbol{A}(n)-\boldsymbol{A}(m)\| = 0,$$

则称$\{\boldsymbol{A}(k)\}$为 **Cauchy 序列**,其中 $\|\cdot\|$ 为任意矩阵范数.

定理 29.2.5 矩阵序列$\{\boldsymbol{A}(k)\}$收敛的充要条件是$\{\boldsymbol{A}(k)\}$为 Cauchy 序列.

定义 29.2.6 设$\{\boldsymbol{A}(k)\}=(a_{ij}(k))\in F^{n\times n}$,当 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{ij}(k)=a_{ij}$ $(i,j=1,\cdots,n)$时,称**矩阵级数** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}(k)$ **收敛**(convergence of matrix series),且 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in F^{-n\times n}$ 称为矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}(k)$的和,记为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}(k)=\boldsymbol{A}$. 又当数值级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|\boldsymbol{A}(k)\|$ 收敛时,称 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}(k)$**绝对收敛**(absolutely convergent).

若定义矩阵级数的**部分和**

$$\boldsymbol{S}(m) = \sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{A}(k),$$

则部分和序列$\{\boldsymbol{S}(m)\}$收敛的条件均适用于矩阵级数收敛性的判别.

例 29.2.7 设 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$,考虑矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k$,因为

$$\|\boldsymbol{I}\| + \|\boldsymbol{A}\| + \cdots + \frac{1}{k!}\|\boldsymbol{A}\|^k + \cdots = \mathrm{e}^{\|\boldsymbol{A}\|} - 1 + \|\boldsymbol{I}\|,$$

则 $\forall\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$,所考虑的矩阵级数绝对收敛,其和称为 $\boldsymbol{A}$ 的**矩阵指数**,记为

$$e^{A} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^{k}.$$

矩阵函数的一般性概念将在第 31 章给出.

定理 29.2.8 设 $A \in F^{n\times n}$,其若当标准形为 $J \in F^{n\times n}$,则

$$\lim_{k\to\infty} A^{k} = 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} J^{k} = 0 \Leftrightarrow |\lambda_i(A)| < 1, \qquad \forall i.$$

例 29.2.9 可利用定理 29.2.8 证明不等式 $|\lambda_i(A)| \leqslant \|A\|$,这里 $\|\cdot\|$ 为任意矩阵范数($i=1,\cdots,n$).

例 29.2.10 设 $A \in F^{n\times n}$,矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^{k}$ 收敛于 $(I-A)^{-1}$ 的充分条件是 $\|A\| < 1$,充要条件是

$$\lim_{k\to\infty} A^{k} = 0 \quad \text{或} \quad |\lambda_i(A)| < 1, \qquad i = 1,\cdots,n.$$

例 29.2.11 设 $A \in F^{n\times n}$,若 $\|A\| < 1$,则 $\det(I-A) \neq 0$.

30 矩阵的微分与积分

30.1 引言

矩阵的导数与微分是现代应用数学的重要工具，广泛用于多元统计、系统分析与系统辨识、大系统的优化方法等领域中. 尤其是大量的矩阵导数公式，它们明显地与标量函数的导数公式不尽相同. 出现在文献资料中的矩阵导数公式，记号和形式常有差异，本章给出最常用的一些公式，尽量采用通用记号. 至于矩阵的积分，应用场合相对少一些. 另外，某些矩阵函数的导数公式，将在第 31 章给出.

30.2 矩阵的导数

定义 30.2.1 设标量 $x, h \in \mathbb{R}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为 x 的函数 $a_{ij}(x)$，记为

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \cdots & a_{mn}(x) \end{pmatrix} \in F^{m\times n}.$$

当存在 $\boldsymbol{A}'(x) \in F^{m\times n}$，使

$$\lim_{|h|\to 0}\left\|\frac{\boldsymbol{A}(x+h)-\boldsymbol{A}(x)}{h}-\boldsymbol{A}'(x)\right\|=0,$$

称矩阵 $\boldsymbol{A}'(x)$ 为 $\boldsymbol{A}(x)$ 的**导数**(derivative of a matrix)，并称 $\boldsymbol{A}(x)$

可微或可导，记为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}'(x),$$

或记为微分形式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x) = \boldsymbol{A}'(x)\mathrm{d}x.$$

定义 30.2.2 设 $\boldsymbol{A}(x)=(a_{ij}(x))\in F^{m\times n}$，当 $a_{ij}(x)$ $(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$对 $x\in\mathbb{R}$ 可微分时，称 $\boldsymbol{A}(x)$可微分，且 $\boldsymbol{A}(x)$的导数$\boldsymbol{A}'(x)$定义为

$$\boldsymbol{A}'(x) = \left(\frac{\mathrm{d}a_{ij}(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{m\times n} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}.$$

定理 30.2.3 对以实变量 x 的函数为元素的矩阵 $\boldsymbol{A}(x)\in F^{m\times n}$，定义 30.2.1 与定义 30.2.2 等价.

性质 30.2.4 由定义 30.2.1 及定义 30.2.2 给出的导数具有如下基本运算性质(假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可对 x 微分)：

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶数矩阵，则

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}x};$$

(2) 设矩阵积 $\boldsymbol{AB}$ 可定义，则

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{AB})}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}x}\right)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}x}\right);$$

(3) 设标量函数 $\alpha=\alpha(x)$可微分，则

$$\frac{\mathrm{d}(\alpha\boldsymbol{A})}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}\alpha(x)}{\mathrm{d}x}\right)\boldsymbol{A}+\alpha\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}x}\right);$$

(4) $\dfrac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}x}\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\otimes\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}x}$,

其中$\otimes$表示 Kroneker 积；

(5) 若 $\boldsymbol{A}(x)$为非奇异矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}(x)$亦可微分，且

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{A}^{-1}(x))}{\mathrm{d}x}=-\boldsymbol{A}^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(x)}{\mathrm{d}x}\right)\boldsymbol{A}^{-1}.$$

以上是将矩阵 $\mathbf{A}$ 的元素视为标量 x 的函数时，矩阵导数的一般情况.

30.3 关于向量及矩阵的导数

现把矩阵 $\mathbf{A}$ 或向量 $\boldsymbol{x}$ 视为自变量，给出关于导数的若干结果.

定义 30.3.1 (1) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$，$f(\boldsymbol{\theta})$是标量函数，$f$ 对 $\boldsymbol{\theta}$ 的导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}}=\left(\frac{\partial f}{\partial \theta_1},\frac{\partial f}{\partial \theta_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial \theta_n}\right)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\theta_i(i=1,\cdots,n)$为 $\boldsymbol{\theta}$ 的分量.

(2) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})\in\mathbb{R}^m$，则定义 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 对 $\boldsymbol{\theta}$ 的导数为一个 $n\times m$ 矩阵，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{\theta}}=\left(\frac{\partial \beta_1}{\partial \boldsymbol{\theta}},\frac{\partial \beta_2}{\partial \boldsymbol{\theta}},\cdots,\frac{\partial \beta_m}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial \beta_m}{\partial \theta_1}\\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial \beta_m}{\partial \theta_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_n} & \cdots & \frac{\partial \beta_m}{\partial \theta_n}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times m},$$

其中 $\beta_i(i=1,\cdots,m)$为 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量.

(3) 设 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$f(\mathbf{A})$为 $\mathbf{A}$ 的标量函数，则定义 f 对 $\mathbf{A}$ 的导数为一个 $m\times n$ 矩阵，记为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}}=\left(\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}\right)_{m\times n}.$$

(4) 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathbf{B}=(b_{ij})\in F^{s\times t}$，则定义 $\mathbf{B}$ 对 $\mathbf{A}$ 的导数为一个$(ms)\times(nt)$的矩阵，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} \frac{\partial b_{11}}{\partial \boldsymbol{A}} & \frac{\partial b_{12}}{\partial \boldsymbol{A}} & \cdots & \frac{\partial b_{1t}}{\partial \boldsymbol{A}} \\ \frac{\partial b_{21}}{\partial \boldsymbol{A}} & \frac{\partial b_{22}}{\partial \boldsymbol{A}} & \cdots & \frac{\partial b_{2t}}{\partial \boldsymbol{A}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial b_{s1}}{\partial \boldsymbol{A}} & \frac{\partial b_{s2}}{\partial \boldsymbol{A}} & \cdots & \frac{\partial b_{st}}{\partial \boldsymbol{A}} \end{pmatrix}.$$

在以上(1)～(4)中,均假设相应的导数存在.

例 30.3.2 按定义 30.3.1 可得到关于向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的导数.

(1) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{I}_n$;

(2) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=\mathrm{cs}\boldsymbol{I}_n$;

(3) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}=\mathrm{rs}\boldsymbol{I}_n$.

这里 $\mathrm{cs}\boldsymbol{A}$ 表示由 $\boldsymbol{A}$ 的列排顺序首尾相接排成的列向量;而 $\mathrm{rs}\boldsymbol{A}$ 表示由 $\boldsymbol{A}$ 的行按顺序首尾相接排成的行向量.

公式 30.3.3 向量和矩阵导数的常用公式:

(1) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^m$,则

$$\frac{\partial \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}{\partial \boldsymbol{\theta}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

(2) 设 $f(\cdot)$ 与 $g(\cdot)$ 为标量函数,$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}$,则

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}(f(\boldsymbol{X})g(\boldsymbol{X}))=\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{X}}\right)g(x)+f(\boldsymbol{X})\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{X}}\right).$$

(3) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$,$\theta_i$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的分量,则

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \theta_i}=\boldsymbol{e}_i.$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$,则

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial a_{ij}}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{m\times n},$$

其中 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{e}_j$ 的维数分别为 m 和 n.

(5) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$,则

$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\frac{\partial\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{y}+\frac{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{x}.$$

注 此式对矩阵一般不成立.

(6) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\theta})\in\mathbb{R}^m$, $f(\cdot)$是标量函数,则

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\frac{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\theta}}.$$

(7) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$ 及 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 均与 $\boldsymbol{\theta}$ 无关,则

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}.$$

(8) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 及 $\boldsymbol{C}$ 均与 $\boldsymbol{\theta}$ 无关,若

$$f(\boldsymbol{\theta})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta}),$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta}).$$

当 $\boldsymbol{C}$ 为对称阵时

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\theta}}=2\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta}).$$

(9) 设 $t\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}=(a_{ij}(t))\in\mathbb{R}^{n\times n}$,若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\boldsymbol{A})=(\det\boldsymbol{A})\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{A}^{-1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right).$$

(10) 设 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{X}$ 无关,则

① $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}\operatorname{tr}\{\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$; ② $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}\operatorname{tr}\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{X}$.

又若 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵时

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{X}}\operatorname{tr}\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}.$$

(11) 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$为对称且与 $\boldsymbol{x}$ 无关,则

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})]=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

(12) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且非奇异，则

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}}\ln(\det \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}.$$

(13) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且非奇异，$\boldsymbol{W}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 且与 $\boldsymbol{A}$ 无关，则

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{A}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{-1}) = -(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

(14) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times m}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{n\times r}$，$\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{r\times m}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{p\times q}$，则当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}$ 时，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{B}}=\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{B}}(\boldsymbol{I}_q\otimes \boldsymbol{D})+(\boldsymbol{I}_p\otimes \boldsymbol{C})\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{B}}.$$

30.4 向量及矩阵导数的应用

例 30.4.1 考虑线性模型的最小二乘估计问题，设

$$\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\varepsilon}_N \quad 及 \quad \mathrm{rank}\,\boldsymbol{\Phi}_N=m,$$

其中 $\boldsymbol{y}_N\in\mathbb{R}^N$ 为观测数据，$\boldsymbol{\Phi}_N\in\mathbb{R}^{N\times m}$ 为由观测数据排成的矩阵，$\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^m$ 为待估计的参数向量，$\boldsymbol{\varepsilon}_N\in\mathbb{R}^N$ 为模型噪声.

解 定义目标函数为

$$J(N,\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\varepsilon}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_N=(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{\theta}).$$

根据公式 30.3.3(8)便有

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}}=-2\boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{\theta}).$$

令上述导数为零得到

$$\boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_N\hat{\boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_N.$$

因为 $\mathrm{rank}\,\boldsymbol{\Phi}_N=m$，所以 $\boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_N$ 为 m 阶正定阵，得到

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_N)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_N.$$

对 $\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ 再求一次导数

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} \partial \boldsymbol{\theta}} = 2\boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_N > 0.$$

以上的大于零表示矩阵正定，因此得知 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 是使 $J(N,\boldsymbol{\theta})$ 极小化的解. 称为最小二乘估计(该例亦可用公式 30.3.3(10)).

定义 30.4.2 设 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$, $f(\boldsymbol{\theta})$ 的二阶导数定义为

$$\frac{\partial^2 J}{2\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} \partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}} \left(\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right),$$

上述形状的矩阵称为 Hessian(黑塞)矩阵(Hessian matrix).

例 30.4.3 考虑预报误差模型(prediction error model)的对数似然函数

$$J(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{R}) = \frac{mN}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\det \boldsymbol{R}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(k,\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}(k,\boldsymbol{\theta}),$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^m$ 为 m 维预报误差模型的误差 $\theta \in \mathbb{R}^p$ 是参数向量, $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\boldsymbol{\theta})$ 的协方差阵，当获得 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)$ 时, $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(N))$ 为模型的后验误差. 试对固定的 $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(N)$ 确定 $\boldsymbol{R} = \hat{\boldsymbol{R}}(N)$，使 $J(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{R})$ 极大化.

解 应用导数公式 30.3.3(10)及(12)，对 $J(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{R})$ 求导数可得

$$\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{R}} = \frac{N}{2} \boldsymbol{R}^{-1} - \frac{1}{2} \boldsymbol{R}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varepsilon}(k,\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(k,\boldsymbol{\theta}) \right) \boldsymbol{R}^{-1}.$$

令上述导数为零可解得

$$\hat{\boldsymbol{R}}(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varepsilon}(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)) \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)).$$

利用有关的导数公式及二阶变分方法，可进一步证明 $J(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{R})$ 的 Hessian 矩阵为负定阵.

30.5 向量及矩阵的积分

由于向量只是矩阵的特例，只要给出矩阵的积分就够了.

定义 30.5.1 设 $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$，若 $a_{ij}(x)$

可积($i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$),则以 $\int_{x_1}^{x_2} a_{ij}(x)\mathrm{d}x$ 为 i-j 元素的矩阵,称为矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$ 的积分(integration of matrix),记为

$$\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}x = \left(\int_{x_1}^{x_2} a_{ij}(x)\mathrm{d}x\right) \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

如果积分元素为矩阵,则被积函数可能出现 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})$ 的形式. 即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的函数.

公式 30.5.2　函数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})$ 的微分公式　设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})\in\mathbb{R}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{p\times q}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的元素

$$a_{ij} = a_{ij}(b_{kl} \mid k=1,\cdots,p;l=1,\cdots,q)$$

是 $\boldsymbol{B}$ 的所有元素 $b_{kl}(k=1,\cdots,p;l=1,\cdots,q)$ 的函数,这时有微分公式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a_{ij} &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{kl}}\mathrm{d}b_{kl} = \frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}(\mathrm{rs}\,\boldsymbol{B})}\mathrm{d}(\mathrm{rs}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} \\ &= \mathrm{d}(\mathrm{cs}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}(\mathrm{cs}\,\boldsymbol{B})},\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}(\mathrm{rs}\,\boldsymbol{B})}\{\mathrm{d}(\mathrm{rs}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_n\} = \{\mathrm{d}(\mathrm{cs}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_n\}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}(\mathrm{cs}\,\boldsymbol{B})}.$$

公式 30.5.3　函数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})$ 的积分公式　利用公式 30.5.2 中的微分记号可得如下积分公式

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{A}_1}^{\boldsymbol{A}_2}\mathrm{d}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}) &= \int_{\boldsymbol{B}_1}^{\boldsymbol{B}_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}(\mathrm{rs}\,\boldsymbol{B})}\{\mathrm{d}(\mathrm{rs}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_n\} \\ &= \int_{\boldsymbol{B}_1}^{\boldsymbol{B}_2}\{\mathrm{d}(\mathrm{cs}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_n\}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}(\mathrm{cs}\,\boldsymbol{B})} \\ &= \left(\int_{\boldsymbol{B}_1}^{\boldsymbol{B}_2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}\frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{kl}}\mathrm{d}b_{kl}\right).\end{aligned}$$

上述积分视为曲线积分,且与路径无关,仅依赖于矩阵 $\boldsymbol{B}_1$ 及 $\boldsymbol{B}_2$.

30.6 向量函数的 Cramer 行列式与内积

对于变系数微分方程组或线性时变系统，常常要处理以定义在实轴区间$[t_0,t_1]$上的连续实函数 $f_{ij}(\cdot)$为元素的矩阵

$$\boldsymbol{F}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (f_{ij}(t))_{m\times n}.$$

上述连续实函数的全体构成实数域$\mathbb{R}$上的向量空间，用 $C[t_0,t_1]$表示，于是 $\boldsymbol{F}(\cdot)$的列或行可以看成向量空间 $C[t_0,t_1]^m$ 或 $C[t_0,t_1]^n$的元，而 $\boldsymbol{F}(\cdot)$的列或行的线性相关与否是一个重要概念.

定义 30.6.1 设 $\boldsymbol{f}_j(\cdot)\in C[t_0,t_1]^m(j=1,\cdots,n)$. 若存在不全为零的 $\alpha_i\in\mathbb{R}\ (i=1,\cdots,n)$使得

$$\alpha_1\boldsymbol{f}_1(t)+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{f}_n(t)\equiv\boldsymbol{0},\qquad \forall t\in[t_0,t_1],$$

则称**向量函数**(vector function)$\{\boldsymbol{f}_j(\cdot)\mid j=1,\cdots,n\}$在$[t_0,t_1]$上**线性相关**(linear dependence). 否则，即若从上式的成立可以推得

$$\alpha_i=0,\qquad i=1,\cdots,n,$$

则称向量函数$\{\boldsymbol{f}_j(\cdot)\mid j=1,\cdots,n\}$在$[t_0,t_1]$上**线性无关**.

注 30.6.2 (1)上述定义中的 $\alpha_i\in\mathbb{R}\ (i=1,\cdots,n)$必须是与$t\in[t_0,t_1]$无关的数.

(2)上述 $\alpha_i(i=1,\cdots,n)$的所属域$\mathbb{R}$与向量组 $\boldsymbol{f}_j(\cdot)(j=1,\cdots,n)$所属域 $C[t_0,t_1]$不同，因而不能用$\mathbb{R}^n$上向量组线性相关(矩阵的秩)的判别方法来判别 $\boldsymbol{f}_j(\cdot)\in C[t_0,t_1]^m(j=1,\cdots,n)$的线性相关.

以下给出关于 $\boldsymbol{f}_j(\cdot)\in C[t_0,t_1]^m(j=1,\cdots,n)$线性相关的判别方法.

定义 30.6.3 令 $\boldsymbol{f}_k(\cdot)(k=1,\cdots,n)$为 $C[t_0,t_1]^m$ 上的向量，记

$$g_{ij}=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}_j(t)\mathrm{d}t,\qquad i,j=1,\cdots,n,$$

称矩阵 $\boldsymbol{G}\stackrel{\mathrm{def}}{=}(g_{ij})_{n\times n}$为$\{\boldsymbol{f}_k(\cdot)\mid k=1,\cdots,n\}$的 Cramer 矩阵(Cramer matrix),det $\boldsymbol{G}$ 为相应的 Cramer 行列式(Cramer determinant).

性质 30.6.4 (1) Cramer 矩阵是对称矩阵,且为半正定阵.

(2) $\boldsymbol{F}(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{f_{ij}(t)\}_{m\times n}$的 n 个列向量对应的 Cramer 矩阵可用下式给出

$$\boldsymbol{G}=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t.$$

定理 30.6.5 $f_k(\cdot)$ $(k=1,\cdots,n)$线性独立的充要条件是$\{\boldsymbol{f}_k(\cdot)\}$的 Cramer 矩阵非奇异,即 det $\boldsymbol{G}\neq 0$.

上述定理可推广到定义在$[t_0,t_1]$上分段连续的复函数的场合,这时相应的 Cramer 矩阵定义为

$$\boldsymbol{G}=\left\{\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}_i^*(t)\boldsymbol{f}_j(t)\mathrm{d}t\right\}_{n\times n},\qquad i,j=1,\cdots,n$$

或

$$\boldsymbol{G}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}^*(t)\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t.$$

以上结论是针对以连续或分段连续函数为元的向量组的线性相关,若进一步假设向量组的元是适当阶次连续可微的函数,则判别向量组线性相关尚有如下方法.

定义 30.6.6 设定义在$[t_0,t_1]$上的纯量函数 $f_j(t)$ $(j=1,\cdots,n)$满足 $n-1$ 次连续可微条件,则矩阵

$$\boldsymbol{W}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\begin{pmatrix}f_1 & f'_1 & \cdots & f_1^{(n-1)}\\ f_2 & f'_2 & \cdots & f_2^{(n-1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_n & f'_n & \cdots & f_n^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

的行列式 det $\boldsymbol{W}$ 为函数组$\{f_i(t)\mid i=1,\cdots,n\}$的 Wronski 行列式

(Wronskian Determiant).

定理 30.6.7 若纯量函数组$\{f_i(t)\mid t\in[t_0,t_1], i=1,\cdots,n\}$的 Wronskian. 行列式 $\det \boldsymbol{W}\neq 0$,对某个 $t\in[t_0,t_1]$,则该函数组在$[t_0,t_1]$上线性独立.

定义 30.6.8 设 $\boldsymbol{f}_i(t)(i=1,\cdots,n)$是定义在$[t_0,t_1]$上以 $n-1$ 次连续可微实函数为元的 r 维向量,记

$$\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_1(t) \\ \vdots \\ -\boldsymbol{f}_n(t) \end{pmatrix}_{n\times r},$$

则定义矩阵

$$\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{F}(t),\boldsymbol{F}'(t),\cdots,\boldsymbol{F}^{(n-1)}(t))_{n\times nr}$$

为$\{\boldsymbol{f}_i(t)\mid t\in[t_0,t_1], i=1,\cdots,n\}$的 Wronskian 矩阵.

定理 30.6.9 若对某个 $t\in[t_0,t_1]$,向量函数组$\{\boldsymbol{f}_i(t)\mid t\in[t_0,t_1], i=1,\cdots,n\}$的 Wronskian 矩阵 $\boldsymbol{W}$ 的秩为 n,则 $\boldsymbol{f}_1(t),\cdots,\boldsymbol{f}_n(t)$在$[t_0,t_1]$上线性独立.

上述定理的逆一般不成立,即对一切 $t\in[t_0,t_1]$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{W}<n$, $\boldsymbol{f}_1(t),\cdots,\boldsymbol{f}_n(t)$还不一定在$[t_0,t_1]$上线性相关. 若把条件进一步限制为所谓的正则函数,则上述定理可变为充要条件.

定义 30.6.10 设定义在$[t_0,t_1]$上的实函数 $f(\cdot)$ n 次连续可微,且对所有的 $t^*\in[t_0,t_1]$, $f(t)$在 t^* 附近均有 Taylor 展开

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t^*)^n}{n!}f^{(n)}(t^*)$$

成立时,称 $f(t)$为**正则函数**(regular function).

定理 30.6.11 以正则函数为元的向量 $\boldsymbol{f}_1(t),\cdots,\boldsymbol{f}_n(t)$在$[t_0,t_1]$上线性独立的充要条件是该向量函数组的 Wronskian 矩阵有

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{F}(t),\boldsymbol{F}'(\mathrm{t}),\cdots,\boldsymbol{F}^{(n-1)}(t))=n.$$

定义 30.6.12 设 V 是域$\mathbb{C}(\mathbb{R})$上的向量空间,当 V 上的两

个向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 按运算 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 与某个复数(或实数)相对应,并且满足:

(1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$;

(2) $(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,$\lambda$ 为常数;

(3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$;

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqslant 0$,且 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

时,称 $(\cdot,\cdot)$ 为内积(inner product),可以定义内积的向量空间称为内积空间(inner product space).

例 30.6.13 (1) 按定义 30.6.3,g_{ij} 的运算构成内积运算,即 g_{ij} 的运算满足定义 30.6.11 中的(1)~(4).

(2) 对于向量空间 $\mathbb{R}^m$ 中的向量 $a_i(i=1,\cdots,n)$,若定义

$$(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{a}_j,$$

则这一定义满足定义 30.6.11 中的(1)~(4).

(3) 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$,按上述(2)定义内积,则对应于 $\boldsymbol{a}_i\in\mathbb{R}^m(i=1,\cdots,n)$ 的 Cramer 矩阵可定义为

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}.$$

(4) 按上述(3),对于 $\mathbb{R}^m$ 上的向量组,按 $\boldsymbol{A}$ 的秩判断 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性独立与按 Cramer 矩阵方法是等价的. 但对于 $C[t_0,t_1]^m$ 上的向量函数组,两者是不等价的.

定理 30.6.14 在可定义内积的向量空间中,函数 $\|\boldsymbol{x}\|=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{1/2}$ 满足范数条件,即内积空间可按 $\|\boldsymbol{X}\|=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})^{1/2}$ 形成赋范空间.

例 30.6.15 对于内积 $(\cdot,\cdot)$,有 Schwarz 不等式如下:

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|.$$

解 若 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$,则不等式显然成立,现设 $\boldsymbol{y}\neq 0$,$\forall\alpha\in F$,有

$$0\leqslant(\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-\alpha(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})-\overline{\alpha}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\alpha^2(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}).$$

令 $\alpha=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$,则上式变成

$$0\leqslant(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2/(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}).$$

上式意味着 Schwarz 不等式成立.

公式 30.6.16 利用内积和范数的运算,可得到公式

$$\left\| \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t \right\|_\infty \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \| \boldsymbol{f}(t) \|_\infty \mathrm{d}t,$$

其中 $\boldsymbol{f} \in C[t_0, t_1]^m$, $\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^m$.

公式 30.6.17 对于向量函数空间 $C[t_0, t_1]^m$ 中的范数常记为 $\| \boldsymbol{f} \|$, $\boldsymbol{f} \in C[t_0, t_1]^m$,一般有如下形式

$$\| \boldsymbol{f} \| = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f})^{1/2} \overset{\text{def}}{=} \left[\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(t) \boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t \right]^{1/2}$$

$$= \left[\int_{t_0}^{t_1} \| f(t) \|_2^2 \mathrm{d}t \right]^{1/2},$$

或

$$\| \boldsymbol{f} \| = \left[\int_{t_0}^{t} \| \boldsymbol{f}(t) \|^p \mathrm{d}t \right]^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty.$$

以上 $\| \boldsymbol{f}(t) \|_2$ 及 $\| \boldsymbol{f}(t) \|$ 均表示 $\mathbb{R}^m$ 上的范数,而 $\| \boldsymbol{f} \|$ 表示向量函数空间 $C[t_0, t_1]^m$ 上的范数.一般不会混淆.

31　矩阵函数

31.1　引言

矩阵函数是矩阵分析的重要内容,它是以矩阵形式定义的函数,在性质与运算等方面,它以矩阵理论为基础,与标量函数(或纯量函数)相比,有许多不同之处.矩阵函数是处理许多应用数学问题的有力工具,在系统分析理论中占有重要位置.矩阵函数的概念是由矩阵多项式引入的,在本章首先对矩阵多项式给出必要的简介.

31.2　矩阵多项式

定义 31.2.1　设矩阵 $\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$, $a_i\in\mathbb{R}\ (i=0,1,\cdots,n)$,将标量多项式 $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$ 中的 λ^i 换成 $\boldsymbol{A}^i$, $\lambda^0=1$ 换成单位阵 $\boldsymbol{I}$,称形如

$$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n$$

的多项式为**矩阵多项式**(matrix polynomial).

注　矩阵多项式不同于多项式矩阵,多项式矩阵是指以同一个域上的多项式为元素构成的矩阵.两个名词不能混淆.

矩阵多项式的性质

(1) $\forall\boldsymbol{A}\in F^{n\times n}$ 及矩阵多项式 $f(\boldsymbol{A})$ 对乘法运算总是可交换的.

(2) $f(\boldsymbol{TAT}^{-1})=\boldsymbol{T}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}^{-1}$.

(3) 在对特征值适当编号的前提下，

$$\lambda_i[f(\mathbf{A})] = f(\lambda_i(\mathbf{A})),$$

并且 $\mathbf{A}$ 的与 $\lambda_i(\mathbf{A})$ 对应的特征向量是与 $f(\mathbf{A})$ 的与 $f(\lambda_i(\mathbf{A}))$ 对应的特征向量，其逆亦真.

(4) 设 $\mathbf{A} \in F^{n\times n}$ 为单纯矩阵，其谱分解为

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \mathbf{E}_j,$$

则有

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{s} f(\lambda_j)\mathbf{E}_j.$$

定理 31.2.2 Cayley-Hamilton 定理　设 $\psi(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$，则 $\forall \mathbf{A} \in F^{n\times n}$ 有

$$\psi(\mathbf{A}) = \mathbf{0}.$$

上述定理说明 n 次多项式 $\psi(\lambda)$ 是 $\mathbf{A}$ 的零化多项式. 在 $\mathbf{A}$ 的零化多项式中，次数最低的多项式称为最小多项式(minimal polynomial).

最小多项式的性质

最小多项式一般记为 $\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)$，$\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)$ 有如下基本性质：

(1) $\mathbf{A}$ 的任意零化多项式都可以用 $\psi_{\mathrm{m}}(\mathbf{A})$ 整除.

(2) $\mathbf{A}$ 的首一最小多项式惟一确定.

(3) 相似矩阵的最小多项式相同.

(4) $\mathbf{A}$ 的所有特征值几何重度是 1，等价于 $\mathbf{A}$ 的特征多项式和最小多项式相一致.

(5) 记 $\mathbf{A}$ 的特征多项式与最小多项式分别为

$$\psi = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s},$$

$$\psi_{\mathrm{m}} = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{d_s},$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 $\mathbf{A}$ 的 s 个相异特征值，则 $\mathbf{A}$ 为单纯矩阵等价于 $d_j = 1 (j = 1, \cdots, s)$.

定理 31.2.3 设$A\in F^{n\times n}$的相异特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$,对于两个多项式$f$和$g$,使得$f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})$的充要条件是在$\boldsymbol{A}$的谱上成立

$$f^{(i)}(\lambda_j)=g^{(i)}(\lambda_j),\qquad j=1,\cdots,s;\ i=0,1,\cdots,d_j-1.\qquad(31.1)$$

由上述定理可得$f(\boldsymbol{A})\equiv\boldsymbol{0}$的充要条件是在$\boldsymbol{A}$的谱上成立

$$f^{(i)}(\lambda_j)=0\qquad j=1,\cdots,s;\ i=0,1,\cdots,d_j.\qquad(31.2)$$

31.3 矩阵函数

矩阵函数的定义一般有两种,即按多项式意义和幂级数意义下的两种定义,两种定义得到的矩阵函数是一致的.

定义 31.3.1 设矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$的谱为$\{\lambda_i\mid i=1,\cdots,s\}$,$f(\cdot)$是在包含所有$\{\lambda_i\}$在内的开域上有定义的标量函数,而$g(\cdot)$是在$\boldsymbol{A}$的谱上与$f(\cdot)$相一致的多项式,即

$$g^{(l)}(\lambda_i)=f^{(l)}(\lambda_i),\qquad j=1,\cdots,s;\ l=0,1,\cdots,d_{i-1},$$

则定义

$$f(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})$$

为$\boldsymbol{A}$的**矩阵函数**(matrix function).

矩阵函数的性质

(1) 两个矩阵函数$f_1(\cdot)$与$f_2(\cdot)$相等,当且仅当$f_1(\cdot)$与$f_2(\cdot)$在$\boldsymbol{A}$的谱上相一致.

(2) $\boldsymbol{A}$和矩阵函数$f(\boldsymbol{A})$可交换,即

$$\boldsymbol{A}f(\boldsymbol{A})=f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}.$$

(3) 两个矩阵函数$f_1(\cdot)$与$f_2(\cdot)$对它们的和与积满足运算

$$(f_1+f_2)(\boldsymbol{A})=f_1(\boldsymbol{A})+f_2(\boldsymbol{A}),$$
$$(f_1f_2)(\boldsymbol{A})=f_1(\boldsymbol{A})f_2(\boldsymbol{A}).$$

(4) 若$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似,则矩阵函数$f(\boldsymbol{A})$和$f(\boldsymbol{B})$亦相似,即对可逆矩阵$\boldsymbol{T}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,由$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$可推出$f(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{T}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}$.

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是分块对角阵，则 $f(\boldsymbol{A})$ 亦为分块对角阵，即当

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{pmatrix}$$

时，必然有

$$f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{A}_1) & & & \\ & f(\boldsymbol{A}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\boldsymbol{A}_s) \end{pmatrix}.$$

(6) 设 $g(x_1,x_2)$ 为二元多项式，f_1 和 f_2 为给定的两个函数，若在 $\boldsymbol{A}$ 的谱上

$$g(f_1(\lambda_i),f_2(\lambda_i))=0,\qquad i=1,\cdots,s,$$

则有矩阵恒等式

$$g(f_1(\boldsymbol{A}),f_2(\boldsymbol{A}))=0.$$

(7) 矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})\equiv\boldsymbol{0}$ 的充要条件是在 $\boldsymbol{A}$ 的谱上

$$f^{(l)}(\lambda_i)=0,\qquad i=1,\cdots,s;l=0,1,\cdots,d_i-1.$$

例 31.3.2 考虑 Jordan 矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$$

的矩阵函数 $f(\boldsymbol{J})$，因为 $\boldsymbol{J}$ 的最小多项式与其特征多项式相一致，即

$$\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)=\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^n.$$

于是在 $\boldsymbol{J}$ 的谱上与 $f(\cdot)$ 相一致的多项式可由

$$g(\lambda)=f(\lambda_i)+f^{(1)}(\lambda_i)(\lambda-\lambda_i)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!}(\lambda-\lambda_i)^{n-1}$$

给出，即矩阵函数 $f(\mathbf{A})$可定义为

$$f(\mathbf{A})=g(\mathbf{A})$$
$$=f(\lambda_i)\boldsymbol{I}+f^{(1)}(\lambda_i)(\mathbf{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!}(\mathbf{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})^{n-1},$$

或记为

$$f(\boldsymbol{J})=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f^{(1)}(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda_i) \\ 0 & f(\lambda_i) & f^{(1)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & f^{(1)}(\lambda_i) \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & f(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

以上用到如下的矩阵运算，即设

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{J}-\lambda_i\boldsymbol{I},$$

则有

$$\boldsymbol{H}^2=(\boldsymbol{J}-\lambda_i\boldsymbol{I})^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

并且 $\boldsymbol{H}^n=(\boldsymbol{J}-\lambda_i\boldsymbol{I})^n=0$.

例 31.3.3 由矩阵函数的性质(7)可得知，对标量函数的恒等式，均可推广到矩阵函数的情形，比如 $\forall \mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，可得到

$$\cos^2 \boldsymbol{A} + \sin^2 \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$
$$e^{\boldsymbol{A}} e^{-\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I},$$
$$e^{i\boldsymbol{A}} = \cos \boldsymbol{A} + i \sin \boldsymbol{A}, \qquad i^2 = -1,$$

等等.

对于某些特定的矩阵函数计算问题．一般分为数值方法和解析方法．对于数值方法，作为例子，我们将在第 36 章和第 38 章给出．下面给出矩阵函数标准形.

31.4 矩阵函数的标准形

矩阵函数的标准形(*normal form of a matrix function*)A

利用矩阵函数的性质和例 31.3.2 的结果可得 $f(\mathbf{A})$的 Jordan **标准形**(Jordan's canonical form).

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$的 Jordan 标准形为 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$,其中 $\boldsymbol{T}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,记

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{J}_s \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{i1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{i2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{J}_{i\alpha_i} \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}, \quad \sum_{i=1}^{s} m_i = n, i = 1,2,\cdots,s,$$

$$\boldsymbol{J}_{ij}=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_{ij}\times n_{ij}}, \quad \sum_{j=1}^{\alpha_i} n_{ij} = m_i, j = 1,2,\cdots,\alpha_i.$$

则矩阵函数 $f(\boldsymbol{A})$ 的 Jordan 标准形为

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{T}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{T}^{-1},$$

$$f(\boldsymbol{J})=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_1) & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & f(\boldsymbol{J}_2) & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & f(\boldsymbol{J}_s) \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$f(\boldsymbol{J}_i)=\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{J}_{i1}) & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & f(\boldsymbol{J}_{i2}) & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & f(\boldsymbol{J}_{i\alpha_i}) \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}, \quad i=1,2,\cdots,s,$$

$$f(\boldsymbol{J}_{ij})=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & f^{(1)}(\lambda_i) & \cdots & \dfrac{f^{(n_{ij}-1)}(\lambda_i)}{(n_{ij}-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & f^{(1)}(\lambda_i) \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_i) \end{pmatrix}_{n_{ij}\times n_{ij}}, \quad j=1,\cdots,\alpha_i.$$

特别当 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式

$$\psi_{\mathrm{m}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s}$$

中 $d_1=d_2=\cdots=d_s=1$ 时，当然也包括 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异特征值时 $(s=n)$，$\boldsymbol{A}$ 的 Jordan 标准形变为

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{J}_s \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}, \quad \sum_{i=1}^{s} m_i = n,\ i=1,\cdots,s.$$

则 $f(\mathbf{A})$的 Jordan 标准形变为

$$f(\mathbf{A})=\boldsymbol{T}f(\boldsymbol{J})\boldsymbol{T}^{-1},$$

$$f(\boldsymbol{J})=\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{J}_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & f(\boldsymbol{J}_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & f(\boldsymbol{J}_s) \end{bmatrix}_{n\times n},$$

$$f(\boldsymbol{J}_i)=\begin{bmatrix} f(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}, \quad \sum_{i=1}^{s} m_i = n, \quad i = 1,\cdots,s.$$

矩阵函数的标准形 B

仍然设 $\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$的最小多项式为

$$\psi_{\mathrm{m}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 $\mathbf{A}$ 的 s 个相异特征值，按定义 31.3.1，可求出 $f(\mathbf{A})$的 **Largrange-Sylvester**（西尔维斯特）**内插多项式标准形**（Largrange-Sylvester interpolation polynomial canonical form）如下：

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{s}[\alpha_{k1}\boldsymbol{I}+\alpha_{k2}(\mathbf{A}-\lambda_k\boldsymbol{I})+\cdots+\alpha_{kd_k}(\mathbf{A}-\lambda_k\boldsymbol{I})^{d_k-1}]\varphi_k(\mathbf{A}),$$

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{(l-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}\lambda^{l-1}}\left(\frac{(\lambda-\lambda_k)^{d_k}f(\lambda)}{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)}\right)\right]_{\lambda=\lambda_k},$$

$$k = 1,\cdots,s;\ l = 1,\cdots,d_k,$$

$$\varphi_k(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi_{\mathrm{m}}(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{d_k}}$$

$$= (\lambda-\lambda_1)^{d_1}\cdots(\lambda-\lambda_{k-1})^{d_{k-1}}(\lambda-\lambda_{k+1})^{d_{k+1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s}.$$

特别地，当 $d_1=d_2=\cdots=d_s=1$ 时，当然也包括 $\mathbf{A}$ 具有 n 个不同特征值时（$s=n$），$f(\mathbf{A})$的 Largrange-Sylvester 内插多项式标准形变为

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{k1} \varphi_k(\boldsymbol{A}),$$

$$\alpha_{k1} = \frac{f(\lambda_k)}{\varphi_k(\lambda_k)}, \qquad k = 1, \cdots, s,$$

$$\varphi_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_{k-1})(\lambda - \lambda_{k+1})\cdots(\lambda - \lambda_s).$$

或记为简单形式

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k) F_k(\boldsymbol{A}), \quad F_k(\boldsymbol{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{s} \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{I}}{\lambda_k - \lambda_j}. \qquad (31.3)$$

矩阵函数的标准形 C

把矩阵函数的标准形 **B** 中 Largrange-Sylvester 内插多项式的系数 α_{kl} 代入后，按 $f(\lambda_k)$ 及其各阶导数 $f^{(l)}(\lambda_k)(l=1,\cdots,d_k-1)$ 的同类项做和可得到 $f(\boldsymbol{A})$ 的**矩阵分量标准形**(canonical form based on matrix component)如下：

$$f(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=1}^{s} [f(\lambda_k) p_{k0}(\boldsymbol{A}) + f^{(1)}(\lambda k) p_{k1}(\boldsymbol{A}) + \cdots + f^{(d_k-1)}(\lambda_k) p_{kd_k-1}(\boldsymbol{A})],$$

$$p_{kl} = \frac{1}{l!}(\lambda - \lambda_k)^l \psi_k(\lambda), \qquad l = 0, 1, \cdots, d_k - 1,$$

$$\psi_k(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} n_k(\lambda)\varphi_k(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} n_k(\lambda) \frac{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{d_k}},$$

其中 $n_k(\lambda)$ 满足

$$\frac{1}{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{s} \frac{n_k(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)^{d_k}}.$$

应注意到这里的 $p_{kl}(\boldsymbol{A})$ 只与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有关，而与 $f(\cdot)$ 无关. $p_{kl}(\boldsymbol{A})$ 称为**矩阵 A 的分量**. 上述的标准形也称为**矩阵函数的基本公式**(fondamental formula for matrix function).

特别地，当 $d_1 = d_2 = \cdots = d_s$ 时，上述矩阵分量标准形和相应的 Largrange-Sylvester 内插多项式标准形(31.3)相一致. 这时有

$$p_{k0}(\boldsymbol{A}) = F_k(\boldsymbol{A}).$$

例 31.4.1　求标准形 C 的两个例

(1) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$的最少多项式为

$$\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^2,$$

$$\frac{1}{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)}=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda-\lambda_1)}-\frac{\lambda-2\lambda_2+\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2(\lambda-\lambda_2)^2},$$

$$\psi_1(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2},$$

$$\psi_2(\lambda)=\frac{(-\lambda-\lambda_1+2\lambda_2)(\lambda-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}.$$

此时矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分量有 3 个

$$p_{10}(\lambda)=\psi_1(\lambda),$$
$$p_{20}(\lambda)=\psi_2(\lambda),$$
$$p_{21}(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)\psi_2(\lambda).$$

多项式

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=0}^{d_k-1}f^{(l)}(\lambda_k)p_{kl}(\lambda)\\&=f(\lambda_1)p_{10}(\lambda)+f(\lambda_2)p_{20}(\lambda)+f^{(l)}(\lambda_2)p_{21}(\lambda).\end{aligned}$$

最后将 λ 换为 $\boldsymbol{A}$ 便得到矩阵函数的标准形 C 如下:

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{A})=&f(\lambda_1)\frac{(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}+f(\lambda_2)\frac{(-\boldsymbol{A}-(\lambda_3-2\lambda_2)\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\\&+f^{(1)}(\lambda_2)\frac{(-\boldsymbol{A}-(\lambda_1+2\lambda_2)\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}.\end{aligned}$$

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 同(1),求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$的标准形 C.

注意到 $f(\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda t}$, $f^{(l)}(\lambda)=t^l\mathrm{e}^{\lambda t}$,则可得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=p_{10}(\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+p_{20}(\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{\lambda_2 t}+tp_{21}(\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{\lambda_2 t}.$$

定理 31.4.2　矩阵分量 $p_{kl}(\boldsymbol{A})$的性质

(1) 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$,则当把 $\boldsymbol{A}$ 的分量 $p_{kl}(\boldsymbol{A})$视为向量空间$\mathbb{C}^{n\times n}$上的向量时,它们是线性独立的,并且每一个 $p_{kl}(\boldsymbol{A})$均不为零矩阵,即若存在一组常数 $c_{kl}\in\mathbb{C}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=0}^{d_k-1} c_{kl}p_{kl}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0},$$

则必有 $c_{kl}=0\ (k=1,\cdots,s;\ l=0,1,\cdots,d_k-1)$,并且 $p_{kl}(\boldsymbol{A})\neq\boldsymbol{0}$.

(2) 记 $\boldsymbol{E}_k^l = p_{kl}(\boldsymbol{A})$,则 $\boldsymbol{E}_k^l$ 具有如下性质:

① $\boldsymbol{E}_{k_1}^{l_1}\boldsymbol{E}_{k_2}^{l_2} = \boldsymbol{0}(k_1\neq k_2,\ \forall l_1,l_2)$.

② $\sum_{k=1}^{s}\boldsymbol{E}_k^0 = \boldsymbol{I}_n$.

③ $\boldsymbol{E}_k^l = \frac{1}{l!}(\boldsymbol{A}-\lambda_k\boldsymbol{E}_k^0)^l(l\geqslant 1;\ k=1,\cdots,s)$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的分量 $p_{kl}(\boldsymbol{A})\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{E}_k^l$ 是仅依赖于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的常量矩阵,而与 $f(\cdot)$的形式无关,以下取 $f(\boldsymbol{A})=[\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}$ 给出计算 $\boldsymbol{E}_k^l$ 的方法,这一方法得到的结果将适用于任何 $f(\cdot)$的情形.

例 31.4.3 考虑 $f(\boldsymbol{A})=[\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}$ 的标准形 C,其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

$$f(\boldsymbol{A}) = [\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1} = \frac{\operatorname{adj}[\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\psi(\lambda)},$$

其中 adj [·]表示伴随矩阵,$\psi(\lambda)$为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 仍用$\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)$表示 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式,首先注意,若 adj $[\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]$各元素的最大公约式为 $d(\lambda)$,则必有

$$\psi(\lambda) = \psi_{\mathrm{m}}(\lambda)d(\lambda).$$

因此 $f(\boldsymbol{A})$的表达式又可记为

$$f(\boldsymbol{A}) = \frac{\operatorname{adj}[\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\psi(\lambda)} = \frac{\boldsymbol{R}(\lambda)}{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)},$$

其中 $\boldsymbol{R}(\lambda)$是以 λ 的多项式为元素的矩阵,而每一元素多项式都具有比 $\deg(\psi_{\mathrm{m}}(\lambda))$低的次数. 将 $\boldsymbol{R}(\lambda)/\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)$展开部分分式的和,则有

$$\frac{\boldsymbol{R}(\lambda)}{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\boldsymbol{R}_{k0}}{\lambda-\lambda_k}+\frac{\boldsymbol{R}_{k1}}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\cdots+\frac{\boldsymbol{R}_{kd_k-1}}{(\lambda-\lambda_k)^{d_k}}\right], \tag{31.4}$$

$\boldsymbol{R}_{kl}(k=1,\cdots,s;\ l=0,1,\cdots,d_k-1)$是常量矩阵,可用逐次求导方

式得到

$$\boldsymbol{R}_{kl}=\frac{1}{(d_k-l-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{d_k-l-1}}{\mathrm{d}\lambda^{d_k-l-1}}\left(\frac{(\lambda-\lambda_k)^{d_k}\boldsymbol{R}(\lambda)}{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)}\right)\right]_{\lambda=\lambda_k}. \tag{31.5}$$

对于本例 $f(z)=1/(\lambda-z)$，注意到

$$f^{l}(\lambda_k)=\frac{l!}{(\lambda-\lambda_k)^{l}},$$

最后得到 $f(\mathbf{A})$ 的标准形 C 为

$$f(\mathbf{A})=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_k}p_{k0}(\mathbf{A})+\frac{1}{(\lambda-\lambda_k)^2}p_{k1}(\mathbf{A})+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(d_{k-1})!}{(\lambda-\lambda_k)^{d_k}}p_{kd_k-1}(\mathbf{A})\right].$$

由上式和(31.4)式得到 $\mathbf{A}$ 的分量 $p_{kl}(\mathbf{A})$ 的公式

$$p_{kl}(\mathbf{A})\stackrel{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{E}_k^l=\frac{1}{l!}\boldsymbol{R}_{kl},\qquad k=1,\cdots,s;\ l=0,1,\cdots,d_k-1, \tag{31.6}$$

其中 $\boldsymbol{R}_{kl}$ 由(31.5)式给出.

上述公式(31.4)，(31.5)及(31.6)构成只依赖于矩阵 $\mathbf{A}$ 的计算格式，这一格式可以用来计算任意方阵 $\mathbf{A}$ 的分量 $\boldsymbol{E}_k^l$.

矩阵函数的标准形 D

注意到矩阵函数的标准形 B 中用 Largrange-Sylvester 内插多项式的矩阵形式表示矩阵函数时，所用多项式最高为 $m-1$ 次，$m=\deg(\varphi_{\mathrm{m}}(\lambda))$，按 λ 的升幂排列，可将这一多项式记为

$$p(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\cdots+\alpha_{m-1}\lambda^{m-1},$$

由此可得到 $\forall\,\mathbf{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的矩阵函数 $f(\mathbf{A})$ 的有限级数表示

$$f(\mathbf{A})=\alpha_0\boldsymbol{I}+\alpha_1\mathbf{A}+\cdots+\alpha_{m-1}\mathbf{A}^{m-1}.$$

这一表示称为矩阵函数的**级数标准形**(series canonical form).

按 $p(\lambda)$ 和 $f(\mathbf{A})$ 在 $\mathbf{A}$ 的谱上一致的原则可得到系数 α_0，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$ 满足的方程组是

$$
\begin{cases}
f(\lambda_1)=\alpha_0+\alpha_1\lambda_1+\cdots+\alpha_{m-1}\lambda^{m-1}, \\
f^{(d_1-1)}(\lambda_1)=\alpha_{d_1-1}(d_1-1)!\ +\alpha_{d_1}d_1!\ \lambda_1+\cdots \\
\qquad +\alpha_{m-1}\dfrac{(m-1)!}{(m-d_1)!}\lambda_1^{m-d_1}, \\
\quad\cdots \\
f(\lambda_s)=\alpha_0+\alpha_1\lambda_s+\cdots+\alpha_{m-1}\lambda_s^{m-1}, \\
\quad\cdots \\
f^{(d_s-1)}(\lambda_s)=\alpha_{d_s-1}(d_s-1)!\ +\alpha_{d_s}d_s!\ \lambda_s+\cdots \\
\qquad +\alpha_{m-1}\dfrac{(m-1)!}{(m-d_s)!}\lambda_s^{m-d_s}.
\end{cases}
\tag{31.7}
$$

方程组(31.7)对 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{m-1}$ 有惟一确定解(由 Largrange-Sylvester 内插多项式是惟一存在的),特别地,当 $d_1=d_2=\cdots=d_s=1$,包括 $\mathbf{A}$ 具有 n 个相异特征值时($s=n$),方程组(31.7)变成以 Vandermonde(范得蒙)矩阵为系数阵的方程组

$$
\begin{pmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ \vdots \\ f(\lambda_s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{s-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{s-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_s & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{pmatrix}. \tag{31.8}
$$

另外,根据定义 31.3.1,确定一个矩阵函数所用的多项式不是惟一的,在上述标准形 D 中,也可用 $\mathbf{A}$ 的特征多项式来代替最小多项式,这时 $f(\mathbf{A})$可有下面形式的有限级数标准形

$$
f(\mathbf{A}) = \beta_0\boldsymbol{I}+\beta_1\mathbf{A}+\cdots+\beta_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}. \tag{31.9}
$$

在 $\mathbf{A}$ 的谱上与 $f(\cdot)$相一致的 $n-1$ 次多项式取为

$$
q(\lambda) = \beta_0+\beta_1\lambda+\cdots+\beta_{n-1}\lambda^{n-1} = \psi(\lambda).
$$

记 $\mathbf{A}$ 的特征多项式

$$
\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}, \qquad \sum_{i=1}^{s} m_i = n,
$$

则 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ 满足的 n 个线性方程是

$$
\begin{cases}
f(\lambda_1)=\beta_0+\beta_1\lambda_1+\cdots+\beta_{n-1}\lambda_1^{n-1}, \\
\quad\cdots \\
f^{(m_1-1)}(\lambda_1)=\beta_{m_1-1}(m_1-1)!+\beta_{m_1}m_1!\lambda_1+\cdots \\
\qquad\qquad +\beta_{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(n-m_1)!}\lambda_1^{n-m_1}, \\
\quad\cdots \\
f(\lambda_s)=\beta_0+\beta_1\lambda_s+\cdots+\beta_{n-1}\lambda_s^{n-1}, \\
\quad\cdots \\
f^{(m_s-1)}(\lambda_s)=\beta_{m_s-1}(m_s-1)!+\beta_{m_s}m_s!\lambda_s+\cdots \\
\qquad\qquad +\beta_{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(n-m_s)!}\lambda_s^{n-m_s}.
\end{cases}
\tag{31.10}
$$

并且，当 $m_1=m_2=\cdots=m_s=1$ 时（此时必有 $n=s$，即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异特征值），方程组(31.10)变为形如(31.8)式的形式，只是阶数为 n.

例 31.4.4 设

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},
$$

用标准形 D 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$.

首先，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式和最小多项式分别为

$$
\psi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2),
$$

$$
\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2).
$$

(1) 先用方程组(31.8)求解 $e^{\boldsymbol{A}t}$，

$$
e^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0(t)\boldsymbol{I}+\alpha_1(t)\boldsymbol{A},
$$

$$
\begin{cases} e^t=\alpha_0+\alpha_1, \\ e^{2t}=\alpha_0+2\alpha_1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0=2e^t-e^{2t}, \\ \alpha_1=e^{2t}-e^t. \end{cases}
$$

最后得到

$$
e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{2t} & 0 & 2e^t - 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^{2t} - e^t & 0 & 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}.
$$

(2) 再用(31.10)求解 e^{At}.

$$
\begin{cases} e^t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2, \\ te^t = \beta_1 + 2\beta_2, \\ e^{2t} = \beta_0 + 2\beta_2 + 4\beta_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = -2te^t + e^{2t}, \\ \beta_1 = 3te^t + 2e^t - 2e^{2t}, \\ \beta_2 = e^{2t} - e^t - te^t. \end{cases}
$$

按(31.9)有

$$
e^{At} = \beta_0(t)\mathbf{I} + \beta_1(t)\mathbf{A} + \beta_2(t)\mathbf{A}^2.
$$

最后所得结果同前述(1).

由此例可见,α_0, α_1 是线性独立函数 e^t, e^{2t} 的独立的线性组合;$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 是线性独立函数 e^t, te^t, e^{2t} 的独立的线性组合. 因而 α_0, α_1 及 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 都是在 t 的任意区间上线性独立的函数.

定理 31.4.5 关于矩阵函数序列收敛的定理 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的最小多项式为

$$
\varphi_m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1}(\lambda - \lambda_2)^{d_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{d_s},
$$

$f(\cdot)$ 及 $\{f_k(\cdot) \mid k = 1, 2, \cdots\}$ 均为在包含 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 在内的开域上解析的函数.

当 $k \to \infty$, $f_n(\lambda)$ 在 $\mathbf{A}$ 的谱上收敛于 $f(\lambda)$ 时,即

$$
\lim_{k\to\infty} f_k^{(l)}(\lambda_i) = f^{(l)}(\lambda_i), \quad i = 1, \cdots, s;\ l = 0, 1, \cdots, d_s - 1 \tag{31.11}
$$

时,有

$$
\lim_{k\to\infty} f_k(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}). \tag{31.12}
$$

反之,若(31.12)式成立,则(31.11)式亦成立.

作为定理 31.4.5 的直接推论有下述结果. 这一结果可作为矩阵函数的又一定义.

定义 31.4.6 设纯量幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k$ 的收敛半径为 $r > 0$,矩

阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的全部特征值均在 $D=\{z\mid |z|<r\}$ 内，则矩阵级数 (matrix function) $\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k$ 绝对收敛(范数意义下)，并且当

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\lambda^k$$

时，$\boldsymbol{A}$ 的矩阵函数可定义为

$$f(\boldsymbol{A})=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\boldsymbol{A}^k.$$

上述定义 31.4.6 与前面定义 31.3.1 是等价的.

31.5 矩阵分析的几个常用结果

几个重要的分块矩阵求逆公式

设方阵 A 具有分块形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}.$$

(1) 若 $\boldsymbol{A}_{11}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}\text{ 可逆}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})\text{可逆}.$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}_{11}$，$(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12})\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{B}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}+\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}^{-1}\\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}.$$

(3) 若 $\boldsymbol{A}_{22}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}\text{ 可逆}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})\text{可逆}.$$

(4) 若 $\boldsymbol{A}_{22}$，$(\boldsymbol{A}_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{C}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}^{-1} & -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\\ -\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}^{-1} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1}+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\end{pmatrix}.$$

(5) 若 $\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ 可逆，当 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 中有一个可逆时，则另一个和 $\boldsymbol{A}$ 均可逆.

(6) 若 $\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ 及 $\boldsymbol{A}$ 均为可逆阵，则

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{A}_{11}^{-1}+\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1},$$

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}=\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}^{-1},$$

$$\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1},$$

$$\boldsymbol{A}_{22}^{-1}+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}.$$

(7) 若 $\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{A}_{22}$ 均可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆，并且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\end{pmatrix}.$$

引理 31.5.1 矩阵求逆引理(matrix inversion lemma) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 为适当阶数的矩阵，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 及 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})$ 为可逆阵，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BCD})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}^{-1}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

作为本定理的推论有以下两个.

推论 31.5.2 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为适当阶数的矩阵，$\boldsymbol{A}$ 及 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BC})$ 可逆，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BC})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

推论 31.5.3 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆阵，$\boldsymbol{g}$ 与 $\boldsymbol{h}$ 为适当维数的向量，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{g}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{g}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{g}}.$$

定理 31.5.4 Toeplitz 引理(Toeplitz lemma) 设 $\{\boldsymbol{\Phi}_{nk}\mid k=1,2,\cdots\}$ 是 p 阶矩阵序列，对每一个 k

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\Phi}_{nk}=\boldsymbol{0},$$

且对一切 n

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\boldsymbol{\Phi}_{nk}\|<C<+\infty.$$

$\forall\, \boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^p$，记 $\boldsymbol{y}_n=\sum_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}_{nk}\boldsymbol{x}_k$，则

(1) 由 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}$ 可推得 $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{0}$.

(2) 若$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{\Phi}_{nk}=\boldsymbol{I}_p$,则由

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}<\infty,$$

可推得

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{x}.$$

定理 31.5.5 Kronecker 引理(Kronecker lemma) 设 $\boldsymbol{A}_k\in\mathbb{R}^{p\times p}$为半正定矩阵,$\boldsymbol{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{A}_k$, $\boldsymbol{x}_k\in\mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{v}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{S}_k^{-1}\boldsymbol{x}_k$,若:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{v}_n=\boldsymbol{v}$, $\|\boldsymbol{v}\|<\infty$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{0}$,对所有 k 成立,

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{S}_n^{-1}\boldsymbol{A}_k\|<\infty$,对所有 n 成立.

则

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{S}_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}.$$

32 系统分析中的某些概率统计基础

有关概率统计的详细内容,可参阅本手册的《概率统计与随机过程卷》.本章仅提供系统分析与系统辨识中常用的一些结果.

32.1 统计分布的部分结果

定理 32.1.1 若随机变量 $X \sim N(0,1)$,则 $X^2 \sim \chi^2(1)$.

定理 32.1.2 设 $X_i \sim \chi^2(k_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$,且互相独立,记 $Y=\sum_{i=1}^{m} X_i$, $N=\sum_{i=1}^{m} k_i$,则 $Y \sim \chi^2(N)$.

定理 32.1.3 设 $X_1 \sim \chi^2(k_1)$, $X_2 \sim \chi^2(k_2)$,且互相独立,则

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_2 X_1}{k_1 X_2} \sim F(k_1,k_2).$$

定理 32.1.4 设 $Y \sim N(0,1)$ 与 $X \sim \chi^2(k)$ 互相独立,则

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y}{(X/k)^{1/2}} \sim t(k).$$

定理 32.1.5 Fisher-Cochrane 定理 设 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_k)$,$\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_q$ 是非负定矩阵,rank $(\boldsymbol{A}_k)=r_k(k=1,2,\cdots,q)$,且 $\sum_{i=1}^{q}\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{I}_k$.则:二次型序列 $\{Z_i=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X} \mid i=1,\cdots,q\}$ 是独立 $\chi^2(r_i)$ 变量序列的充要条件是

$$r_1+r_2+\cdots+r_q=k.$$

定理 32.1.6 若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称幂等矩阵,且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=r$,$\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})$,则

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} X^{\mathrm{T}} A X \sim \chi^2(r).$$

32.2 关于极限的定理

定义 32.2.1 设随机变量序列$\{X_t \mid t=1,2,\cdots\}$的分布函数序列为$\{F_t \mid t=1,2,\cdots\}$,随机变量 X 的分布函数为F,若在 F 的每一个连续点F_t 都收敛于F,则称X_t **依分布收敛**(convergence in law)于 X,记作

$$X_t \xrightarrow{\text{law}} X.$$

定义 32.2.2 设随机变量序列$\{X_t \mid t=1,2,\cdots\}$,若对任给的 $\varepsilon,\delta>0$,存在一个 $t_0(\varepsilon,\delta)$使得$\forall t>t_0$,

$$P(\|X_t - X\| > \varepsilon) < \delta$$

成立,则称 X_t **依概率收敛**(convergence in probability)于 X,记作

$$X_t \xrightarrow{\text{prob}} X.$$

定义 32.2.3 设随机变量序列$\{X_t \mid t=1,2,\cdots\}$具有二阶矩,若

$$\lim_{t\to\infty} E(X_t - X)^{\mathrm{T}}(X_t - X) = 0,$$

则称 X_t **均方收敛**(convergence in quadratic mean)于 X,记作

$$X_t \xrightarrow{\text{q. m.}} X.$$

定义 32.2.4 设随机变量序列$\{X_t \mid t=1,2,\cdots\}$,若对任给的 $\varepsilon,\delta>0$,存在一个 $t_0(\varepsilon,\delta)$,使得$\forall t>t_0$ 时有

$$P(\|X_t - X\| < \varepsilon, \forall t \geqslant t_0) > 1-\delta$$

成立,则称 X_t **以概率 1(或几乎必然)收敛**(convergence almost surely or with probability 1)于 X,记作

$$X_t \xrightarrow{\text{a. s.}} X.$$

定理 32.2.5 对上述几种收敛的关系有如下结果:

(1) 依概率收敛的随机序列 $\boldsymbol{X}_t$，则必然依分布收敛.

(2) 对均方收敛的随机序列 $\boldsymbol{X}_t$，则它必然依概率收敛.

(3) 依概率 1 收敛的随机序列 $\boldsymbol{X}_t$，必然依概率收敛.

(4) 均方收敛不一定依概率 1 收敛；而依概率 1 收敛也不一定均方收敛.

定理 32.2.6 弱大数定律(weak law of large numbers) 设不相关随机序列$\{\boldsymbol{X}_t \mid t=1,2,\cdots\}$具有公共的一阶，二阶中心矩 μ 和 Σ，记

$$m_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{X}_i,$$

则

$$m_N \xrightarrow{\text{q.m.}} \mu.$$

定理 32.2.7 **强大数定律**(strong law of large numbers) 设$\{\boldsymbol{X}_t \mid t=1,2,\cdots\}$是独立同分布(i. i. d.)的随机变量序列且均值为 $\mu<\infty$，则

$$m_N \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu,$$

其中 m_N 的定义同定理 32.2.6.

定理 32.2.8 中心极限定理(central limit theorem) 设$\{\boldsymbol{X}_t \mid t=1,2,\cdots\}$是独立同分布的随机变量序列，具有限均值 μ 和方差 σ^2，记

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t=1}^{N}(\boldsymbol{X}_t - \mu),$$

则

$$Z_N \xrightarrow{\text{Law}} Z \sim N(0,\sigma^2).$$

定理 32.2.9 Frechét(弗雷歇)定理 设$\{\boldsymbol{X}_t \mid t=1,2,\cdots\}$是依概率收敛于随机变量 ξ 的序列，$f(\cdot)$是 $\boldsymbol{X}_t$ 的有理函数，则

$$f(X_t) \xrightarrow{\text{prob}} f(\xi).$$

32.3 估计理论

定义 32.3.1 设数据向量 $y\in\mathbb{R}^N$,参数向量 $\boldsymbol{\theta}\in\Theta\subset\mathbb{R}^p$,若 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 满足

$$\mathrm{E}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)=\boldsymbol{\theta},$$

则称 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个**无偏估计**(unbiased estimator).

这里的 E 表示条件均值,即对以取参数 $\boldsymbol{\theta}$ 为条件的条件变量 y 取均值. 以后无特别声明,所论均值均为这种意义的条件均值. 有些文献上误用记号 $\mathrm{E}_{y|\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 表示这类条件均值.

定义 32.3.2 如果 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 对任何其他估计 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 满足

$$\mathrm{E}\{[\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)-\boldsymbol{\theta}][\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)-\boldsymbol{\theta}]\}\leqslant\mathrm{E}\{[\tilde{\boldsymbol{\theta}}(y)-\boldsymbol{\theta}][\tilde{\boldsymbol{\theta}}(y)-\boldsymbol{\theta}]\},$$

则称 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的**一致最小均方误差估计**(uniform minimum mean deviation estimator).

定义 32.3.3 满足定义 32.3.2 的无偏估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 称为**最小方差无偏估计**(minimum variance unbiased estimator).

定义 32.3.4 设 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 是 y 的线性函数,并且是最小方差无偏估计,则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 称为 $\boldsymbol{\theta}$ 的**最优线性无偏估计**(optimal linear unbiased estimator).

定理 32.3.5 设 $\{P_{\boldsymbol{\theta}}\mid\boldsymbol{\theta}\in\Theta\}$ 是密度函数族,$\Theta\subset\mathbb{R}^p$,$y\in\mathbb{R}^N$ 的条件密度记为 $P(y|\boldsymbol{\theta})$,且 P 具有二阶导数,$\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个无偏估计,则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)$ 的协方差满足

$$\mathrm{cov}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)\geqslant\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}.$$

上述不等式称为 **Cramer-Rao(克拉默-拉奥)不等式**(Cramer-Rao inequality). 其中

$$\mathrm{cov}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)\overset{\mathrm{def}}{=}E\{[\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)-\boldsymbol{\theta}][\hat{\boldsymbol{\theta}}(y)-\boldsymbol{\theta}]^{\mathrm{T}}\},$$

$$\boldsymbol{M}_{\theta}=\mathrm{E}\left\{\left[\frac{\partial \ln P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right]\left[\frac{\partial \ln P(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right]^{\mathrm{T}}\right\},$$

$\boldsymbol{M}_{\theta}$ 称为 **Fisher 信息阵**(Fisher information matrix). $\boldsymbol{M}_{\theta}$的逆矩阵 $\boldsymbol{M}_{\theta}^{-1}$称为 Cramer-Rao **下界**(lower bound). 并且 $\boldsymbol{M}_{\theta}$满足下列等式

$$\boldsymbol{M}_{\theta}=-\mathrm{E}\left\{\frac{\partial^{2} \ln P(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} \partial \boldsymbol{\theta}}\right\}. \tag{32.1}$$

定义 32.3.6 设 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$是 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个无偏估计,若其协方差矩阵等于 Cramer-Rao 下界. 即

$$\operatorname{cov} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{M}_{\theta}^{-1},$$

则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$称为 $\boldsymbol{\theta}$ 的**优效无偏估计**(efficient unbiased estimator).

定理 32.3.7 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$为 $\boldsymbol{\theta}$ 的优效无偏估计的充要条件是存在与 $\boldsymbol{y}$ 无关的矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})$,使得

$$\frac{\partial \ln P(\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})[\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{\theta}].$$

定义 32.3.8 设 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N}$ 是基于数据向量 $\boldsymbol{y}_{N} \in \mathbb{R}^{N}$ 的估计,若满足

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N} \xrightarrow{\text{a. s.}} \boldsymbol{\theta},$$

则称$\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N}\}$是参数真值 $\boldsymbol{\theta}$ 的**一致估计序列**(consistent sequence of estimators).

定义 32.3.9 设 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N}$ 是基于数据向量 $\boldsymbol{y}_{N} \in \mathbb{R}^{N}$ 的估计,若满足

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N} \xrightarrow{\text{prob}} \boldsymbol{\theta},$$

则称$\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N}\}$是参数真值 $\boldsymbol{\theta}$ 的**弱一致估计序列**.

定义 32.3.10 给定一个函数 $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{N} \times \mathbb{R}^{p} \rightarrow \mathbb{R}^{N}$. $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$是 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计,若对任意其他估计 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$满足

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \hat{\boldsymbol{\theta}})\|_{Q} \leqslant\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})\|_{Q},$$

则称 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$是 $\boldsymbol{\theta}$ 的**最小二乘估计**(least squares estimator),简称 LSE,一般记做

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{LS}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}),$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 是一个正定矩阵，$\|\cdot\|_Q$ 表示以 $\boldsymbol{Q}$ 为**加权阵**(weight matrix)的范数，即

$$\|\boldsymbol{x}\|_Q \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{x}.$$

定义 32.3.11 设 $\{p(\cdot\mid\boldsymbol{\theta})\mid\boldsymbol{\theta}\in\Theta\}$ 为样本空间 Ω 上的密度族，$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个估计，$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$ 是其他任意估计，若满足

$$p(\boldsymbol{y}\mid\hat{\boldsymbol{\theta}}) \leqslant p(\boldsymbol{y}\mid\tilde{\boldsymbol{\theta}}),$$

则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$ 称为 $\boldsymbol{\theta}$ 的**最大似然估计**(maximum likelihood estimator)，简称 MLE，记做

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y}).$$

定理 32.3.12 最大似然估计的不变性原理(principle of invariance) 设 $\boldsymbol{\theta}\in\Theta\subset\mathbb{R}^p$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的最大似然估计，而 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的一个函数，$\boldsymbol{g}:\Theta\to Z\subset\mathbb{R}^n(n\leqslant p)$，则 $\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}})$ 为 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})$ 的极大似然估计.

定理 32.3.13 如果存在 $\boldsymbol{\theta}\in\Theta\subset\mathbb{R}^p$ 的优效无偏估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$，则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{y})$ 必然为最大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{ML}}$.

定理 32.3.14 最大似然估计的一致性(consistency of MLE) 设 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 是基于 N 个样本数据的最大似然估计，则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 几乎必然收敛到参数真值 $\boldsymbol{\theta}$，即

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \xrightarrow{\text{a. s.}} \boldsymbol{\theta}.$$

定理 32.2.15 最大似然估计的渐近正态性(asymptotic normality) 设 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 是基于 N 个样本数据的最大似然估计，则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 依分布收敛到一个正态变量，即对 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 和参数真值 $\boldsymbol{\theta}$ 有

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\text{law}} \boldsymbol{\beta} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}),$$

其中 $\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{\theta}}$ 是 Fisher 信息阵 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\theta}}$ 的平均值，即有

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{\theta}} = N\overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{\theta}}.$$

定义 32.3.16 设随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的概率密度为 $p(\boldsymbol{x})$，则 $\boldsymbol{X}$ 的**熵**

(entropy)定义为

$$H_X = -\mathrm{E}[\ln p(\boldsymbol{X})].$$

例 32.3.17 考虑具有 Gauss 分布的随机向量 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^m$，其协方差阵记为 $\boldsymbol{\Sigma}$，均值为 $\boldsymbol{\mu}$，则其对数似然函数为

$$\ln p(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}m \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\det \boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}),$$

则 $\boldsymbol{X}$ 的熵为

$$\begin{aligned} H_X &= -\mathrm{E}\,[\ln p(\boldsymbol{X})] \\ &= -\mathrm{E}\left[-\frac{1}{2}m \ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\det \boldsymbol{\Sigma}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\right] \\ &= \frac{1}{2}m \ln(2\pi) + \frac{1}{2}\ln(\det \boldsymbol{\Sigma}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathrm{E}[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}]\} \\ &= \frac{1}{2}m \ln(2\pi+1) + \frac{1}{2}\ln(\det \boldsymbol{\Sigma}). \end{aligned}$$

其中 tr(·)表示取矩阵的迹. 可进一步证明，Gauss 分布的变量具有最大熵.

定义 32.3.18 设随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的真实分布密度为 $p(\boldsymbol{x})$，而 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 为 $f(\cdot)$ 的估计函数，且满足密度函数的性质，$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ 为真实参数，且

$$p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\theta}),$$

则称

$$I(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}(\cdot \mid \hat{\boldsymbol{\theta}})) = \mathrm{E}\{\ln p(\boldsymbol{X})\} - \mathrm{E}\{\ln g(\boldsymbol{X} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}})\}$$

为 **Kullback-Leibler 信息量**(K-L information measure).

定理 32.3.19 Kullback-Leibler 信息量具有如下性质：

(1) $I(p, \boldsymbol{g}(\cdot \mid \hat{\boldsymbol{\theta}})) = \int_{\Omega} p(\boldsymbol{x}) \ln \dfrac{p(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x} \mid \hat{\boldsymbol{\theta}})} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$,

(2) $I(p, \boldsymbol{g}(\cdot \mid \hat{\boldsymbol{\theta}})) \geqslant 0$.

注 32.3.20 定理 32.3.19 的证明要用到一个重要的不等式——Jensen 不等式(Jensen inequality). 现给出如下.

设 $\boldsymbol{X}$ 是一个随机向量, $f(\cdot)$是一个实的下凸函数,则

$$f(\mathrm{E}\boldsymbol{X}) \leqslant \mathrm{E}\{f(\boldsymbol{X})\}.$$

32.4 有关鞅论的几个结果

定义 32.4.1 考虑一个概率空间$(\Omega,\mathscr{A};p)$,其中样本空间 Ω 是一个非空集合. $\mathscr{A}$ 是 Ω 上的一个 σ-代数子集(事件集),设$\{A_t \mid t\in T\}$是一个 σ-代数序列,并且满足:

(1) $A_t\subset\mathscr{A}, t\in T$;

(2) $A_t\subset A_s, t\leqslant s$;

则称$\{A_t\}$是**递增 σ-代数序列**(increasing sequence of σ-algebra).

定义 32.4.2 考虑一个随机过程 $\boldsymbol{x}(t)$,设$\{A_t \mid t\in T\}$是样本空间 Ω 上的一个 σ-代数序列,如果 $\boldsymbol{x}(t)$是 A_t 可测(measurable)(对一切 t),即对一切 t 有

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(t) \mid A_t\} = \boldsymbol{x}(t),$$

则称**过程**$\{\boldsymbol{x}(t)\}$**是**$\{A_t\}$**适应**(adapted).

这里的 $\mathrm{E}\{\cdot \mid A_t\}$是条件均值,或理解为正交投影. 适应的概念是指用 A_t 中的信息可以完全确定 $\boldsymbol{x}(t)$.

定义 32.4.3 在概率空间$(\Omega,\mathscr{A},p)$中给定一个递增的 σ-代数序列$\{A_t \mid t\in T\}$,若随机向量序列$\{\varepsilon(t)\}$是$\{A_t\}$适应,并且对一切 t 满足

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}(t) \mid A_{t-1}\} = 0,$$

则称$\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}$是一个**新息序列**(innovations sequence).

定义 32.4.4 设$\{X(t)\}$是一个随机过程, $\{A_t \mid t\in T\}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{A},p)$中的 σ-代数序列,若满足:

(1) $\{A_t\}$是递增的;

(2) $\{X(t)\}$是$\{A_t\}$适应；

(3) $\mathrm{E}(\|X(t)\|)<\infty$；

(4) $X(s)=\mathrm{E}\{X(t)|A_s,s<t\}$；

则称$\{X(t)\}$是关于$\{A_t\}$的**鞅**(martingle)(标量鞅).

又若条件(4)变为

(4a) $X(s)\leqslant \mathrm{E}\{X(t)|\boldsymbol{A}_s,s<t\}$

时，则称$\{X(t)\}$为关于$\{A_t\}$的**下鞅**；而当(4)变为

(4b) $X(s)\geqslant \mathrm{E}\{X(t)|A_s,s<t\}$

时，则称$\{X(t)\}$为关于$\{A_t\}$的**上鞅**.

定理 32.4.5 Doob(杜布)分解定理 $\{X(t)\}$是关于$\{A_t\}$的下鞅的充要条件是存在一个关于$\{A_t\}$的鞅$\{\widetilde{X}(t)\}$和一个正的递增序列$\{Z(t)\}$使得

$$X(t)=Z(t)+\widetilde{X}(t).$$

定理 32.4.6 设$\{X(t)\}$是关于$\{A_t\}$的下鞅，f是定义在$\mathbb{R}$上的一个递增下凸函数，则$\{f(X(t))\}$是关于$\{A_t\}$的下鞅.

定理 32.4.7 设$\{X(t)\}$是关于$\{A_t\}$的标量鞅，对一切t成立$\mathrm{E}(|X(t)|^2)<\infty$，则存在一个具有有界方差的随机变量$\chi$使得：

(1) $\chi(t)\xrightarrow{\text{a. s.}}X$；

(2) $\chi(t)\xrightarrow{\text{q. m.}}X$；

(3) $\chi(t)=\mathrm{E}\{X|A_t\}$ (对每一个t).

上述定理称为鞅(标量鞅)的收敛定理，并且可以推广到向量鞅的情形.

定理 32.4.8 设$\{\boldsymbol{X}(t)\}$是关于$\{A_t\}$的向量鞅，对一切t成立$\|\mathrm{E}(\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))\|<\infty$，则存在一个具有有界协方差的随机向量$\boldsymbol{X}$，使得

(1) $\boldsymbol{X}(t)\xrightarrow{\text{a. s.}}\boldsymbol{X}$；

(2) $\boldsymbol{X}(t)\xrightarrow{\text{q. m.}}\boldsymbol{X}$；

(3) $\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{E}\{\boldsymbol{X}|A_t\}$ (对每一个 t).

定理 32.4.9 设$\{\boldsymbol{\varepsilon}(t)\}$是$\{A_t\}$适应的新息序列，并且记

$$\boldsymbol{Z}(n)=\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{S}^{-1}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t),\qquad n=1,2,\cdots,$$

$$\boldsymbol{Z}(0)=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{S}(t)=\sum_{k=1}^{t}\boldsymbol{\Psi}_k,$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}_k$ 是非负定对称阵，$\{\boldsymbol{S}(t)\}$ 是$\{A_{t-1}\}$ 适应，

$$\left\|\ \mathrm{E}\left\{\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{S}^{-1}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{S}^{-1}(t)\right\}\right\|<\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{S}^{-1}(n)\boldsymbol{\Psi}_k=\boldsymbol{0},\qquad \text{对一切 } k,\ \text{a. e. } \omega\in\Omega,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{S}^{-1}(n)\boldsymbol{\Psi}_k\|<\infty,\qquad \text{对一切 } n,\ \text{a. e. } \omega\in\Omega,$$

则：

(1) $\{\boldsymbol{Z}(n)\}$ 是鞅；

(2) $\boldsymbol{Z}(n)$ 均方收敛且几乎必然收敛；

(3) $\boldsymbol{S}^{-1}(n)\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{\varepsilon}(t)\xrightarrow{\text{a. s.}}\boldsymbol{0}$.

33 连续线性系统

33.1 引言

连续线性系统属于常微分方程的范畴，有关线性系统的解，解的结构与性质等概念，均可参见本卷第21～26章.本章重点是矩阵指数、传递函数阵、可控性与可观测性等基本的结果.

33.2 连续线性系统的数学模型

33.2.1 线性系统建模

(1) 机械振动系统

考虑图33.1所示的机械振动系统，k_1，k_2 表示两个弹簧的弹性系数，m_1，m_2 为质量，C_1，C_2 为摩擦系数，C_3 为阻尼系数，f 为外力.指定 m_2 的速度作为本系统的输出(量)，建立该振动系统的数学模型.

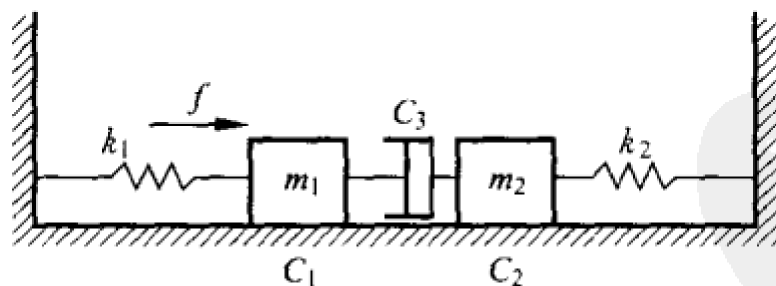


图 33.1

解 首先，该系统有两个弹簧与两个质块，共有4个储能元件，其数学模型一般应是一个四阶系统.

引入记号：v_1 为 m_1 的速度，v_2 为 m_2 的速度，f_{k_1} 为 k_1 的弹性力，f_{k_2} 为 k_2 的弹性力，于是阻尼器 C_3 之阻尼力为 $C_3(v_1-v_2)$，m_1,m_2 所受摩擦力分别为 C_1v_1 及 C_2v_2，m_1 及 m_2 的加速度分别为 $\dot{v}_1$ 及 $\dot{v}_2$，按受力分析可得

$$m_1\dot{v}_1+C_1v_1+f_{k_1}+C_3(v_1-v_2)=f,$$

$$m_2\dot{v}_2+m_2v_2+f_{k_2}=C_3(v_1-v_2).$$

再引入变量

$$x_1=v_1,\qquad x_2=v_2,$$

$$x_3=f_{k_1},\qquad x_4=f_{k_2}.$$

考虑到弹性力 f_{k_1} 及 f_{k_2} 应分别与 m_1 及 m_2 的位移成正比，两个位移量又分别为相应速度的积分，因此有

$$\dot{f}_{k_1}=k_1v_1,\qquad \dot{f}_{k_2}=k_2v_2.$$

最后得到如下模型：

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{C_1+C_3}{m_1} & \dfrac{C_3}{m_1} & -\dfrac{1}{m_1} & 0\\ \dfrac{C_3}{m_2} & -\dfrac{C_2+C_3}{m_2} & 0 & -\dfrac{1}{m_2}\\ k_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{m_1}\\0\\0\\0\end{pmatrix}f.$$

由于指定 m_2 的速度 v_2 为输出，记 y 为输出变量，则

$$y=(0,1,0,0)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

(2) 双水箱系统

考虑图 33.2 所示双水箱系统，水箱 Ⅰ 的注入流量为 $u(t)$，水位为 $x_1(t)$，水箱 Ⅱ 的注入流量为 $v(t)$，水位为 $x_2(t)$，排出流量为 $y(t)$，两水箱水平截面积均为 C，排水阻尼系数均为 R，取 $u(t)$ 为

输入量，$y(t)$为输出量，建立该系统的数学模型.

解 对于水箱Ⅰ有

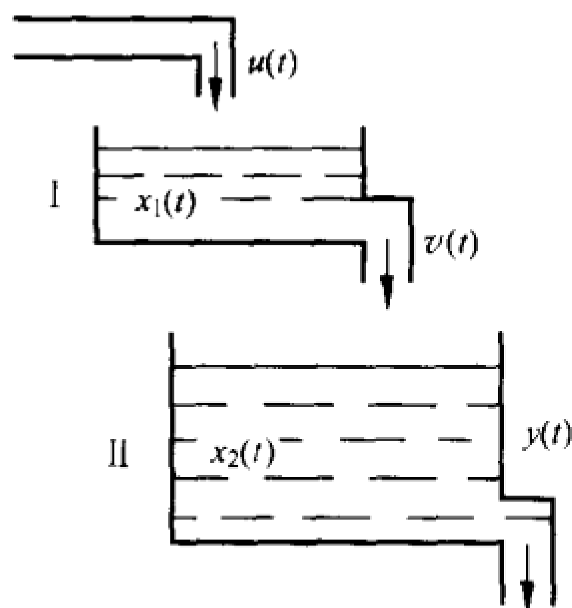


图 33.2

$$c\mathrm{d}x_1=(u(t)-v(t))\mathrm{d}t,$$

$$v(t)=\frac{1}{R}x_1(t),$$

即有

$$c\dot{x}_1=-\frac{1}{R}x_1+u(t).$$

对水箱Ⅱ有

$$c\dot{x}_2=\frac{1}{R}x_1-\frac{1}{R}x_2,\quad y(t)=\frac{1}{R}x_2.$$

最后得到该系统的数学模型为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{Rc} & 0\\ \frac{1}{Rc} & -\frac{1}{Rc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{C}\\ 0\end{pmatrix}u(t),\\ y(t)=\left(0,\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.\end{cases}$$

33.2.2 状态空间模型

描述连续线性系统的一类数学模型是如下形式的**状态空间模型**(state space model)

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}\end{cases}\tag{33.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ 为**状态变量**，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$ 为**输入变量(控制变量)**，$\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$ 为**输出变量**. 上述模型中的第一个方程称为**状态方程**，第二个方程称为**输出方程(观测方程)**.

又若这一模型中的矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$，$\boldsymbol{B}(t)$，$\boldsymbol{C}(t)$ 均为常量矩阵时，称该系统为线性时不变系统(linear time-invariant system)，也称线

性定常系统(linear stationary system).

33.2.3 输入输出模型

只描述系统输入输出关系的模型称为**输入输出模型**(input output model). 输入输出模型一般有两类.

第一类是如下形式的高阶微分方程模型(定常系统)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}^{(n)}+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}^{(n-1)}+\cdots+\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{y}^{(1)}+\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{y} \\ &=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}^{(p-1)}+\cdots+\boldsymbol{B}_{p-1}\boldsymbol{u}^{(1)}+\boldsymbol{B}_p\boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{33.2}$$

其中 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(t)\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^r$, 依照输入变量 $\boldsymbol{u}(t)$ 和输出变量 $\boldsymbol{y}(t)$ 的维数 r,m 等于 1 或大于 1, 分别称为单输入单输出、多输入单输出、单输入多输出和多输入多输出系统.

第二类是如下形式的非参数模型, 称为**权函数模型**.

$$\boldsymbol{y}(t)=\int_0^t\boldsymbol{h}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t\boldsymbol{h}(\tau)\boldsymbol{u}(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{33.3}$$

其中

$$\boldsymbol{h}(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\boldsymbol{H}(s)\}, \tag{33.4}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(s)&\stackrel{\text{def}}{=}(s^n\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}_1s^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{A}_n)^{-1}\cdot \\ &\qquad(\boldsymbol{B}_1s^{p-1}+\cdots+\boldsymbol{B}_{p-1}s+\boldsymbol{B}_p), \end{aligned} \tag{33.5}$$

$\boldsymbol{H}(s)$ 称为**传递函数阵**(transfer function matrix), s 为 Laplace 变换的复变量, $\boldsymbol{h}(t)$ 称为**脉冲响应函数**($m\times r$ 矩阵).

为说明脉冲响应函数, 以下给出脉冲函数(标量形式)的定义和性质.

定义 33.2.1 设

$$\delta_\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}, & -\dfrac{\tau}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\tau}{2},\\[2mm] 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2},\end{cases}$$

则称极限 $\delta(t) = \lim\limits_{\tau \to 0} \delta_\tau(t)$ 为**单位脉冲函数**,常记为 δ-函数. δ-函数具有如下性质:

(1) $\int_{-\infty}^{-\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$;

(2) 对连续函数 $f(t)$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = f(t).$$

在模型(33.2)中取标量函数形式(输入及输出变量),并令 $u(t) = \delta(t)$,即有

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = h(t). \tag{33.6}$$

因此,脉冲响应函数即是系统(33.2)对单位脉冲输入的输出.

33.3 时变系统的解

考虑线性时变系统状态方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{33.7}$$

和相应的齐次方程

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \end{cases} \tag{33.8}$$

假设 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $t \in T \subset \mathbb{R}$ 时绝对可积,则(33.7)的解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{x}_0, \tag{33.9}$$

其中 n 阶方阵 $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ 称为**状态转移阵**(state transition matrix),它满足

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t, t_0) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0), \\ \boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \boldsymbol{I}_n. \end{cases} \tag{33.10}$$

状态转移阵 $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ 的性质:

(1) $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$ 可逆,且 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t, t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t_0, t)$.

(2) $\forall t_0, t_1, t \in T$, $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_1)\boldsymbol{\Phi}(t_1,t_0)$.

(3) $\dfrac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{\Phi}(t,s) = -\boldsymbol{\Phi}(t,s)\boldsymbol{A}(t)$.

(4) 如系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0\end{cases} \tag{33.11}$$

的状态转移阵为 $\boldsymbol{\psi}(t,s)$,则

$$\boldsymbol{\psi}(t,s) = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(s,t),$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(t,s)$ 为方程(33.7)的状态转移阵.而方程(33.10)称为方程(33.7)的**伴随系统**(associated system).

(5) $\dfrac{\partial}{\partial t}\det\boldsymbol{\Phi}(t,s) = [\operatorname{tr}\boldsymbol{A}(t)]\det\boldsymbol{\Phi}(t,s)$.

(6) 若 $\forall t \in T \subset \mathbb{R}$ 存在实数 K 使得 $\|\boldsymbol{A}(t)\| \leqslant K$,则 $\forall t \geqslant s$ 有

$$\|\boldsymbol{\Phi}(t,s)\| \leqslant \exp\{K(t-s)\}.$$

方程(33.7)的解可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{33.12}$$

对于状态空间模型(33.1),常记为 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$,其解可表示为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{C}(t)\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{33.13}$$

上述解的表达式中,右端第一项称为**零输入响应**(输入为零时),第二项称为**零状态响应**(以 0 为初始状态的系统对输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 的响应).零输入响应是初始状态的线性函数,零状态响应是输入的线性函数.

引用 $\boldsymbol{y}_{zi}(t)$ 表示零输入响应,$\boldsymbol{y}_{zs}(t)$ 表示零状态响应,则(33.13)中的零状态响应是

$$\boldsymbol{y}_{zs}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{33.14}$$

引入矩阵记号

$$\boldsymbol{H}(t,\tau)=\begin{cases}\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau), & t>\tau,\\ 0, & t<\tau,\end{cases} \tag{33.15}$$

其中 $\boldsymbol{H}(t,\tau)\in\mathbb{R}^{m\times r}$，则 $\boldsymbol{y}_{zs}(t)$ 又可记为

$$\boldsymbol{y}_{zs}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{H}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,\qquad t>t_0.$$

将输入取为如下形式的脉冲信号

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{e}_i\delta(t-\tau), \tag{33.16}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i\in\mathbb{R}^r$ 是第 i 个分量取 1，其余分量为零的向量. 对比输入的零状态响应在 $t<\tau$ 时为 0，而当 $t>\tau$ 时为

$$\boldsymbol{y}_{zs}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t')\boldsymbol{B}(t')\boldsymbol{e}_i\delta(t'-\tau)\mathrm{d}t'=\boldsymbol{H}(t,\tau)\boldsymbol{e}_i.$$

(33.15) 式所示 $\boldsymbol{H}(t,\tau)$ 称为该系统 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 的**脉冲响应矩阵**(implus response matrix).

定理 33.3.1 若 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $[t_0,t]$ 上连续，记

$$\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{M}_k(t,t_0)=\boldsymbol{I}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\boldsymbol{M}_{k-1}(\tau,t_0)\mathrm{d}\tau,\qquad k=1,2,\cdots,$$

则序列 $\{\boldsymbol{M}_k(t,t_0)\}$ 当 $k\to\infty$ 时一致收敛于 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$.

利用上述定理还可得到下面的定理.

定理 33.3.2 若 $\boldsymbol{A}(t)$ 与 $\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 可交换(commutative)，则

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right].$$

33.4 定常线性系统

考虑如下定常线性系统 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), & \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x},\end{cases} \tag{33.17}$$

其状态转移阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}, \tag{33.18}$$

而系统的解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{33.19}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{C}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{y}_{zi}(t)+\boldsymbol{y}_{zs}.\end{aligned} \tag{33.20}$$

对该 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 取 Laplace 变换可得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)+(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)+\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0.\end{cases} \tag{33.21}$$

这里与$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 有关的 4 个矩阵的意义是：

(1) $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$：$n\times n$ 矩阵，描述初值 $\boldsymbol{x}_0$ 对 $\boldsymbol{x}(t)$ 的影响.

(2) $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$：$n\times r$ 矩阵，描述输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 对 $\boldsymbol{x}(t)$ 的影响.

(3) $\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$：$m\times n$ 矩阵，描述初值 $\boldsymbol{x}_0$ 对 $\boldsymbol{y}(t)$ 的影响.

(4) $\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$：$m\times r$ 矩阵，描述输入$\boldsymbol{u}(t)$对输出$\boldsymbol{y}(t)$的影响.

称(4)中的$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$为该系统$S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$的**传递函数阵**，(transfer function matrix)，记作

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}.$$

对任意可逆阵 $\boldsymbol{T}$，取变换

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{x},$$

可得到

$$\tilde{S}:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}}{\mathrm{d}t}=\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y}=\tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{x}},\end{cases}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$, $\tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}$, $\tilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{T}$，则 $\tilde{S}(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}},\tilde{\boldsymbol{C}})$ 称 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$

的**代数等价系统**. 代数等价系统具有如下性质：

(1) 系统特征值(即状态矩阵 $\boldsymbol{A}$) 相同；

(2) 传递函数阵相同.

$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 的计算

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}. \tag{33.22}$$

记

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n,$$
$$\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}_1s^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{R}_{n-1}s+\boldsymbol{R}_n,$$

则计算 $\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_n$ 及系数 $a_1,\cdots,a_n$ 的公式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{I},\\ \boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{I},\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{k-1}+\boldsymbol{a}_{k-1}\boldsymbol{I},\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{R}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{n-1}+\boldsymbol{a}_{n-1}\boldsymbol{I}.\end{cases}$$

$$a_k=-\frac{1}{k}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_k),\qquad k=1,2,\cdots,n,$$

递推计算程序为 $\boldsymbol{R}_1\to a_1\to\boldsymbol{R}_2\to a_2\to\cdots\to\boldsymbol{R}_{n-1}\to a_n\to\boldsymbol{R}_n$. 最后将 $a_1,\cdots,a_n$ 及 $\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_n$ 分别代入 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 中的 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 及 $\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$，即可得到 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$. 本计算方法与 $\boldsymbol{A}$ 的特征值无关，易于在计算机上实现.

33.5 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 及其计算

矩阵函数 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 具有第 31 章中关于矩阵函数的全部性质，并且 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的计算可以按第 31 章中矩阵函数的任何一种标准形进行实现. 本节内容对 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 的性质及计算进行补充和具体化.

e^{At} 的性质：

(1) $e^{At}e^{As}=e^{A(t+s)}$.

(2) e^{At} 可逆，且 $(e^{At})^{-1}=e^{-At}$.

(3) e^{At} 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换.

(4) 对任意可逆阵 $\boldsymbol{T}$ 均有 $\boldsymbol{T}^{-1}e^{At}\boldsymbol{T}=\exp\{\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{T}\}$.

(5) 当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时 $e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$.

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，即 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则 $e^{At}=\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},e^{\lambda_2 t},\cdots,e^{\lambda_n t})$，这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中可以有重根.

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 为单纯矩阵，其 n 个线性独立的特征向量排成的矩阵为 $\boldsymbol{P}$，则

$$e^{At}=\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t},\cdots,e^{\lambda_n t})\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值(可以有重根).

(8) 若 $\boldsymbol{A}$ 的分块形式为

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots\boldsymbol{A}_s),$$

则

$$e^{At}=\mathrm{diag}(e^{A_1 t},e^{A_2 t},\cdots,e^{A_s t}).$$

(9) 若 $\boldsymbol{A}$ 为 Jordan 矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix},$$

则

$$e^{At}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & \cdots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

用 Jordan 标准形计算 e^{At}.

设 A 的 Jordan 标准形为 $J = T^{-1}AT$,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_s \end{pmatrix}_{n\times n}, \qquad s \text{ 为相异特征值个数,}$$

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{i\alpha_i} \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}, \qquad \sum_{i=1}^{s} m_i = n; \quad i = 1,\cdots,s.$$

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_{ij}\times n_{ij}}, \qquad \sum_{j=1}^{\alpha_i} n_{ij} = m; \quad j = 1,\cdots,\alpha_i,$$

则

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1},$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_s t} \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$e^{J_i t} = \begin{pmatrix} e^{J_{i1} t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_{i2} t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_{i\alpha_i} t} \end{pmatrix}_{m_i\times m_i}, \qquad i = 1,\cdots,s,$$

$$\mathrm{e}^{J_{ij}t} = \mathrm{e}^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n_{ij}\times m_{ij}}, \quad j = 1,\cdots,\alpha_i.$$

用 Lagrange-Sylvester 内插多项式计算 e^{At}.

设 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为

$$\psi_{\mathrm{m}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s},$$

$$\sum_{i=1}^{s} d_i = m,$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值,则

$$\mathrm{e}^{At} = \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{d_k}\alpha_{kl}(\boldsymbol{A}t-\lambda\boldsymbol{I})^{l-1}\varphi_k(\boldsymbol{A}),$$

$$\varphi_k(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{d_k}} = (\lambda-\lambda_1)^{d_1}\cdots(\lambda-\lambda_{k-1})^{d_{k-1}}\cdot$$

$$(\lambda-\lambda_{k+1})^{d_{k+1}}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s}, \quad k=1,\cdots,s,$$

$$\alpha_{kl} = \frac{1}{(l-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}\lambda^{l-1}}\left(\frac{(\lambda-\lambda_k)^{d_k}}{\psi_{\mathrm{m}}(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda t}\right)\right]_{\lambda=\lambda_k},$$

$$k=1,\cdots,s;\ l=1,\cdots,d_k.$$

特别地,当 $d_1=d_2=\cdots=d_s=1$ 时($m=s$),当然也包括 $n=s$ 时,有

$$\mathrm{e}^{At} = \sum_{i=1}^{s}\mathrm{e}^{\lambda_i t}\boldsymbol{F}(\lambda_i),$$

$$\boldsymbol{F}(\lambda_i) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}\frac{\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I}}{\lambda_i-\lambda_j}.$$

用有限项级数计算 e^{At}.

设 $\boldsymbol{A}$ 的相异特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$,则

$$\mathrm{e}^{At} = \alpha_0\boldsymbol{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}t+\cdots+\alpha_{m-1}(\boldsymbol{A}t)^{m-1},$$

其中 $m \overset{\text{def}}{=} \deg \psi_m(\lambda)$，$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$ 由下面 m 个方程确定

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-1}, \\ t e^{\lambda_1 t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda_1 + \cdots + (m-1) \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-2}, \\ \quad \cdots \\ t^{d_1 - 1} e^{\lambda_1 t} = (d_1 - 1)! \alpha_{d_1 - 1} + \cdots + \dfrac{(m-1)!}{(m-d_1)!} \alpha_{(m-1)} \lambda_1^{m-d_1}, \\ \quad \cdots \\ e^{\lambda_s t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_s + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_s^{m-1}, \\ \quad \cdots \\ t^{d_s - 1} e^{\lambda_s t} = (d_s - 1)! \alpha_{d_s - 1} + \cdots + \dfrac{(m-1)!}{(m-d_s)!} \alpha_{m-1} \lambda_s^{m-d_s}, \end{cases}$$

其中 $d_1, \cdots, d_s$ 为 $\mathbf{A}$ 的最小多项式 $\psi_m(\lambda)$ 中各因子的方幂，且 $\sum_{k=1}^{s} d_k = m$. 特别地，当 $d_1 = \cdots = d_s = 1$ 时，惟一确定 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}$ 的 m 个方程为（这时 $m = s$）

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_1^{m-1}, \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_2^{m-1}, \\ \vdots \\ e^{\lambda_m t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_m + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_m^{m-1}. \end{cases}$$

当然，也包括 $n = s$ 的情况，这时只需将 m 换为 n 即可.

A 具有复特征值的情形

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 有复特征值，则复特征值必然以共轭形式出现，在计算 $e^{\mathbf{A}t}$ 时为避免复数计算，给出以下公式. 不失一般性取 $\mathbf{A}$ 为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix},$$

其中 $\omega, \sigma \in \mathbb{R}$，则 $\lambda(\mathbf{A}) = \sigma \pm \omega i$, $i^2 = -1$，这时

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\sigma t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

特别地，当 $\sigma = 0$ 时

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

定理 33.5.1 Putzer定理 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（其中可以有重根），定义 A 的多项式序列 $\{p_k(A)\}$ 如下

$$p_0(A) = I_n,$$

$$p_k(A) = \prod_{m=1}^{k}(A - \lambda_m I), \qquad k = 1, \cdots, n,$$

则有

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) p_k(A),$$

其中标量函数 $r_1(t), \cdots, r_n(t)$ 由下述线性微分方程组递归解出

$$\begin{cases} \dot{r}_1(t) = \lambda_1 r_1(t), & r_1(0) = 1, \\ \dot{r}_{k+1}(t) = \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), & r_{k+1}(0) = 0, \\ k = 1, 2, \cdots, n-1. \end{cases}$$

定理 33.5.2 若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的 n 个特征值均为 λ，则

$$e^{At} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k.$$

定理 33.5.3 设 $n \geqslant 3, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 具有两个不同的特征值 λ_1 与 λ_2，其中 λ_2 是 $n-1$ 重根，则

$$e^{At} = e^{\lambda_2 t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(A - \lambda_2 I)^k + \left\{ \frac{e^{\lambda_1 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!}(\lambda_1 - \lambda_2)^k \right\} (A - \lambda_2 I)^{n-1}.$$

用 Laplace 变换求 e^{At}.

$$e^{At} = \mathscr{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\},$$

而 $(sI - A)^{-1}$ 可按(33.22)式中的方法计算.

计算 e^{At} 的数值方法

当 A 的阶数较高时，用前面的解析方法计算 e^{At} 是困难的. 这时往往需要用数值方法，这里推荐两种数值方法.

(1) 级数截断法

根据精度要求，取足够大的 M 进行如下近似计算

$$e^{At} \approx \sum_{k=0}^{M} \frac{t^k}{k!} A^k;$$

(2) Page 逼近法

e^{At} 的 (p,q) Page 逼近公式为

$$e^{At} \approx R_{pq}(At) = [D_{pq}(At)]^{-1} N_{pq}(At),$$

其中

$$D_{pq}(At) \overset{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{p} \frac{(p+q-l)!\,p!}{(p+q)!\,l!\,(p-l)!}(At)^l,$$

$$N_{pq}(At) \overset{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{q} \frac{(p+q-l)!\,q!}{(p+q)!\,l!\,(q-l)!}(-At)^l.$$

常用的 $R_{pq}(At)$ 有

$$R_{11}(At) = \left(I - \frac{At}{2}\right)^{-1}\left(I + \frac{At}{2}\right),$$

$$R_{21}(At) = \left(I - \frac{At}{3}\right)^{-1}\left(I + \frac{2At}{3} + \frac{(At)^2}{6}\right),$$

$$R_{22}(At) = \left(I - \frac{At}{2} + \frac{(At)^2}{12}\right)^{-1}\left(I + \frac{At}{2} + \frac{(At)^2}{12}\right).$$

计算 e^{At} 的例

(1) 设二阶方阵 A 的两个特征值均为 λ，求 e^{At}.

解 先用定理 33.5.1.

$$e^{At} = r_1(t)p_0(A) + r_2(t)p_1(A),$$

$$\begin{cases} \dot{r}_1(t) = \lambda r_1(t), & r_1(0) = 1, \\ \dot{r}_2(t) = \lambda r_2(t) + r_1(t), & r_2(0) = 0. \end{cases}$$

解得 $r_1(t) = e^{\lambda t}$，$r_2(t) = te^{\lambda t}$. 另外又有

$$p_0(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I}, \qquad p_1(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I},$$

因此 $e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\lambda t}(1-\lambda t)\boldsymbol{I} + te^{\lambda t}\boldsymbol{A}$.

对此例,若用定理 33.5.2 更为方便.

$$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{1}\frac{t^k}{k!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})^k = e^{\lambda t}\boldsymbol{I} + te^{\lambda t}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}),$$

$$= e^{\lambda t}(1-\lambda t)\boldsymbol{I} + te^{\lambda t}\boldsymbol{A}. \tag{33.23}$$

(2) 设二阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个相异特征值 λ_1,λ_2. 求 $e^{\boldsymbol{A}t}$.

解 此题可用多种方法求解. 我们用 Lagrange-Sylvester 内插多项式求解,可方便地得到

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\boldsymbol{I} + \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\boldsymbol{A}. \tag{33.24}$$

以上(33.23)及(33.24)两个公式可以直接引用.

(3) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求解 $e^{\boldsymbol{A}t}$.

解 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$,此例符合定理 33.5.3 的条件,于是

$$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\lambda_2}[\boldsymbol{I} + t(\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I})] + \left[\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} - \frac{te^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right](\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I})^2,$$

$$\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此得到

$$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & -t \\ t & 0 & 1-t \end{pmatrix} + (e^t - e^{2t})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t}-e^{t} & e^{2t} & e^{t}-e^{2t} \\ e^{2t}-e^{t} & 0 & e^{t} \end{pmatrix}.$$

(4) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,求 $e^{\boldsymbol{A}t}$.

解 $\lambda_1=3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-3$.

① 用 Jordan 标准形计算 $e^{\boldsymbol{A}t}$,求得变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

使得 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$.

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{T}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}+4e^{-3t} & e^{2t}-e^{-3t} \\ 0 & 4(e^{2t}-e^{-3t}) & 4e^{2t}+e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

② 用有限项级数计算 $e^{\boldsymbol{A}t}$,求解 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ 的方程组为(本例 $m=s=n$)

$$\begin{cases} e^{3t}=\alpha_0+3\alpha_1+9\alpha_2, \\ e^{2t}=\alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2, \\ e^{-3t}=\alpha_0-3\alpha_1+9\alpha_2. \end{cases}$$

解得

$$\alpha_0=-e^{3t}+\frac{9}{5}e^{2t}+\frac{1}{5}e^{-3t},$$

$$\alpha_1=\frac{1}{6}e^{3t}-\frac{1}{6}e^{-3t},$$

$$\alpha_2=\frac{1}{6}e^{3t}-\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{1}{30}e^{-3t}.$$

最后得到 $e^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0\boldsymbol{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}+\alpha_2\boldsymbol{A}^2$,结果同前.

③ 计算$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$,

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}\frac{5}{s-3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{5s-5}{(s-2)(s+3)} & \frac{5}{(s-2)(s+3)}\\ 0 & \frac{20}{(s-2)(s+3)} & \frac{5s+10}{(s-2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}\frac{5}{s-3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s-2}+\frac{4}{s+3} & \frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+3}\\ 0 & \frac{4}{s-2}-\frac{4}{s+3} & \frac{4}{s-2}+\frac{1}{s+3}\end{bmatrix}.$$

利用 $e^{\boldsymbol{A}t}=\mathscr{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\}$ 得到与 ① 相同的结果.

33.6 连续线性系统的可控性与可观测性

考虑连续线性系统 $S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}.\end{cases}$$

取容许控制$\boldsymbol{u}(t)\in U\subset C^0(t_0,T)$,使状态空间中的点$\boldsymbol{x}(t)$达到某个指定的状态$\boldsymbol{x}^*(t)$. 这样的控制$\boldsymbol{u}(t)$是否存在?这便是可控性(controllability)问题,这里只限于状态可控问题.

按线性系统的叠加原理,只须考虑引导$\boldsymbol{x}(t)$到达O点的控制问题.

定义 33.6.1 若系统$S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$对某个$t_0\in T$及$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$, $\exists\, t_f\in T$及$\boldsymbol{u}(t)\in U\subset C^0(t_0,T)$,使得$\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{0}$,则称**状态$\boldsymbol{x}_0$在$t_0$时刻可控**,$\boldsymbol{x}_0$称为可控状态. 若$\forall\,\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$这一结论均成立,则称**系统**$S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$**在$t_0$时刻完全可控.**

又若 $\forall t_0 \in T$ 这一结论均成立，则称**系统** $S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$ **在** T **上完全可控**(completely controllable).

可控性的性质

(1) 若 $S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$ 在 t_0 时刻完全可控，则可控状态 $\boldsymbol{x}_0$ 可表为

$$\boldsymbol{x}_0 = -\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\Phi}(t_0,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ 为 S 的状态转移阵.

(2) 若 $S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$ 在$[t_0,t_1]$上完全可控，则 $\forall t_2 > t_1$，$t_2 \in T$，S 在$[t_0,t_2]$也完全可控.

(3) 可控状态满足线性性，即当 $\boldsymbol{x}_{01}$ 与 $\boldsymbol{x}_{02}$ 同为$[t_0,t]$上的可控状态时，$\forall \alpha \neq 0$ 及 $\beta \neq 0$，$\alpha\boldsymbol{x}_{01} + \beta\boldsymbol{x}_{02}$ 也必为$[t_0,t]$上的可控状态.

(4) $S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$ 在$[t_0,t]$上所有的可控状态构成状态空间 $X \subset \mathbb{R}^n$ 上的一个子空间，称为可控子空间，记为 $X_C^+[t_0,t]$，且具有如下性质：

① $\forall \alpha \neq 0$ 及 $\forall \boldsymbol{x}_0 \in X_C^+[t_0,t]$，必有 $\alpha\boldsymbol{x}_0 \in X_C^+[t_0,t]$.

② $\forall \boldsymbol{x}_{01} \in X_C^+[t_0,t]$ 及 $X_{02} \in x_C^+[t_0,t]$，则必有$(\boldsymbol{x}_{01} + \boldsymbol{x}_{02}) \in X_C^+[t_0,t]$.

(5) $X_C^+[t_0,t]$ 的正交余空间为 S 在$[t_0,t]$上的**不可控子空间**，记为 $X_C^-[t_0,t]$. 若 $X_C^-[t_0,t]$ 为零空间，则 $S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$ 在$[t_0,t]$上是完全能控的. 又若 $X_C^-[t_0,t] = X \subset \mathbb{R}^n$，则称 S 在$[t_0,t]$**上是不可控的.**

定理 33.6.2 $S(\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{C}(t))$ 在 t_0 时刻完全可控的充要条件是，对于某个 $t_f > t_0$，使得矩阵

$$\boldsymbol{W}_C(t_0,t_f) \overset{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\Phi}(t_0,t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\mathrm{d}t$$

为非奇异矩阵.

$W_C(t_0,t_f)$ 的性质

(1) $W_C(t_0,t_f)$ 是对称阵.

(2) $W_C(t_0,t_f)$ 是非负定的.

(3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W_C(t,t_f)=A(t)W_C(t,t_f)+W_C(t,t_f)A^{\mathrm{T}}(t)-B(t)B^{\mathrm{T}}(t),$$

$$W_C(t_f,t_f)=\mathbf{0}.$$

(4) $W_C(t_0,t_f)=W_C(t_0,t)+\Phi(t_0,t)W_C(t,t_f)\Phi^{\mathrm{T}}(t_0,t)$.

定义 33.6.3 对于系统 $S(A(t),B(t),C(t))$ 的状态 $x(t_0)=x_0$ 及已知的 $u(t)$,若存在 $t_f>t_0$,使得 x_0 能由 $y(t),t\in[t_0,t_f]$ 惟一确定,则称**状态 x_0 在 t_0 时刻可观测**. 若 $\forall x_0\in X_0\subset\mathbb{R}^n$,都有上述结果成立,则称**系统 $S(A(t),B(t),C(t))$ 在 t_0 时刻完全可观测**. 又若 $\forall t_0\in T$ 都有上述结果成立,则称**系统 S 在 T 上完全可观测**.

可观性系统具有类似可控性系统的性质.

定理 33.6.4 系统 $S(A(t),B(t),C(t))$ 在 t_0 时刻完全可观测的充要条件是,对于某个 $t_f>t_0$,使得矩阵

$$W_0(t_0,t_f)\overset{\text{def}}{=}\int_{t_0}^{t_f}\Phi^{\mathrm{T}}(t,t_0)C^{\mathrm{T}}(t)C(t)\Phi(t,t_0)\,\mathrm{d}t$$

为非奇异矩阵.

定理 33.6.5 系统 $S(A(t),B(t),C(t))$ 在 $t_0\in T$ 完全可控的充要条件是存在 $t_1>t_0$,使 $\Phi(t_0,t)B(t)$ 的行向量在$[t_0,t_1]$上线性无关. S 在 $t_0\in T$ 完全可观测的充要条件是存在 $t_1>t_0$,使 $C(t)\Phi(t,t_0)$ 的列向量在$[t_0,t_1]$上线性无关.

定理 33.6.6 若 $A(t),B(t)$ n 次可微,记

$$p_0(t)=B(t),$$

$$p_i(t)=-A(t)p_{i-1}(t)+\dot{p}_{i-1}(t),\qquad i=1,\cdots,n-1,$$

$$Q_n(t)=(p_0(t),p_1(t),\cdots,p_{n-1}(t)),$$

则 $S(A(t),B(t),C(t))$ 在$[t_0,t_f]$上完全可控的充分条件是对某个

$t \in [t_0, t_f]$ 使得

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_n(t) = n.$$

$\boldsymbol{Q}_n(t)$ 称为可控性矩阵(controllability matrix).

定理 33.6.7 若 $\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{C}(t)$ n 次可微,记

$$\boldsymbol{S}_0(t) = \boldsymbol{C}(t),$$

$$\boldsymbol{S}_i(t) = \boldsymbol{S}_{i-1}(t)\boldsymbol{A}(t) + \dot{\boldsymbol{S}}_{i-1}(t), \qquad i = 1, \cdots, n-1,$$

$$\boldsymbol{R}_n(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_0(t) \\ \boldsymbol{S}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{S}_{n-1}(t) \end{bmatrix},$$

则 S 在 $[t_0, t_f]$ 上完全可观测的充分条件是对某个 $t \in [t_0, t_f]$,使得

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_n(t) = n,$$

$\boldsymbol{R}_n(t)$ 称为可观测性矩阵(observability matrix).

在上述定理 33.6.6 及定理 33.6.7 中若把 $\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t)$ 或 $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{C}(t)$ 加强为解析函数(矩阵),则相应的充分条件变为充要条件.

定理 33.6.8 考虑如下两个系统

$$S:\ \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}; \end{cases}$$

$$S^*:\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}^* = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{u}^*, \\ \boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}^*. \end{cases}$$

S 完全可控(完全可观测)的充要条件是 S^* 完全可观测(完全可控).这一关系称为可控性和可观测性之间的**对偶性**(duality).

对于定常线性系统,$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}(t) = \boldsymbol{C}$,可控性及可观测性的基本判据有如下结果.

定理 33.6.9 线性定常系统 $S(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ 在时刻 $t_0 \in T$ 完全可控(完全可观测),则 S 在 T 上完全可控(完全可观测).

由于定常线性系统在一点上的可控性或可观测性与包括这点

的区间上的可控性或可观测性是等价的，以下便简称可控或可观测.

定理 33.6.10 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 可控 $\Leftrightarrow e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}$ 之行向量线性无关 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_n = n$，其中

$$\boldsymbol{Q}_n \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}).$$

定理 33.6.11 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 可观测 $\Leftrightarrow \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}$ 之列向量线性无关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_n = n$，其中

$$\boldsymbol{R}_n \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

推论 33.6.12 定义矩阵序列 $\{\boldsymbol{Q}_k\}$，

$$\boldsymbol{Q}_k = (\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},\cdots,\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B}), \qquad k = 1,2,\cdots.$$

设 α 为使

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_\alpha = \operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_{\alpha+1}$$

成立的最小整数，则 S 可控的充要条件是

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_\alpha = n,$$

其中 α 称为可控性指标(controllability index).

推论 33.6.13 定义矩阵序列 $\{\boldsymbol{R}_k\}$，

$$\boldsymbol{R}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{k-1} \end{pmatrix}.$$

设 β 为使

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_\beta = \operatorname{rank}\boldsymbol{R}_{\beta+1}$$

成立的最小整数，则 S 可观测的充要条件是

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{R}_\beta = n,$$

其中 β 称为可观测性指标(observability index).

推论 33.6.14 定常系统 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 完全可控且可观测的充要条件是按 α,β 的定义有

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_\beta \boldsymbol{Q}\alpha = n$$

成立.

33.7 可控系统的典范形

定理 33.7.1 代数等价系统 S 与 $\widetilde{S}$ 具有相同的可控性与可观测性.

单输入($r=1$)系统的可控**典范形**(canonical form)

(1) 典范形 Ⅰ

考虑可控系统 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u, \quad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad b \in \mathbb{R}^n$$

的代数等价系统,取变换矩阵($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_1\widetilde{\boldsymbol{x}}$)

$$\boldsymbol{T}_1 \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{Q}_n,$$

则

$$S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \xrightarrow{\boldsymbol{T}_1} S_1^C(\boldsymbol{A}_1^C,\boldsymbol{b}_1^C),$$

其中

$$\boldsymbol{A}_1^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_1^C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_1.$$

而 $a_1,\cdots,a_n$ 为特征多项式 $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 的系数. 即

$$\psi(s) = \det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n.$$

$s_1^C(\boldsymbol{A}_1^C,\boldsymbol{b}_1^C)$ 称为**典范形 Ⅰ**.

(2) 典范形 Ⅱ

设 $\boldsymbol{P}$ 为顺列矩阵，即

$$\boldsymbol{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n-1}, \cdots, \boldsymbol{e}_1).$$

取变换矩阵($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_2 \tilde{\boldsymbol{x}}$)

$$\boldsymbol{T}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{T}_1 \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{b}),$$

则

$$S(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \xrightarrow{\boldsymbol{T}_2} S_2^C(\boldsymbol{A}_2^C, \boldsymbol{b}_2^C),$$

其中

$$\boldsymbol{A}_2^C = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2^C = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_n,$$

$S_2^C(\boldsymbol{A}_2^C, \boldsymbol{b}_2^C)$ 称为**典范形 Ⅱ**.

(3) 典范形 Ⅲ

设矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & \ddots & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

定义变换矩阵($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}_3 \tilde{\boldsymbol{x}}$)

$$\boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{T}_2 \boldsymbol{Q} = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \boldsymbol{A}^{n-j-1}\boldsymbol{b}, \sum_{j=0}^{n-2} a_j \boldsymbol{A}^{n-j-2}\boldsymbol{b}, \cdots, a_0\boldsymbol{b} + a_1\boldsymbol{b}, a_0\boldsymbol{b} \right),$$

规定 $a_0 = 1$，则

$$S(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \xrightarrow{\boldsymbol{T}_3} S_3^C(\boldsymbol{A}_3^C, \boldsymbol{b}_3^C),$$

其中

$$A_3^C=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&1\\-a_n&-a_{n-1}&\cdots&\cdots&-a_1\end{pmatrix},\quad b_3^C=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=e_n.$$

(4) 典范形 Ⅳ($\mathbf{A}$ 有 n 个相异特征值的情形)

设 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 有 n 个相异特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$. 取 Vandermonde 矩阵

$$\mathbf{V}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\\lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_n\\\lambda_1^2&\lambda_2^2&\cdots&\lambda_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda_1^{n-1}&\lambda_2^{n-1}&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

及变换矩阵($x=T_4\tilde{x}$),

$$T_4\overset{\text{def}}{=}T_3\mathbf{V},$$

则

$$\mathrm{S}(\mathbf{A},b)\xrightarrow{T_4}\mathrm{S}_4^C(\mathbf{A}_4^C,b_4^C),$$

其中

$$A_4^C=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix},\qquad b_4^C=\mathbf{V}^{-1}e_n,$$

或

$$\mathrm{S}_3^C(A_3^C,b_3^C)\xrightarrow{\mathbf{V}}\mathrm{S}_4^C(A_4^C,b_4^C).$$

多输入系统的可控典范形

当多输入系统完全可控时,也可像单输入系统那样化为相应的 4 种典范形,但情况要比单输入系统复杂得多,并且这时的典范

形并不惟一. 以下给出两种典范形.

(1) 典范形 Ⅰ

考虑多输入系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}. \end{cases}$$

设 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B} = r$, $\boldsymbol{b}_j$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列($j = 1,\cdots,r$), 并设 $\sigma_j(j = 1,\cdots,r)$ 为满足下列条件的整数组:

① $\sigma_j \geqslant 1, \forall j$;

② $\sum_{j=1}^{r}\sigma_j = n$;

③ 取 $\boldsymbol{T}_5 = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{A}^{\sigma_1-1}\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_r, \cdots, \boldsymbol{A}^{\sigma_r-1}\boldsymbol{b}_r)$, 且 $\det\boldsymbol{T}_5 \neq 0$, 则

$$S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \xrightarrow{\boldsymbol{T}_5} S_5^C(\boldsymbol{A}_5^C, \boldsymbol{B}_5^C),$$

其中

$$\boldsymbol{A}_5^C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rr} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{ii} = \left(\begin{array}{cccc:c} 0 & & 0 & & -a_1^{ii} \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & & 1 & -a_{\sigma_1}^{ii} \end{array}\right)_{\sigma_i \times \sigma_i}, \quad i = 1,\cdots,r,$$

$$\boldsymbol{A}_{ji} = \left(\begin{array}{c:c} & -a_1^{ji} \\ & -a_2^{ji} \\ \boldsymbol{0} & \vdots \\ & -a_{\sigma_j}^{ji} \end{array}\right)_{\sigma_j \times \sigma_i}, \quad i,j = 1,\cdots,r;\ i \neq j,$$

$$B_5^C = (e_{d_1+1}, e_{d_2+1}, \cdots, e_{d_r+1}),$$

其中 $a_k^{ji}(i,j=1,\cdots,r;\ k=1,\cdots,\sigma_j)$ 满足

$$A^{\sigma_i} b_i = -\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{\sigma_j} a_k^{ji} A^{k-1} b_j = -T_5 \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{\sigma_j} a_k^{ji} e_{d_j+k},$$

$$d_1 \overset{\text{def}}{=} 0, \quad d_i \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{i-1}\sigma_j, \quad i \geqslant 2, \quad d_{r+1} \overset{\text{def}}{=} n.$$

与单输入情况不同,这里的典范形矩阵 A_5^C 形式上是不惟一的(σ_j 不确定,a_k^{ji} 亦不确定).

(2) 典范形 Ⅱ

设顺列矩阵 P 为如下分块形式

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_r \end{bmatrix},$$

$$P_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\sigma_i \times \sigma_i}, \qquad i = 1,\cdots,r.$$

取变换矩阵($x = T_6 \tilde{x}$)

$$\begin{aligned} T_6 &\overset{\text{def}}{=} T_5 P \\ &= (A^{\sigma_1-1} b_1, \cdots, b_1, A^{\sigma_2-1} b_2, \cdots, b_2, \cdots, A^{\sigma_r-1} b_r, \cdots, b_r), \end{aligned}$$

则

$$S(A,B) \xrightarrow{T_6} S_6^C(A_6^C, B_6^C),$$

其中

$$A_6^C = \begin{bmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{1r} \\ A'_{21} & \cdots & A'_{2r} \\ \vdots & & \vdots \\ A'_{r1} & \cdots & A'_{rr} \end{bmatrix},$$

$$A'_{ii}=\left(\begin{array}{c:cccc}-a^{ii}_{\sigma_i} & 1 & & & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 1\\ -a^{ii}_1 & 0 & & \cdots & 0\end{array}\right)_{\sigma_i\times\sigma_i},\qquad i=1,\cdots,r,$$

$$A'_{ji}=\left(\begin{array}{c:c}-a^{ji}_{\sigma_j} & \\ \vdots & \mathbf{0}\\ -a^{ji}_1 & \end{array}\right)_{\sigma_j\times\sigma_i},\quad i,j=1,\cdots,r;\ j\neq i,$$

$$B^C_6=(e_{d_1},e_{d_2},\cdots,e_{d_r},e_n).$$

33.8 可观测系统的典范形

与可控系统的典范形相对应，可观测系统亦有相应类型的典范形. 以下给出最常用的单输出可观测系统的两种典范形.

单输出系统($m=1$)的可观测典范形

(1) 典范形 I

考虑可观测系统 $S(A,B,C)$,

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx,\end{cases}$$

$$A\in\mathbb{R}^{n\times n},\quad B\in\mathbb{R}^{n\times r},\quad C\in\mathbb{R}^{1\times n}$$

的代数等价系统 $S^0_1(A^0_1,B^0_1,C^0_1)$，取变换矩阵($x=T_1\tilde{x}$)

$$T_1\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{pmatrix}=R_n,$$

则

$$S(A,B,C)\xrightarrow{T_1}S^0_1(A^0_1,B^0_1,C^0_1),$$

其中

$$A_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$C_1^0 = (1,0,\cdots,0), \qquad B_1^0 = T_1 B,$$

$a_1,\cdots,a_n$ 为特征多项式 $\det(sI - A)$ 的系数,即

$$\psi(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n.$$

$S_1^0,(A_1^0,B_1^0,C_1^0)$ 称为可观测典范形 Ⅰ.

(2) 典范形 Ⅱ

设矩阵 R 为

$$R = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & & \iddots & \iddots & \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \\ a_1 & \iddots & & & \\ 1 & & & 0 & \end{pmatrix},$$

取变换矩阵($x = T_2\tilde{x}$)

$$T_2 \overset{\text{def}}{=} T_1 R,$$

则

$$S(A,B,C) \xrightarrow{T_2} S_2^0(A_2^0,B_2^0,C_2^0),$$

其中

$$A_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$C_0^2 = (0,\cdots,0,1), \quad B_0^2 = T_2 B.$$

注 可观测典范形对于系统的状态空间与输入输出模型的互相转换有重要作用.

34　离散线性系统

34.1　离散线性系统建模的例

例 34.1.1　考虑投资与利率的经济模型问题

假设 D 为每月投资额(常数),可视为在银行的存储;I 为每月的利率(常数);P_k 为前 k 个月内的积累. 则 $k+1$ 个月内的积累应为

$$P_{k+1} = (1+I)P_k + D, \tag{34.1}$$

相应的齐次方程为

$$P_{k+1} - (1+I)P_k = 0 \tag{34.2}$$

解可记为

$$P_k = P_0(1+I)^k.$$

可以用递推(迭代) 法求解:

$$\begin{aligned}
P_1 &= (1+I)P_0 + D,\\
P_2 &= (1+I)P_1 + D\\
&= (1+I)^2P_0 + (1+I)D + (1+I)^0D,\\
&\vdots\\
P_k &= (1+I)^kP_0 + \sum_{i=0}^{k-1}(1+I)^iD.
\end{aligned}$$

假设 $P_0 = D$,则

$$\begin{aligned}
P_k &= D\sum_{i=0}^{k}(1+I)i\\
&= D\frac{(1+I)^{k+1}-1}{I},\quad I\neq 0.
\end{aligned}$$

例 34.1.2 鱼池模型

鱼的生长过程分为卵期、鱼苗期、成鱼期 3 个阶段. 为简单起见,假设每阶段为期一年,每年投入鱼池的卵数取为系统的输入,每年从池内捞出的鱼数视为系统的输出. 第 k 年的输入和输出分别记为 $u(k)$ 和 $y(k)$,第 k 年的鱼苗数记为 $X_1(k)$,鱼数记为 $X_2(k)$. 并进一步假设:

(1) 来年的鱼苗数是上年鱼所产卵数 $a_2X_2(k)$ 与投入池内的卵数 $b_1u(k)$ 之和,再减去被鱼苗吃掉的卵数 $a_1X_1(k)$,即有

$$X_1(k+1) = -a_1X_1(k) + a_2X_2(k) + b_1u(k).$$

(2) 来年的鱼数是上年鱼的残存数 $a_4X_2(k)$ 加上鱼苗的成活数 $a_3X_1(k)$,即有

$$X_2(k+1) = a_3X_1(k) + a_4X_2(k).$$

(3) 每年捕捞鱼数与池内存鱼数成正比,即

$$y(k) = c_2X_2(k).$$

以上 a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,c_2 均为比例系数(常数). 最后所得鱼池模型为

$$\begin{pmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}u(k),$$

$$y(k) = (0,c_2)\begin{pmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{pmatrix}.$$

该模型可用来预测和控制鱼苗和鱼数.

34.2 Z 变换

定义 34.2.1 设 $\{x(k) \mid k = 0,1,2,\cdots\}$ 及复变量 z,若存在 $R > 0$,使 $|z| > R$ 时,级数

$$X(z) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

收敛,则称级数的和 $X(z)=\mathscr{Z}\{x(k)\}$ 为序列 $\{x(k)\}$ 的 **Z 变换**(Z-transformation). 这里规定 $x(k)=0\ (k<0)$.

Z 变换的性质

(1) Z 变换满足线性性,即 $\forall a,b\in\mathbb{C}$,

$$\mathscr{Z}\{ax(k)+by(k)\}=a\mathscr{Z}\{x(k)\}+b\mathscr{Z}\{y(k)\}.$$

(2) $\mathscr{Z}\{Z^{-1}x(k)\}=Z^{-1}\mathscr{Z}\{x(k)\}=\mathscr{Z}\{x(k-1)\}$.

这一性质是在差分方程中引用 Z^{-1} 作为**向后单位延迟算子**(back shift operator) 的依据,同时将 Z 作为**向前单位延迟算子**(foreward shift operator). 例如

$$Zx(k)=x(k+1),$$
$$Z^{-2}x(k)=x(k-2),$$

等等.

(3) 设 $\{y(k)\}=\{\overbrace{0,\cdots,0}^{m个},x(0),x(1),\cdots,x(k),\cdots\}$,即 $y(k)=Z^{-m}x(k)=x(k-m)$,则

$$\mathscr{Z}\{y(k)\}=Z^{-m}\mathscr{Z}\{x(k)\}=Z^{-m}X(z).$$

(4) 对任意正整数 m,有

$$\mathscr{Z}\{x(k+m)\}=Z^mX(z)-\sum_{i=1}^{m}Z^ix(m-i).$$

(5) 卷积公式,若 $x(k)$ 与 $y(k)$ 的卷积为

$$x(k)*y(k)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=0}^{k}x(i)y(k-i)=\sum_{i=0}^{k}x(k-i)y(i),$$

则

$$\mathscr{Z}\{x(k)*y(k)\}=X(z)Y(z).$$

(6) 对任意正整数 m,有

$$\mathscr{Z}\{k^mx(k)\}=D^mX(z),\qquad D\overset{\text{def}}{=}-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}.$$

特别地，当 $m=1$ 时

$$\mathscr{Z}\{kx(k)\}=-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}.$$

(7) $\forall a\in\mathbb{C}$ 均有

$$\mathscr{Z}\{a^kx(k)\}=X\left(\frac{z}{a}\right).$$

(8)（终值定理）若 $k\to\infty$ 时 $\{x(k)\}$ 收敛，则

$$\lim_{k\to\infty}x(k)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z).$$

Z 反变换公式为

$$x(k)\overset{\text{def}}{=}\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\mathrm{C}}Z^{k-1}X(z)\mathrm{d}z,\qquad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 i 为虚单位，C 为环绕 $X(z)$ 所有奇点的任意正向闭路.

Z 变换与 Laplace 变换的关系

设 $x(t)$ 为一连续函数，对 $x(t)$ 进行以 T 为采样区间的零阶保持均匀采样，即在 $t=kT$ 时，取 $x(t)=x(kt)$，且使

$$x(kT+t)=x(kT),\qquad 0\leqslant t<T,$$

以 $\{x_T(t)\mid t=kT,k=0,1,\cdots\}$ 表示采样序列

$$x_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT).$$

取 $x_T(t)$ 的 Laplace 变换可得

$$\begin{aligned}X_T(S)=\mathscr{L}\{x_T(t)\}&=\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\mathrm{e}^{-kTS}\xlongequal{z=\mathrm{e}^{TS}}\sum_{k=0}^{\infty}x_kz^{-k}\\&=X(z).\end{aligned}$$

上述最后一个等号用了记号 $x_k=x(kT)$. 因此，连续函数的零阶保持均匀采样序列的 Laplace 变换恰对应它的 Z 变换（在 $z=\mathrm{e}^{TS}$ 意义下），参见表 34.1.

表 34.1　Z 变换与 Laplace 变换对照表

x_k	$\mathscr{Z}[x_k]$	$x(t)$	$\mathscr{L}[x(t)]$
δ_k	1	$\delta(t)$	1
$\delta_{k=m}$	z^{-m}	$\delta(t-\tau)$	$\mathrm{e}^{-\tau s}$
1_k	$\dfrac{z}{z-1}$	$1(t)$	$\dfrac{1}{s}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
k	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	t	$\dfrac{1}{s^2}$
k^2	$\dfrac{z^2+z}{(z-1)^3}$	t^2	$\dfrac{2}{s^3}$
ka^k	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$t\,\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$
k^3a^k	$\dfrac{az^2+a^2z}{(z-a)^3}$	$t^2\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{2}{(s-a)^3}$
$\sin k\omega$	$\dfrac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos k\omega$	$\dfrac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$a^k\sin k\omega$	$\dfrac{az\sin\omega}{z^2-2az\cos\omega+a^2}$	$e^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$a^k\cos k\omega$	$\dfrac{z(z-a\cos\omega)}{z^2-2az\cos\omega+a^2}$	$\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$

表中：$\delta_k \overset{\text{def}}{=} \begin{cases}1, & k=0,\\ 0, & k\neq 0,\end{cases}$　$\delta_{k-m} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m,\end{cases}$ $1_k = 1; k=0,1,2,\cdots$.

34.3　差分方程

离散系统(discrete-time systems)是由差分方程描述的. 本节给出线性差分方程的主要结果.

定义 34.3.1 设 $k \in \mathbb{N}$，$a_i(k) \in \mathbb{R}(i=1,\cdots,n)$，$f(k) \in \mathbb{R}$ 为给定序列，形如

$$x(k+n)+a_1(k)x(k+n-1)+\cdots+a_n(k)x(k)=f(k) \tag{34.3}$$

的方程称为 n **阶线性差分方程**(linear difference equations). 当 $f(k) \equiv 0$ 时，

$$x(k+n)+a_1(k)x(k+n-1)+\cdots+a_n(k)x(k)=0 \tag{34.4}$$

称为(34.3)的**齐次方程**(homogeneous equation). 特别当 $a_i(k) \equiv a_i$ 时，

$$x(k+n)+a_1x(k+n-1)+\cdots+a_nx(k)=f(k) \tag{34.5}$$

称为**线性常系数差分方程**，相应的齐次方程为

$$x(k+n)+a_1x(k+n-1)+\cdots+a_nx(k)=0. \tag{34.6}$$

若有序列 $\{x(k)\}$ 代入差分方程后，使之成为恒等式，则称 $x(k)$ 为**该差分方程的解**.

一般解法

求解差分方程的解析方法有以下几种：

(1) 化为一阶差分方程组求解(递推法).

(2) 用 Z 变换求解，主要适用于常系数差分方程.

(3) 特征根法，适用于常系数差分方程.

差分方程的 Z 变换解法

对常系数差分方程(34.5)的求解，有以下公式

$$\begin{cases} x(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}, \\ X(z)=\dfrac{F(z)}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}, \\ F(z)=\mathscr{Z}\{f(k)\}. \end{cases}$$

特别地，当 $f(k)=b_1u(k+n-1)+\cdots+b_mu(k+n-m)(m \leqslant n)$ 时，方程(34.5)的解为

$$\begin{cases} x(k) = \mathscr{Z}^{-1}\{X(z)\}, \\ X(z) = \dfrac{b_1 z^{n-1} + \cdots + b_m z^{n-m}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} U(z), \\ U(z) = \mathscr{Z}\{u(k)\}. \end{cases}$$

例 34.3.2 用 Z 变换求解下列差分方程

$$\begin{cases} x(k+2) + 5x(k+1) + 6x(k) = 1, \\ x(0) = 0, \qquad x(1) = 1. \end{cases}$$

解 对方程两边取 Z 变换

$$z^2 X(z) - zx(1) + 5zX(z) + 6X(z) = \frac{z}{z-1},$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1}\frac{1}{z^2+5z+6} + \frac{z}{z^2+5z+6}$$

$$= \frac{1}{12}\frac{z}{z-1} + \frac{2}{3}\frac{z}{z+2} - \frac{3}{4}\frac{z}{z+3}.$$

经 Z 反变换(查表)得方程的解为

$$x(k) = \frac{1}{12} + \frac{2}{3}(-2)^k - \frac{3}{4}(-3)^k.$$

定理 34.3.3 线性差分方程解的结构　若 n 个序列 $x_1(k)$, $x_2(k),\cdots,x_n(k)$ 为齐次方程(34.4)或(34.6)的 n 个线性无关的解,则

$$\bar{x}(k) = c_1 x_1(k) + \cdots + c_n x_n(k),$$

亦为该方程的解,其中 $c_1,\cdots,c_n$ 为由初始条件确定的 n 个常数. $x_1(k),\cdots,x_n(k)$ 称为该方程的一个**基本解组**, $\bar{x}(k)$ 称为该方程的**一般解**. 又若 $x^*(k)$ 为方程(34.3)或(34.5)的一个解,则该方程的一般解表达式为

$$x(k) = \bar{x}(k) + x^*(k).$$

34.4 常系数差分方程

定义 34.4.1 考虑常系数差分方程(34.6)的 Z 变换.

$$A(z)x(k) = 0.$$

若 $x(k)$ 是方程的解，则

$$A(z) = 0, \tag{34.7}$$

其中 $A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. 将 z 视为位移算子(shift operator)时，称(34.7)为方程(34.6)或(34.5)的**特征方程**(characteristic equation)，而(34.7)的根称为相应差分方程的**特征根**(characteristic root).

定理 34.4.2 常系数差分方程解的结构

(1) 若方程(34.6)的特征方程 $A(z)=0$ 有 l 重根 μ，则该方程有形如 $k^{l-1}\mu^k, k^{l-2}\mu^k, \cdots, k\mu^k, \mu^k$ 的 l 个解，且这 l 个解是线性无关的.

(2) 若方程(34.5)中的 $f(k)$ 具有形状

$$f(k) = P_m(k)\alpha^k,$$

则该方程有形如

$$x^*(k) = Q_m(k)k^l\alpha^k$$

的特解，其中 $P_m(k)$，$Q_m(k)$ 为 k 的 m 次多项式，α 为常数，l 由下式定义

$$l = \begin{cases} l_0, & \alpha \text{ 为特征根，重数为 } l_0, \\ 0, & \alpha \text{ 不为特征根.} \end{cases}$$

例 34.4.3 (1) 用特征根法求解二阶差分方程

$$x(k+2) - x(k) = 2k.$$

解 特征方程为 $z^2 - 1 = 0$，特征根为 $z_{1,2} = \pm 1$ 相应齐次方程一般解为

$$\bar{x}(k) = c_1(-1)^k + c_2.$$

设方程的一个特解为($f(k) = 2kl^k$，l 为特征根，且为单根)

$$x^*(k) = k(\alpha k + \beta),$$

代入差分方程得到

$$\alpha(k+2)^2 + \beta(k+2) - \alpha k^2 - \beta k = 2k,$$

比较系数可得到 $\alpha = 1, \beta = -2$，于是该方程的一般解可表示为

$$x(k) = c_1(-1)^k + c_2 + k^2 - 2k.$$

如给出初值，则可进一步确定常数 c_1, c_2.

(2) 考虑下列二阶差分方程的解

$$x(k+2) + a_1 x(k+1) + a_2 x(k) = 0.$$

解 特征根为

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right).$$

① 当 $z_1 \neq z_2$ 时，方程的一般解为

$$x(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k.$$

② 当 $z_1 = z_2$ 时，方程的一般解为

$$x(k) = c_1\left(-\frac{a_1}{2}\right)^k + c_2 k\left(-\frac{a_1}{2}\right)^k,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数. 在 ① 中，若 z_1, z_2 为共轭复根(假设本例为实系数方程)，即

$$z_{1,2} = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi},$$

则一般解又可记为

$$x(k) = c_1 r^k \cos k\varphi + c_2 r^k \sin k\varphi.$$

34.5 一阶差分方程组

定义 34.5.1 设矩阵 $\boldsymbol{A}(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{B}(k) \in \mathbb{R}^{n\times r}$，形如

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{34.8}$$

的向量矩阵方程称为 ***n* 维一阶线性差分方程组**. 其中

$$\boldsymbol{x}(k) = \left(x_1(k) x_2(k) \cdots x_n(k)\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{u}(k) = \left(u_1(k) u_2(k) \cdots u_r(k)\right)^{\mathrm{T}}.$$

特别当 $\boldsymbol{A}(k) \equiv \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}(k) \equiv \boldsymbol{B}$ 时，

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k), \tag{34.9}$$

称为**线性常系数差分方程组**.

方程组(34.8)及(34.9)相应的齐次方程分别是

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k), \tag{34.10}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k). \tag{34.11}$$

若有向量序列$\{\boldsymbol{x}(k)\}$代入差分方程组后使之成为恒等式,则称$\boldsymbol{x}(k)$为**该方程组的解(向量)**.

齐次方程(34.10)与(34.11)的解分别为

$$\boldsymbol{x}(k)=\prod_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}(j)\boldsymbol{x}(0), \tag{34.12}$$

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0). \tag{34.13}$$

非齐次方程(34.8)与(34.9)的解分别为

$$\boldsymbol{x}(k)=\prod_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}(j)\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\left\{\prod_{j=i+1}^{k-1}\boldsymbol{A}(j)\right\}\boldsymbol{B}(i)\boldsymbol{u}(i), \tag{34.14}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k)&=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)\\&=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-i-1).\end{aligned} \tag{34.15}$$

求解问题的注

(1) 利用上述解的表达式求解差分方程组时,如利用计算机实现,由于计算全部为乘法和加法,是极为方便的.

(2) 如手工计算求解,一般要将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为对角形或 Jordan 标准形才便于计算.

例 34.5.2 将二阶差分方程

$$\begin{cases}x(k+2)+5x(k+1)+6x(k)=1,\\x(0)=0,\qquad x(1)=1.\end{cases}$$

化为方程组求解 $x(k)$.

解 取变换

$$x_1(k)=x(k),\qquad x_2(k)=x(k+1),$$

则有

$$x_1(k+1)=x(k+1)=x_2(k),$$
$$x_2(k+1)=x(k+2)=-6x_1(k)-5x_2(k)+u(k).$$

或记为

$$\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-6&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u(k),$$

$$\begin{cases}x_1(0)=0,\\x_2(0)=1,\end{cases}\qquad u(k)=1.$$

利用公式(34.15)得到

$$\begin{pmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-6&-5\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\sum_{j=0}^{k-1}\begin{pmatrix}0&1\\-6&-5\end{pmatrix}^j\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u(k-j-1).$$

为方便,将 $\boldsymbol{A}$ 化为对角形,变换矩阵是

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{T}\tilde{x}(k),\qquad \tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-3\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{T}^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(k)=\begin{bmatrix}(-2)^k&0\\0&(-3)^k\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\sum_{j=0}^{k-1}\begin{bmatrix}(-2)^j&0\\0&(-3)^j\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(-2)^k\\(-3)^k\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1-(-2)^k}{3}\\\dfrac{1-(-3)^k}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{1-(-2)^{k+1}}{3}\\ \dfrac{-1+(-3)^{k+1}}{4}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}(k)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{3}(-2)^{k+1}+\dfrac{1}{4}(-3)^{k+1}\\ \dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{3}(-2)^{k+2}+\dfrac{1}{4}(-3)^{k+2}\end{pmatrix}.$$

最后得到原方程的解为

$$x(k)=x_1(k)=\frac{1}{12}+\frac{2}{3}(-2)^k-\frac{3}{4}(-3)^k.$$

对于高阶差分方程

$$y(n+k)+a_1y(n+k-1)+\cdots+a_ny(k)=u(k). \tag{34.16}$$

引入变换

$$\begin{aligned}x_1(k)&=y(k),\\ x_2(k)&=y(k+1),\\ &\vdots\\ x_n(k)&=y(n+k-1).\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}x_1(k+1)&=x_2(k),\\ x_2(k+1)&=x_3(k),\\ &\vdots\\ x_n(k+1)&=-a_ny(k)-\cdots-a_1y(n+k-1)+u(k)\\ &=-a_nx_1(k)-\cdots-a_1x_n(k)+u(k).\end{aligned}$$

用向量矩阵表示的方程为

$$\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ \vdots\\ x_n(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ \vdots\\ x_n(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}u(k) \tag{34.17}$$

因此，高阶差分方程最方便的解法，是化为差分方程组用计算机迭代求解，包括变系数情形，只需将 a_i 换为 $a_i(k)$ 即可.

34.6 解的稳定性

定义 34.6.1 设 $\boldsymbol{x}(k)\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{u}(k)\in\mathbb{R}^r$，考虑如下形式的差分方程

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)). \qquad (34.18)$$

令 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{c}$(常向量)，若有向量 $\boldsymbol{x}_e$ 满足方程

$$\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{c}),$$

则称 $\boldsymbol{x}_e$ 为方程(34.18)的一个**平衡状态**(equilibrium state).

例 34.6.2 (1) 考虑例 34.1.1 中的差分方程

$$P_{k+1}=(1+I)P_k+D.$$

其平衡状态由下式确定

$$P_e=(1+I)P_e+D,$$

即平衡状态为 $P_e=-\dfrac{D}{I}$.

(2) 考虑下面差分方程的平衡状态

$$x(k+1)=\frac{1}{2}\left(x(k)+\frac{b}{x(k)}\right), \qquad x(k)\neq 0,\ x(k)\in\mathbb{R}.$$

其平衡状态由下式确定

$$x_e=\frac{1}{2}\left(x_e+\frac{b}{x_e}\right),$$

即平衡状态为 $x_e=\pm b^{1/2}$.

定义 34.6.3 (1) 方程(34.18)的一个平衡状态，$\boldsymbol{x}_e$ 称为**稳定的**(stable)，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta(\varepsilon,t_0)=\delta>0$，使当

$$\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_e\|\leqslant\delta$$

时，成立

$$\|\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{x}_e\|<\varepsilon, \quad \forall k,$$

其中 $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$. $\boldsymbol{x}_e$ 称为稳定平衡状态.

(2) 方程(34.18) 的一个稳定平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 称为**渐近稳定的**(asymptotically stable),如果

$$\lim_{k\to\infty} \| \boldsymbol{x}(k) - \boldsymbol{x}_e \| = 0.$$

(3) 一个平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 称为**一致稳定的**(uniformly stable),如果(1) 中的 δ 与 t_0 无关.

(4) 如果一个平衡状态 $\boldsymbol{x}_e$ 是渐近稳定的,并且(1) 中的 δ 可以任意大,则称 $\boldsymbol{x}_e$ 是**全局渐近稳定的**(globally asymptotically stable).

注 34.6.4 差分方程的平衡状态稳定,也称方程的**解是稳定的**,或**系统是稳定的**.

定理 34.6.5 考虑差分方程

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)). \tag{34.19}$$

设 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ 是平衡状态,如果存在一个函数 $V(\cdot):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,满足:

(1) $V(\boldsymbol{x}) > 0$,对所有 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

(2) $\Delta V(\boldsymbol{x}) < 0$,对所有 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,其中

$$\begin{aligned}\Delta V(\boldsymbol{x}(k)) &\stackrel{\text{def}}{=} V(\boldsymbol{x}(k+1)) - V(\boldsymbol{x}(k)) \\ &= V(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))) - V(\boldsymbol{x}(k)).\end{aligned}$$

(3) $V(\boldsymbol{0}) = 0$.

(4) $\lim\limits_{\|\boldsymbol{x}\|\to\infty} V(\boldsymbol{x}) = \infty$.

则平衡状态 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ 是全局渐近稳定的.

定理 34.6.6 对方程(34.19),设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$,且对所有 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 有

$$\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \| \leqslant \| \boldsymbol{x} \|,$$

则平衡状态 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ 是全局渐近稳定的. 并且定理 34.6.5 中的函数 $V(\boldsymbol{x})$ 可取为

$$V(\boldsymbol{x}) = \| \boldsymbol{x} \|.$$

上面两个定理中的函数 $V(\boldsymbol{x})$ 称为 Liapunov 函数.

定理 34.6.7 对线性差分方程组

$$x(k+1)=Ax(k). \tag{34.20}$$

当 $|\lambda_i(A)|\leqslant 1$ 时,其平衡状态 $x(0)=\mathbf{0}$ 是稳定的.并且,平衡点 $x(0)=\mathbf{0}$ 渐近稳定的充要条件是

$$|\lambda_i(\mathbf{A})|<1,\qquad i=1,\cdots,n.$$

定理 34.6.8 对方程(34.20),其平衡状态 $x(0)=\mathbf{0}$ 为渐近稳定的充要条件是对任意矩阵 $Q>0$,都存在矩阵 $P>\mathbf{0}$,使得

$$A^{\mathrm{T}}PA-P=-Q$$

成立.

34.7 离散线性系统的输入输出模型

离散线性系统的输入输出模型一般形式为

$$\begin{aligned}&y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)\\&=b_1u(k-1)+\cdots+b_mu(k-m).\end{aligned} \tag{34.21}$$

这一模型可以是多变量系统的描述,也可以是单输入单输出系统的描述.当它是单输入单输出模型时,其**脉冲传递函数**(implus transfer function)为

$$H(z^{-1})=\frac{b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}},\qquad m\leqslant n. \tag{34.22}$$

当取输入为单位脉冲信号时,即取

$$u(i)=\delta(i)=\begin{cases}1, & i=0,\\0, & i\neq 0\end{cases}$$

时,(34.21)的输出称为**脉冲响应**.

取 $H(z^{-1})$ 的 Z 反变换,记为

$$h(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{H(z^{-1})\}, \tag{34.23}$$

则 $H(z^{-1})$ 又可记为

$$H(z^{-1})=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)z^{-k},$$

而输出 $y(k)$ 又可表示为如下的形式：

$$y(k)=\sum_{i=0}^{k}h(k)u(k-i)=\sum_{i=0}^{k}h(k-i)u(i). \quad (34.24)$$

上式称为**权函数模型**(weight function model) 或**传递函数模型**. 由此模型可知**脉冲响应恰为 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{k})$**.

34.8 离散线性系统的状态空间模型

离散线性系统的状态空间模型(state space model) 一般形式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k),\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k).\end{cases} \quad (34.25)$$

上述模型中第一个方程称为状态空间方程，$\boldsymbol{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ 称为状态(向量)，$\boldsymbol{u}(k)\in\mathbb{R}^r$，称为输入变量(控制变量)，第二个方程称为输出方程(或观测方程)，$\boldsymbol{y}(k)\in\mathbb{R}^m$，称为输出变量.

特别当 $\boldsymbol{A}(k)=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}(k)=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}(k)=\boldsymbol{C}$ 时，(34.25) 变为定常线性系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k),\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k).\end{cases} \quad (34.26)$$

模型(34.25) 和(34.26) 的输出分别为

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\prod_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}(j)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}(k)\sum_{i=0}^{k-1}\left\{\prod_{j=i+1}^{k-1}\boldsymbol{A}(j)\right\}\boldsymbol{B}(i)\boldsymbol{u}(i), \quad (34.27)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(k)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i)\\ &=\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-i-1)\\ &\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{y}_{\text{oi}}(k)+\boldsymbol{y}_{\text{os}}(k).\end{aligned} \quad (34.28)$$

上式的 $y_{oi}(k)$ 称为**零输入响应**，$y_{os}(k)$ 称为**零状态响应**.

利用 Z 变换可得到

$$Y_0(z) = C(zI - A)^{-1}BU(z).$$

定义系统(34.26)的**脉冲传递函数阵**为

$$H(z^{-1}) = C(zI - A)^{-1}B. \tag{34.29}$$

34.9 离散系统的可控性与可观测性

定义 34.9.1 考虑(34.25)描述的系统 $S(A(k), B(k))$，对任给的 $x(0) \overset{\text{def}}{=} x_0 \in \mathbb{R}^n$，若存在某个自然数 k 和输入序列 $\{u(t) \mid t = 0, 1, \cdots, k\}$ 使得有

$$x(0) = x_0, \qquad x(k+1) = 0$$

成立，则称 $S(A(k), B(k))$ 在 0 时刻**可控**，若这一结论对任意时刻 $k \in T$ 都成立，则称 $S(A(k), B(k))$ 在 T 上**可控**.

定义 34.9.2 考虑(34.25)描述的系统 $S(A(k), C(k))$ 对任给的 $x(0) \overset{\text{def}}{=} x_0$，存在一个自然数 k，能使 x_0 由输出序列 $\{y(t) \mid t = 0, \cdots, k\}$ 惟一确定，则称 $S(A(k), C(k))$ 在 0 时刻**可观测**，若对任意时刻 $k \in T$ 都有这一结论成立，则称 $S(A(k), B(k))$ 在 T 上**可观测**.

定理 34.9.3 系统 $S(A(k), B(k))$ 在时刻 0 可控的充要条件是对某个自然数 k 使得

$$\operatorname{rank} Q_n(k) = n,$$

$$Q_n(k) \overset{\text{def}}{=} \left(B(k) \;\vdots\; A(k), B(k-1) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \prod_{j=1}^{k} A(j) B(0) \right),$$

Q_n 称为**可控性矩阵**.

定理 34.9.4 系统 $S(A(k), C(k))$ 在时刻 0 可观测的充要条件是对某个自然数 k 使得

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_n(k) = n,$$

$$\boldsymbol{R}_n(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}(0) \\ \boldsymbol{C}(1)\boldsymbol{A}(0) \\ \vdots \\ \boldsymbol{C}(k)\prod_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{A}(j) \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{R}_n(k)$ 称为**可观测性矩阵**.

定理 34.9.5 (1) 定常离散系统 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 可控的充要条件是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{Q}_n = n,$$

$$\boldsymbol{Q}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}).$$

(2) 定常离散系统 $S(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ 可观测的充要条件是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{R}_n = n,$$

$$\boldsymbol{R}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \boldsymbol{CA}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

34.10 可控与可观测典范形

离散线性系统的典范形完全和连续系统的情形相类似. 可参见 33.7 节及 33.8 节内容.

34.11 几类线性系统模型的互换

34.11.1 连续线性系统单输入单输出模型化为状态空间模型

考虑模型

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_{n-1}y'(t)+a_ny(t)\\
&=b_1u^{(m-1)}(t)+\cdots+b_{m-1}u'(t)+b_mu(t),\qquad m\leqslant n.
\end{aligned}
\tag{34.30}
$$

记

$$
\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_m(t))^{\mathrm{T}},
$$

$$
\begin{cases}x_1(t)=y(t),\\ x_2(t)=y'(t),\\ \quad\vdots\\ x_n(t)=y^{(n-1)}(t),\end{cases}\qquad
\begin{cases}u_1(t)=u(t),\\ u_2(t)=u'(t),\\ \quad\vdots\\ u_m(t)=u^{(m-1)}(t).\end{cases}
$$

则(34.30)化为状态空间模型

$$
\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ y(t)=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t),\end{cases}
$$

其中

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ 0&\cdots&\cdots&0&1\\ -a_n&\cdots&\cdots&-a_2&-a_1\end{pmatrix},\qquad
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \vdots\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}_{n\times m},
$$

$$
\boldsymbol{b}_n=(b_m,b_{m-1},\cdots,b_1),\qquad \boldsymbol{c}=(1,0,\cdots,0).
$$

34.11.2 连续线性系统的离散化

连续系统的离散化将随 $\boldsymbol{u}(t)$ 采样近似的不同而不同. 考虑连续系统的状态空间模型

$$
\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t).\end{cases}
\tag{34.31}
$$

设 T 为采样间隔,(34.31) 的离散化模型记为

$$
\begin{cases}\boldsymbol{x}((k+1)T)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(kT),\\ \boldsymbol{y}(kT)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(kT).\end{cases}
\tag{34.32}
$$

（1）脉冲近似采样　取

$$u(kT+\tau)=Tu(kT)\delta(\tau),\qquad 0\leqslant\tau<T.$$

则

$$F=\mathrm{e}^{AT},\qquad G=T\mathrm{e}^{AT}B,\qquad H=C.$$

（2）阶跃近似采样　取

$$u(kT+\tau)=u(kT),\qquad 0\leqslant\tau<T.$$

则

$$F=\mathrm{e}^{AT},\qquad G=A^{-1}(\mathrm{e}^{AT}-I)B,\qquad H=C.$$

34.11.3　离散状态空间模型化为输入输出模型

当单输入单输出状态空间模型为完全可观测时，可以由给定的这类模型惟一地写出它的输入输出模型. 取这类模型为

$$\begin{cases}x(k+1)=Ax(k)+bu(k),\\ y(k)=cx(k).\end{cases}\tag{34.33}$$

设

$$P=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\ a_1&1&\ddots&&\vdots\\ a_2&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ a_{n-1}&\cdots&a_2&a_1&1\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}C\\ CA\\ \vdots\\ CA^{n-1}\end{pmatrix},$$

$$(b_1,b_2,\cdots,b_n)=PTb,$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 满足

$$\det(zI-A)\overset{\text{def}}{=}z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n.$$

则模型(34.33)变换为

$$\begin{aligned}&y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)\\ &=b_1u(k-1)+\cdots+b_nu(k-n),\end{aligned}\tag{34.34}$$

并且(34.34)可化为(34.33).

对一般状态空间模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{W}(k), \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{e}(k). \end{cases} \tag{34.35}$$

可以化为输入输出模型

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{H}_1(z^{-1})\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{H}_2(z^{-1})\boldsymbol{W}(k) + \boldsymbol{e}(k),$$

$$\boldsymbol{H}_1(z^{-1}) \overset{\text{def}}{=} z^{-1}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{F}]^{-1}\boldsymbol{G},$$

$$\boldsymbol{H}_2(z^{-1}) \overset{\text{def}}{=} z^{-1}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{I} - z^{-1}\boldsymbol{F}]^{-1},$$

其中$\{\boldsymbol{W}(k)\}$与$\{\boldsymbol{e}(k)\}$是适当维数的零均值独立随机序列.

34.11.4 输入输出模型化为状态空间模型

当输入输出模型的输出变量为标量时，可化为能观测的标准形态空间模型. 设输入输出模型为

$$\begin{cases} A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})e(k), \\ A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \ (\text{标量形式}), \\ B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \ (\text{标量形式}), \\ C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n} \ (\text{标量形式}). \end{cases} \tag{34.36}$$

上述模型可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}u(k) + \boldsymbol{\gamma} e(k), \\ y(k) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) + e(k), \end{cases} \tag{34.37}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & & & \\ -a_2 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ \vdots \\ c_n - a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = (1, 0, \cdots, 0),$$

并且模型(34.37)可表示为(34.36).

35 线性系统对随机输入的响应

35.1 平稳过程与拟平稳过程

定义 35.1.1 设过程 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^p$ 的二阶矩有穷,并满足:

(1) 存在常向量 $\boldsymbol{\mu}_x \in \mathbb{R}^p$,使 $\boldsymbol{x}(t)$ 的均值满足

$$\mathrm{E}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\mu}_x.$$

(2) $\boldsymbol{\Phi}_x(t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\} = \boldsymbol{\Phi}_x(\tau), \forall t.$

则称 $\boldsymbol{x}(t)$ 为**广义平稳随机过程**,简称**平稳随机过程**(stationary stochastic process). 当 $\boldsymbol{\mu}_x = \boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{\Phi}_x(\tau)$ 称为 $\boldsymbol{x}(t)$ 的**自协方差函数**(auto-covariance function).

定义 35.1.2 设过程 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^p$满足:

(1) $\mathrm{E}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\mu}_x(t), \| \boldsymbol{\mu}_x(t) \| < c, \forall t,$

(2) $\boldsymbol{\Phi}_x(t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\tau)\}, \| \boldsymbol{\Phi}_x(t,\tau) \| < c,$

(3) $$\boldsymbol{\Phi}_x(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_x(t,t-\tau), \forall \tau. \tag{35.1}$$

则称$\{\boldsymbol{x}(t)\}$ 为**拟平稳过程**(pseudo-stationary process).

注 35.1.3 (1) 定义 35.1.1 中 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以是连续时间的,也可以是离散时间的(序列).

(2) 定义 35.1.2 是针对序列$\{\boldsymbol{x}(t)\}$,并且,当 $\boldsymbol{x}(t)$ 是连续时间信号时,仅须将条件(35.1) 换为 $\boldsymbol{\Phi}_x(t,\tau)$ 对 t 绝对可积.

(3) 定义 35.1.2 中的 $\boldsymbol{x}(t)$ 可以是确定信号,此时,拟平稳意味着 $\boldsymbol{x}(t)$ 是有界信号,且满足

$$\boldsymbol{\Phi}_x(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau) \quad (\text{对离散信号}), \tag{35.2}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\mathrm{d}t \quad (\text{对连续信号}). \tag{35.3}$$

(4) $\boldsymbol{x}(t)$ 为平稳信号时，必为拟平稳的，因此，定义 35.1.2 概括了相当广泛的一类信号. 另外，其中的 $\boldsymbol{\Phi}_x(\tau)$（定义 35.1.1 及定义 35.1.2 中），工程上也常称之为 $\boldsymbol{x}(t)$ 的**自相关函数**(autocorrelation function)，而不论 $\boldsymbol{x}(t)$ 的均值是否为零.

引入如下记号

$$\overline{\mathrm{E}}f(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \mathrm{E}f(t), \tag{35.4}$$

则(35.1)中的 $\boldsymbol{\Phi}_x(\tau)$ 又可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}_x(\tau) = \overline{\mathrm{E}}\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\}. \tag{35.5}$$

定义 35.1.4 两个零均值平稳过程或拟平稳过程 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{y}(t)$ 称为联合平稳(jointly stationary)或联合拟平稳，如果 $\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{y}(t)$ 的**互协方差函数**(cross covariance function)

$$\boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\} \tag{35.6}$$

或

$$\boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathrm{E}}\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\} \tag{35.7}$$

存在. 并且 $\boldsymbol{\Phi}_{xy}$ 与 $\boldsymbol{\Phi}_{yx}$ 满足

$$\boldsymbol{\Phi}_{xy}(-\tau) = \boldsymbol{\Phi}_{yx}^{\mathrm{T}}(\tau). \tag{35.8}$$

谱分析与时域分析是研究随机信号的两类手段. 这里限于给出谱的概念的一些基本结果. 谱的概念是由 Fourier 级数及 Fourier 变换引入的，有关这部分内容，可参见本卷的微积分及复变函数有关章节.

35.2 确定性信号的谱表示

对确定性实函数 $x(t)$（一般是非周期的），当 $x(t)$ 绝对可积时可表示为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega, \tag{35.9}$$

其中

$$X(\omega) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t. \tag{35.10}$$

式(35.9) 称为 $x(t)$ 的**谱表示**，而 $X(\omega)$ 称为 $x(t)$ 的**频谱**(frequency spectrum). 对 $x(t)$ 与 $X(\omega)$，有如下的 Parseval **能量积分公式**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega. \tag{35.11}$$

定理 35.2.1 对绝对可积确定性信号 $x(t)$，其自协方差函数 $\Phi_x(\tau)$ 由(35.2) 定义，则

$$\begin{cases} \Phi_x(\tau) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} \mathrm{d}\omega, \\ |X(\omega)|^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau} \mathrm{d}\tau, \end{cases} \tag{35.12}$$

并且称 $|X(\omega)|^2$ 为 $x(t)$ 的**能谱密度**，

$$\Phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

代表确定性信号 $x(t)$ 的能量.

注 35.2.2 对确定性信号 $x(t)$ 的自协方差函数 $\Phi_x(\tau)$，有些文献中取时间平均

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x(t-\tau) \mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} R_x(\tau) \tag{35.13}$$

定义为 $x(t)$ 的自协方差函数，这时的谱密度定义为

$$S_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2, \tag{35.14}$$

$X_T(\omega)$ 是 $x(t)$ 的**截尾函数** $x_T(t)$ 的 Fourier 变换，$x_T(t)$ 定义为

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leqslant T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \tag{35.15}$$

35.3 连续时间平稳信号的谱

为方便，以下所论平稳信号均为零均值，因此，一维信号 $x(t)$ 的自协方差函数均用 $\varphi(\tau)$ 表示.

定理 35.3.1 若连续时间平稳信号 $x(t)$ 的自协方差 $\varphi_x(\tau)$ 绝对可积,则存在有界非降函数 $F_x(\omega)$,使得

$$\varphi_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}F_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}f_x(\omega)\mathrm{d}\omega,\tag{35.16}$$

$$f_x(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\varphi_x(\tau)\mathrm{d}\tau,\tag{35.17}$$

其中 $F_x(\omega)$ 称为 $x(t)$ 的谱函数(spectral function),$f_x(\omega)$ 称为 $x(t)$ 的谱密度(spectral density),(35.16) 与(35.17) 一起称为 Wiener(维纳)-Khintchine(辛钦) 公式(Wiener-Khintchine formula).

若上述 $x(t)$ 是实平稳信号,则 Wiener-Khintchine 公式变为

$$\begin{cases}\varphi_x(\tau)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}f_x(\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\omega,\\ f_x(\omega)=2\displaystyle\int_0^{\infty}\varphi_x(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau.\end{cases}\tag{35.18}$$

定理 35.3.1 称为平稳信号的谱分解定理.

35.4 离散平稳信号的谱

定理 35.4.1 设平稳序列$\{x(k)\}$的自协方差函数 $\varphi_x(\tau)$ 满足 $\sum\limits_{\tau=-\infty}^{+\infty}|\varphi(\tau)|<\infty$,则存在有界非降函数 $G_x(\omega)$,使得

$$\varphi_x(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}G_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}g_x(\omega)\mathrm{d}\omega,\tag{35.19}$$

$$g_x(\omega)=\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau},\qquad -\pi\leqslant\omega\leqslant\pi,\tag{35.20}$$

其中 $G_x(\omega)$ 称为$\{x(k)\}$的**谱函数**,$g_x(\omega)$ 称为$\{x(k)\}$的谱密度.

若$\{x(k)\}$为实平稳序列,则(35.19)与(35.20)所示 Winner-Khintchine 公式变为

$$
\begin{cases}
\varphi_x(\tau) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g_x(\omega)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega, \\
g_x(\omega) = \varphi_x(0) + 2\displaystyle\sum_{\tau=1}^{+\infty}\varphi_x(\tau)\cos\omega\tau.
\end{cases}
\tag{35.21}
$$

注 35.4.2 (1) 对拟平稳过程 $x(t)$ 或序列 $\{x(k)\}$，其谱与谱密度的定义与上述相同，其结果也与上述相同.

(2) 当 $x(t)$ 或 $\{x(k)\}$ 均值不为零时，35.3 节及 35.4 节中结论仍然成立，只是 $\varphi_x(\tau)$ 一般不称为自协方差函数.

35.5 向量随机序列的谱

定义 35.5.1 设随机序列 $\{\boldsymbol{x}(k) \mid \boldsymbol{x}(k) \in \mathbb{R}^p, k = 1,2,\cdots\}$ 的各分量 $x_1(k),\cdots,x_p(k)$ 具有同一分布，且协方差阵

$$
\Phi(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\},
$$

对任意整数 $t \neq s$ 均为零，则称 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 为**独立同分布的随机序列**(independent and identically distributed sequence) 简称 i. i. d.

定义 35.5.2 设零均值平稳向量序列 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 的自协方差阵为 $\boldsymbol{\Phi}(\tau)$，则

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{G}(\omega) = \displaystyle\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\Phi}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}, \\
\boldsymbol{\Phi}(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega,
\end{cases}
\quad -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi.
\tag{35.22}
$$

$\boldsymbol{G}(\omega)$ 称为 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 的**谱密度矩阵**(spectral density matrix).

谱密度矩阵的性质

(1) $\boldsymbol{G}(-\omega) = \overline{\boldsymbol{G}(\omega)}$;

(2) $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\omega) = \boldsymbol{G}(\omega)$;

(3) $\boldsymbol{G}(-\omega) + \boldsymbol{G}(\omega) \geqslant 0$.

35.6 白噪声

白噪声是一种理想化的随机数学模型,然而在现实中确有许多"干扰"、"偏差"、"误差"之类的物理现象可以近似看作白噪声.白噪声的定义,在许多文献资料中常有不同,以下给出3种有代表性的定义,其中定义35.6.1是一种较"弱"的定义,更具一般性,而定义35.6.2和定义35.6.3则是最常见的情形.以后凡无特别声明,均指定义35.6.2或其等价性定义35.6.3.

定义 35.6.1 一个向量随机序列$\{\boldsymbol{x}(k)\}$称为**白噪声**(white noise)**序列**,如果对任意自然数τ存在一个非负定阵$\boldsymbol{\Sigma}(\tau)$,使得$\boldsymbol{x}(k)$的自协方差阵$\boldsymbol{\Phi}_x(\tau,s)$满足

$$\boldsymbol{\Phi}_x(\tau,s)=\boldsymbol{\Sigma}(\tau)\delta(\tau-s).$$

定义 35.6.2 若平稳向量序列$\{\boldsymbol{x}(k)\}$的谱密度阵恒为常数矩阵,即

$$\boldsymbol{G}_x(\omega)=\boldsymbol{G},\qquad \forall\,\omega,$$

则称$\{\boldsymbol{x}(k)\}$为**白噪声序列**,简称**白噪声**.

定义 35.6.3 若平稳向量序列$\{\boldsymbol{x}(k)\}$的自协方差阵可以表示为

$$\boldsymbol{\Phi}_x(\tau)=\boldsymbol{\Sigma}\delta(\tau),$$

则称$\{\boldsymbol{x}(k)\}$为白噪声.其中$\boldsymbol{\Sigma}$正定阵,特别地,称$\boldsymbol{\Phi}_x(0)=\boldsymbol{\Sigma}$为$\{\boldsymbol{x}(k)\}$的**方差阵**,$\mathrm{E}\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{0}$时,称$\{\boldsymbol{x}(k)\}$为**零均值白噪声**.

注 35.6.4 对于连续时间平稳信号$\boldsymbol{x}(t)$,若像定义35.6.1那样认为$\boldsymbol{x}(t)$为白噪声时,则其方差阵不存在,因为(假设$\mathrm{E}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{0}$)$\boldsymbol{f}(\omega)=\boldsymbol{f}$为常数矩阵,

$$\boldsymbol{\Phi}(0)=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\omega)\mathrm{d}\omega=\infty.$$

此时,可以把白噪声设想为一类平稳过程的极限.取一维平稳过程

$x_\rho(t)$，其谱密度和协方差函数为

$$f_\rho(\omega)=\frac{2\sigma^2}{1+(\omega/\rho)^2},$$

$$\varphi_\rho(\tau)=\rho\sigma^2\mathrm{e}^{-\rho|\tau|},\qquad \rho>0,$$

则当 $\rho\to\infty$ 时，$x_\rho(t)$ 的极限状态设想为白噪声.

35.7 例

有理谱的例 设零均值平稳过程 $x(t)$ 的谱密度为

$$f_x(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9},$$

求自协方差函数 $\varphi_x(\tau)$.

解 $\varphi_x(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+9}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.$

利用留数定理可算得

$$\varphi_x(\tau)=\frac{1}{48}(9\mathrm{e}^{-|\tau|}+5\mathrm{e}^{-3|\tau|}).$$

δ-函数的谱 由 δ-函数性质定义 33.2.1 及 $\varphi_x(\tau)$，$f_x(\omega)$ 的关系式(35.16)，(35.17)，可知，当 $\varphi_x(\tau)=\delta(\tau)$ 时，$f_x(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=1$，即协方差函数为 $\delta(\tau)$ 的平稳信号的谱密度为常数. 这个结论表明白噪声的定义 35.6.1 与定义 35.6.2 等价.

另一方面，若 $f_x(\omega)=2\pi\delta(\omega)$，可以得到 $\varphi_x(\tau)=1$，这是平稳过程退化为随机变量的结果.

具有正弦型自协方差函数的信号的谱 若 $\varphi_x(\tau)=a\cos\omega_0\tau$，则

$$f_x(\omega)=a\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)],$$

即具有常数或正弦型自协方差函数的信号，其谱均为**离散型**.

部分平稳信号的自协方差函数与谱密度对照表(见表 35.1).

表　35.1

	$\varphi_x(\tau)$	$g_x(\omega)$
1	1, $e^{-\alpha\|\tau\|}$, O, τ	$2/\alpha$, $\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$, O, ω
2	1, $-T$, O, T, τ	T, $\frac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}$, O, $2\pi/T$, ω
3	$e^{-\alpha\|\tau\|}\cos\omega_0\tau$, O, τ	$1/\alpha$, $-\omega_0$, O, ω_0, ω
4	$\frac{\omega_0}{\pi}$, $\frac{\pi}{\omega_0}$, $\frac{\sin\omega_0\tau}{\pi\tau}$, O, τ	1, $-\omega_0$, O, ω_0, ω
5	1, O, τ	2π, O, ω
6	1, O, τ	1, O, ω
7	$\cos\omega_0\tau$, O, τ	π, $-\omega_0$, O, ω_0, ω

35.8 连续线性系统对随机输入的响应

函数卷积的几种形式

(1) $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 卷积的一般形式为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

(2) 若 $t<0$ 时，$f_1(t)=f_2(t)=0$，则

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

(3) 若 $t<0$ 时，$f_1(t)=0$，则

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

考虑连续定常线性系统 S，若传递函数 $H(s)$ 在 S 平面的 $S=\{s \mid \mathrm{Re}s \geqslant 0\}$ 上处处解析，即该系统的脉冲响应函数 $h(t)=\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\}$ 绝对可积，且 $t<0$ 时，$h(t)=0$，则系统的输出可表示为(设 $u(t)$ 为输入信号)

$$y(t) = \int_0^{-\infty} h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{35.23}$$

$h(t)$ 的 Fourier 变换记为

$$H(\mathrm{i}\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t. \tag{35.24}$$

$H(\mathrm{i}\omega)$ 称为系统 S 的**频率响应函数**(frequency response function).

定义 35.8.1 当 $\boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau)$ 绝对可积时，两个零均值平稳过程 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{y}(t)$ 的**互谱密度**(cross spectral density) 定义为

$$\boldsymbol{f}_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau,$$

并且与 $\boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau)$ 构成 Fourier 变换对

$$\boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}_{xy}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.$$

输入输出模型的情形 设系统 S 的传递函数为 $H(s)$，脉冲响应函数 $h(t)$ 绝对可积. 若输入 $u(t)$ 为平稳过程，且 $\mathrm{E}u(t)=\mu_u$，则

(1) 输出 $y(t)$ 亦为平稳过程，且

$$\mathrm{E}y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_y = \mu_u \int_0^{+\infty} h(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{35.25}$$

(2) $y(t)$ 的二阶矩为

$$\begin{aligned}\varphi_y(\tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{y(t)y(t-\tau)\} \\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}\tau_1 \int_0^{+\infty} \varphi_u(\tau_2-\tau_1-\tau)h(\tau_1)h(\tau_2)\mathrm{d}\tau_2.\end{aligned} \tag{35.26}$$

特别地，$y(t)$ 的方差为

$$Dy(t) = \varphi_y(0) - \mu_y^2. \tag{35.27}$$

(3) $y(t)$ 的谱密度为

$$f_y(\omega) = | H(\mathrm{i}\omega) |^2 f_u(\omega), \tag{35.28}$$

其中 $\varphi_u(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{u(t)u(t-\tau)\}$ 为 $u(t)$ 的协方差函数，$f_u(\omega)$ 为其谱密度.

(4) 输出输入互协方差函数为

$$\varphi_{y_u}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\{y(t)u(t-\tau)\} = \int_0^{+\infty} \varphi_u(\tau-t)h(t)\mathrm{d}t. \tag{35.29}$$

(5) 输出输入互谱密度为

$$f_{yu}(\omega) = H(\mathrm{i}\omega)f_u(\omega).$$

上述结果均可进一步扩充为多变量输入输出模型描述的连续线性系统.

状态空间模型的情形 设 $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbb{R}^r$ 为零均值平稳不相关增量过程，$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{\eta}(t)$ 的增量协方差阵为

$$\mathrm{E}\{\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\Sigma}.$$

取多变量连续随机模型为

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(t), \\
\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t).
\end{cases} \tag{35.30}
$$

则输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 可用下列随机积分表示

$$
\boldsymbol{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(t-\tau), \tag{35.31}
$$

其中 $\boldsymbol{H}(\tau)$ 为脉冲响应矩阵，定义为

$$
\boldsymbol{H}(\tau) = \begin{cases}
\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{K}, & \tau \geqslant 0, \\
\boldsymbol{0}, & \tau < 0.
\end{cases} \tag{35.32}
$$

输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 的谱密度为

$$
f_y(\omega) = \boldsymbol{G}(\mathrm{i}\omega)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{G}^*(\mathrm{i}\omega), \tag{35.33}
$$

其中 $\boldsymbol{G}(s)$ 为传递函数矩阵，即

$$
\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{K} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{H}(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{35.34}
$$

35.9 离散线性系统对随机输入的响应

定义 35.9.1 当两个零均值向量平稳序列 $\{\boldsymbol{x}(k)\}$ 和 $\{\boldsymbol{y}(k)\}$ 的互协方差函数 $\boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau)$ 满足

$$
\sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \| \boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau) \| < \infty
$$

时，其**互谱密度**定义为

$$
\boldsymbol{g}_{xy}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}, \tag{35.35}
$$

并且与 $\boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau)$ 构成 Fourier 变换对

$$
\boldsymbol{\Phi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \boldsymbol{g}_{xy}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.
$$

输入输出模型的情形

(1) 设稳定离散线性时不变系统模型为

$$
\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{H}(z)\boldsymbol{w}(k), \tag{35.36}
$$

其中$\{\boldsymbol{w}(k)\}$是具有谱$\boldsymbol{g}_w(\omega)$的平稳向量序列，$\boldsymbol{H}(z)$为$m\times r$脉冲传递函数阵，则输出$\boldsymbol{y}(k)$亦为平稳序列，且

$$\boldsymbol{g}_y(\omega)=\boldsymbol{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})\boldsymbol{g}_w(\omega)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}),\tag{35.37}$$

$$\boldsymbol{g}_{yw}(\omega)=\boldsymbol{H}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})\boldsymbol{g}_w(\omega).\tag{35.38}$$

特别当(35.36)为单输入单输出系统时有

$$\begin{cases}g_y(\omega)=|H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2g_w(\omega),\\ \varphi_y(k)=\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}h(m)h(l)\varphi_x(k-(m-l)).\end{cases}\tag{35.39}$$

又当$w(k)$为零均值，方差为σ^2的白噪声时，$\{y(k)\}$为零均值平稳序列，且

$$\begin{cases}g_y(\omega)=\sigma^2|H(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2,\\ \varphi_y(k)=\sigma^2\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}h(k+l)h(l).\end{cases}\tag{35.40}$$

(2) 设稳定离散随机模型为

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{H}_1(z^{-1})\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{H}_2(z^{-1})\boldsymbol{e}(k),$$

其中$\boldsymbol{H}_1(z^{-1}),\boldsymbol{H}_2(z^{-1})$均为适当维数的脉冲传递函数矩阵，$\{\boldsymbol{u}(k)\}$为拟平稳的确定性信号，$\{\boldsymbol{e}(k)\}$是方差阵为$\boldsymbol{\Sigma}$的白噪声，则$\boldsymbol{y}(k)$也是拟平稳的，且

$$\boldsymbol{g}_y(\omega)=\boldsymbol{H}_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})\boldsymbol{g}_u(\omega)\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})+\boldsymbol{H}_2(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}),\tag{35.41}$$

$$\boldsymbol{g}_{yu}(\omega)=\boldsymbol{H}_1(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})\boldsymbol{g}_u(\omega).\tag{35.42}$$

状态空间模型的情形　考虑随机输入下的状态空间模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{\eta}(k),\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k),\end{cases}$$

其中$\boldsymbol{A}(k)\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{K}(k)\in\mathbb{R}^{n\times r}$，$\boldsymbol{C}(k)\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\{\boldsymbol{\eta}(k)\}$为定义35.6.1意义下的零均值白噪声，其方差阵为$\boldsymbol{\Sigma}(k)$，并且$\{\boldsymbol{\eta}(k)\}$与初始状态$\boldsymbol{x}(0)$独立，并记$\boldsymbol{\Phi}(k_1,k_2)$为系统的状态转移阵，以$\boldsymbol{R}$表示协方差函数阵，$\boldsymbol{\sigma}^2$表示方差函数阵，则可得递推公式如下：

(1) $\mathrm{E}\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k,0)\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)$.

(2) $\mathrm{E}\{\boldsymbol{\eta}(l)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\}=\mathbf{0}\ \ (0\leqslant k\leqslant l)$.

(3) $$\boldsymbol{\sigma}_x^2(k)=\boldsymbol{A}(k-1)\boldsymbol{\sigma}_x^2(k-1)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(k-1)+\boldsymbol{B}(k-1)\boldsymbol{\Sigma}(k-1)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(k-1),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_x^2(0)=\mathrm{E}\{[\boldsymbol{x}(0)-\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)][\boldsymbol{x}(0)-\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)]^{\mathrm{T}}\}(\text{初值}).$$

(4) $\boldsymbol{R}_{\tilde{x}}(k_1,k_2)=\boldsymbol{\Phi}(k_1,k_2)\boldsymbol{\sigma}_x^2(k_2)(0\leqslant k_2<k_1)$,

其中 $\tilde{x}(k)=\boldsymbol{\Phi}(k,0)[\boldsymbol{x}(0)-\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)]+\sum\limits_{j=0}^{k-1}\boldsymbol{\Phi}(k,j+1)\boldsymbol{B}(j)\boldsymbol{\eta}(j)$.

(5) $\mathrm{E}\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}(k)\mathrm{E}\boldsymbol{x}(k)$.

(6) $\boldsymbol{R}_y(k_1,k_2)=\boldsymbol{C}(k_1)\boldsymbol{R}_{\tilde{x}}(k_1,k_2)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(k_2)$.

(7) $\boldsymbol{R}_{yx}(k_1,k_2)=\boldsymbol{C}(k_1)\boldsymbol{R}_{\tilde{x}}(k_1,k_2)$.

35.10 应用

例 35.10.1 考虑白噪声电压$\{u(t)\}$输入下的 RC 电路问题. 设时间常数 $T=RC$, R,C 分别表示电阻和电容,以 $y(t)$ 为输出电压的系统传递函数为

$$H(s)=\frac{RC}{s+RC}=\frac{1}{Ts+1}.$$

若已知 $\varphi_u(\tau)=s_0\delta(\tau)$,求 $\varphi_y(\tau)$ 及 $\varphi_y(0)$,并求出使输出 $y(t)$ 的均方差不超过 50mV 的最小时间常数 T(给定 $s_0=2\times10^{-6}\mathrm{V}^2\cdot\mathrm{s}$).

解 由 $\varphi_u(\tau)=s_0\delta(\tau)$,查表可知 $f_u(\omega)=s_0(\mathrm{V}^2\cdot\mathrm{s})$ 频率响应函数为

$$H(\mathrm{i}\omega)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega T+1},\quad |H(\mathrm{i}\omega)|^2=\frac{1}{T^2\omega^2+1},$$

$$f_y(\omega)=|H(\mathrm{i}\omega)|^2f_u(\omega)=\frac{s_0}{T^2\omega^2+1}$$

$$=\frac{T}{2}\frac{s_0}{T^2}\frac{2/T}{\omega^2+(1/T)^2}.$$

查表得到 $\varphi_y(\tau)=\frac{s_0}{2T}e^{-\frac{1}{T}|\tau|}$，$\varphi_y(0)=\frac{s_0}{2T}(V^2)$. 由输出均方差不超过 50mV，则应有

$$\varphi_y(0)=\sigma_y^2=25\times10^{-4}(V^2).$$

最后得最小时间常数为

$$T=\frac{s_0}{2\varphi_y(0)}=\frac{2\times10^{-6}}{2\times25\times10^{-4}}=10^{-4}(s),$$

即 $t\geqslant T=10^{-4}$s 时，输出 $y(t)$ 的均方差不超过 50mV.

例 35.10.2 考虑低通滤波器系统的脉冲响应函数为

$$h(k)=\begin{cases}0, & k<0,\\ e^{-dk}, & k\geqslant 0.\end{cases}$$

设输入信号 $u(k)$ 是零均值白噪声序列，自协方差函数为

$$\varphi_u(k)=\begin{cases}\dfrac{N_0}{2}, & k=0,\\ 0, & k\neq 0.\end{cases}$$

求输出 $y(k)$ 的均值和自协方差函数.

解 (1) 显然 $Ey(k)=0$.

(2) $H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\alpha k}z^{-k}=\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}-z^{-1}}$,

$$g_u(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_u(k)e^{-i\omega k}=\frac{N_0}{2},$$

$$g_y(\omega)=|H(e^{i\omega})|^2g_u(\omega)=\left.\frac{e^{2\alpha}N_0}{2(e^{\alpha}-z^{-1})(e^{\alpha}-z)}\right|_{z=e^{i\omega}},$$

$$\varphi_y(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{2\alpha}N_0e^{ik\omega}}{2(e^{\alpha}-e^{-i\omega})(e^{\alpha}-e^{i\omega})}d\omega.$$

取变换 $z=e^{i\omega}(-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi)$，则有

$$\varphi_y(k)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^{2\alpha}N_0z^{k-1}}{2(e^{\alpha}-z^{-1})(e^{\alpha}-z)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{e^{2\alpha}N_0z^{k}}{2(e^{\alpha}z-1)(e^{\alpha}-z)}dz.$$

上述积分恰为被积函数的 Z 反变换，即有

$$\begin{aligned}\varphi_y(k) &= \mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{2aN_0 z^k}{2(\mathrm{e}^a z-1)(\mathrm{e}^a - z)}\right\} \\ &= \mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\frac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{2a}-1}\left[\frac{z}{\mathrm{e}^a - z}+\frac{1}{\mathrm{e}^a - z^{-1}}\right]\right\} \\ &= \mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\frac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{2a}-1}\left[\sum_{k=-\infty}^{1}\mathrm{e}^{ak}z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-ak}z^{-k}\right]\right\} \\ &= \mathscr{Z}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\frac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{2a}-1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-a|k|}z^{-k}\right\} \\ &= \frac{N_0}{2}\frac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{2a}-1}\mathrm{e}^{-a|k|}, \qquad k = 0, \pm 1, \cdots.\end{aligned}$$

35.11 持续激励信号、采样定理与遍历性

持续激励信号与采样定理是系统分析中实验设计的两个重要问题，本节给出这些内容的主要结果.

定义 35.11.1 设 $\{u(k)\}$ 为拟平稳信号，谱密度为 $g_u(\omega)$. 若对一切形如

$$B_n(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}$$

的位移算子多项式，均可由

$$|B_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})|^2 g_u(\omega) \equiv 0,$$

推得

$$B_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}) \equiv 0,$$

则称 $\{u(k)\}$ 为 ***n* 阶持续激励信号**(persistence of excitation). 这一定义与下面定义 35.11.2 等价.

定义 35.11.2 若拟平稳信号 $\{u(k)\}$ 的谱 $g_u(\omega)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上至少有 n 个点上不为零，则称 $\{u(k)\}$ 为 ***n* 阶持续激励信号**.

定理 35.11.3 设 $\{u(k)\}$ 是一个拟平稳信号，定义如下 $n\times n$ 矩阵 $\overline{\boldsymbol{\Phi}}_n$

$$\overline{\boldsymbol{\Phi}}_n = \begin{pmatrix} \Phi_u(0) & \Phi_u(1) & \cdots & \Phi_u(n-1) \\ \Phi_u(1) & \Phi_u(0) & \cdots & \Phi_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_u(n-1) & \Phi_u(n-2) & \cdots & \Phi_u(0) \end{pmatrix},$$

其中 $\Phi_u(\tau)(\tau=0,\cdots,n-1)$ 为 $\{u(k)\}$ 的二阶矩(见定义 35.1.1). 则 $\{u(k)\}$ 为 n 阶持续激励的充要条件是 $\overline{\boldsymbol{\Phi}}_n$ 非奇异.

定义 35.11.4 设 $\{u(k)\}$ 是一个具有谱 $g_u(\omega)$ 的拟平稳信号,若对任意的 ω 均有 $g_u(\omega)>0$,则称 $\{u(k)\}$ 为无限阶持续激励信号.

本定义是定义 35.11.1 与定义 35.11.2 的加强形式.

定理 35.11.5 采样定理(sampling theorem) 设平稳过程 $\boldsymbol{x}(t)$ 是均方连续的,那么

$$\lim_{t\to t_0}\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t_0)\| = 0, \qquad \forall t_0 \in T,$$

并且 $\boldsymbol{x}(t)$ 的谱函数 $F(\omega)$ 满足

$$\int_{|\omega|\geqslant 2\pi\omega_0} \mathrm{d}F(\omega) = 0,$$

其中 ω_0 为 $\boldsymbol{x}(t)$ 频谱中频率的上界,记采样区间长度 $T=\dfrac{1}{2\omega_0}$,则有

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x}(kT)\,\frac{\sin\dfrac{\pi}{T}(t-kT)}{\dfrac{\pi}{T}(t-kT)}. \tag{35.43}$$

采样定理的意义在于,对于一个连续平稳信号,其频谱中最高频率小于 ω_0 时,取采样周期 $\Delta=\dfrac{1}{2\omega_0}$,即可保证采样离散值 $\{\boldsymbol{x}(k\Delta)\}$ 按(35.43)意义恢复 $\boldsymbol{x}(t)$.

定义 35.11.6 设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是一平稳过程,而 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 是某一给定的函数,如果对于使 $\mathrm{E}V(\boldsymbol{x}(t))$ 存在的 $V(\cdot)$ 及 $\forall\varepsilon>0$,满足

$$\lim_{N\to\infty} p\left\{\left\| \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V(\boldsymbol{x}(t+j)) - \mathrm{E}V(\boldsymbol{x}(t)) \right\| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (35.44)$$

或记为

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V(\boldsymbol{x}(t+j)) \xrightarrow{\text{a. s.}} \mathrm{E}V(\boldsymbol{x}(t)), \qquad N\to\infty, \ (35.45)$$

则称 $\boldsymbol{x}(t)$ 对 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 具有**遍历性**(ergodic property).

定理 35.11.7 均值遍历性定理 均方连续的平稳过程 $\boldsymbol{x}(t)$ 对其均值函数 $\boldsymbol{\mu}_x = \mathrm{E}\boldsymbol{x}(t)$ 具有遍历性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}\left\| \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t - \boldsymbol{\mu}_x \right\|^2 = 0,$$

或

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\boldsymbol{\Phi}_x(\tau)\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{\mu}_x^2,$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_x(\tau)$ 为 $\boldsymbol{x}(t)$ 的二阶矩阵(定义 35.1.1).

定理 35.11.8 自协方差遍历性定理 均方连续的平稳过程 $\boldsymbol{x}(t)$ 对其自协方差函数具有遍历性的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{u}{T}\right)(\boldsymbol{\Phi}_x(u,\tau) - \boldsymbol{\Phi}_x^2(\tau))\mathrm{d}u = \boldsymbol{0},$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_x(u,\tau)$ 为 $\boldsymbol{x}(t)$ 的四阶矩

$$\boldsymbol{\Phi}_x(u,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left\{[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+\tau)][\boldsymbol{x}(t+u)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t+u+\tau)]\right\}.$$

35.12 伪随机信号

由于白噪声是物理上难于实现的、理想化的数学模型,因而,用伪随机信号去逼近白噪声便成为实验设计中的重要手段. 本节对最常用的几种伪随机信号,给出主要结果.

35.12.1 [0,1] 均匀分布的伪随机数

[0,1] 均匀分布的伪随机数(序列)(pseudo-random number)

有以下两种模型.

(1) 乘同余模型

$$\begin{cases} x(i) = \operatorname{mod}(Ax(i-1), M), \\ \xi(i) = \dfrac{x(i)}{M}, \end{cases}$$

或等价地

$$\begin{cases} \xi(k) = A\xi(k-1) - [A\xi(k-1)], \\ \xi(0) = \dfrac{x(0)}{M}. \end{cases} \tag{35.46}$$

其中 $M = 2^k (k > 2)$, A 满足 $\operatorname{mod}(A, 8) = 3$ 或 5, $x(0)$ 为小于 M 的奇数, 当 k 足够大时, $\{\xi(k)\}$ 是周期 $p = 2^{k-2}$ 的 $[0,1]$ 均匀分布的伪随机数. 参数推荐: $A > 170$, $k > 30$, $x(0) \geqslant 9$.

(2) 混合同余模型

$$\begin{cases} x(k) = \operatorname{mod}(Ax(k-1) + C, M), \\ \xi(k) = \dfrac{x(k)}{M}, \end{cases} \tag{35.47}$$

其中 C 为整数, $A = 2^n + 1 (2 \leqslant n \leqslant 34)$, $M = 2^k (k > 2)$. 参数推荐: $C = 1$, $n \geqslant 7$, $k > 30$, $\{\xi(k)\}$ 是周期 $p = 2^k$ 的 $[0,1]$ 均匀分布的伪随机数.

35.12.2 正态分布的伪随机数

(1) 数据压缩变换

设 $\{\xi(k)\}$ 为 $[0,1]$ 均匀分布的伪随机数, 则

$$\mathrm{E}\xi(k) = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{var}\xi(k) = \frac{1}{12} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_\xi^2.$$

取

$$x_N(k) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \xi(N(k-1)+i) - N\mathrm{E}\xi(k)}{\sqrt{N\sigma_\xi^2}}, \tag{35.48}$$

则

$$x_N(k) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{law}} x(k) \sim N(0,1).$$

计算公式

$$x_N(k) = 2\sqrt{\frac{3}{N}}\sum_{i=1}^{N}\xi(N(k-1)+i) - \sqrt{3N}.$$

参数推荐：$N \geqslant 12$ 时$\{x_N(k)\}$可近似认为标准正态分布的序列.

如欲生成服从 $N(\mu_\eta,\sigma_\eta^2)$ 的序列 $\eta(k)$，则有公式

$$\eta(k) = \mu_\eta + \sigma_\eta x(k). \tag{35.49}$$

(2) 代数变换法

$\{\xi_1,(k)\}$，$\{\xi_2(k)\}$ 为互相独立的$[0,1]$均匀分布的序列. 取变换

$$\begin{cases}\eta_1(k) = \sqrt{-2\ln\xi_1(k)}\cos 2\pi\xi_2(k),\\ \eta_2(k) = \sqrt{-2\ln\xi_1(k)}\sin 2\pi\xi_2(k),\end{cases} \tag{35.50}$$

则$\{\eta_1(k)\}$，$\{\eta_2(k)\}$为互相独立的标准正态分布的序列，即 $\eta_1(k) \sim N(0,1)$，$\eta_2(k) \sim N(0,1)$.

伪随机二进制序列(pseudo-random binary sequence，PRBS)

设取值 0，1 的二元序列$\{x(k)\}$的元素由下式定义

$$x(k) = \sum_{j=1}^{p}\!{}^{\oplus}\, a_j x(k-j), \tag{35.51}$$

其中 $\oplus$ 表示模 2 加法，$\sum^{\oplus}$ 表示模 2 加法求和，$a_j(j=1,\cdots)$ 取值为 1 或 0，$a_p \equiv 1$，p 为给定的正整数，对于一组给定的$\{a_j\}$，$\{x(k)\}$将是周期序列，用能使周期达到最大的一组 $a_1,\cdots,a_{p-1},a_p=1$ 确定的序列$\{x(k)\}$称为**伪随机二进制序列**亦称为 p 阶 M 序列(M sequence)，并且这个最大周期为

$$N_p = 2^p - 1. \tag{35.52}$$

N_p 称为 M 序列$\{x(k)\}$的周期，即对$\{x(k)\}$有

$$x(N_p+k) = x(k), \qquad 1 \leqslant k \leqslant N_p.$$

对形如(35.51)的二进制序列$\{x(k)\}$(不一定是M序列),可以用$x(k)$为系数的**无穷阶模2加多项式**表示如下:

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus}\, x(k)s^k, \tag{35.53}$$

其中s^k表示$x(k)$在二进制数$G(s)$中的位数,规定$s^0 = 1$.

以p个值$(1,0,\cdots,0)$为一段初值的二进制序列$\{x(k)\}$成为M序列的充要条件是$G(s)$满足

$$G(s) = \frac{1}{F(s)}, \tag{35.54}$$

$$F(s) \overset{\text{def}}{=} 1 \oplus \sum_{k=1}^{p}{}^{\oplus}\, a_k s^k, \tag{35.55}$$

其中$a_1,\cdots,a_{p-1},a_p \equiv 1$为确定形如(35.51)的$\{x(k)\}$为$M$序列的$p$个系数.$F(s)$称为$M$序列$\{x(k)\}$的**特征多项式**.

$F(s)$的性质:

(1) 如$F(s)$是特征多项式,则$F(s)$必为既约多项式.

(2) $F(s)$为$\{x(k)\}$特征多项式的充要条件是$F(s)$为$s^{N_p} \oplus 1$的一个因子.

例 35.12.1 设$p = 4, F(s) = 1 \oplus s^3 \oplus s^4$,写出对应的$M$序列$\{x(k)\}$的两个周期.

解 本例为一个4阶M序列,且$a_1 = a_2 = 0, a_3 = a_4 = 1$,周期为$N_p = 2^4 - 1 = 15$.由(35.51)可得$\{x(k)\}$的表达式为

$$x(k) = x(k-4) \oplus x(k-3), \qquad k = 5,6,\cdots,$$

$$x(1) = 1, \quad x(2) = 0, \quad x(3) = 0, \quad x(4) = 0.$$

据以上表达式和初值,$\{x(k)\}$的两个周期为

1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1

1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1.

另外,据(35.55)由多项式除法得到

$$G(s) = 1 \oplus s^3 \oplus s^4 \oplus s^6 \oplus s^8 \oplus s^9 \oplus s^{10} \oplus s^{11} \oplus s^{15} + \cdots.$$

按 $G(s)$ 结构,可直接写出 $\{x(k)\}$ 的两个周期为

$$1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$$

$$1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0$$

这与用通项表达式(35.51)所得结果属同一 M 序列.在上面 $G(s)$ 表达式中第一项 1 视为 $1 \cdot s^0$,表示从第 0 位取 1 开始.

当 $F(s)$ 为 $\{x(k)\}$ 的特征多项式时,由(35.55)所确定的 $\{x(k)\}$ 是惟一的,且具有初值

$$x(1) = 1, \qquad x(2) = \cdots = x(p-1) = x(p) = 0.$$

p 阶 M 序列的生成模型可以由 p 个串联的双稳态触发器构成的线性反馈移位寄存器实现,只要合理设置反馈通道,则其输出序列为一个 M 序列.(35.54)定义的 $F(s)$ 中的 $a_k(k = 1,\cdots,p)$ 即代表通道号,$a_k = 1$ 时,表示第 k 级取为反馈,$a_k = 0$ 时,表示第 k 级不作为反馈.

M 序列的性质

(1) 在 $\{x(k)\}$ 的 N_p 个状态中,记 $N_0 = x(k)$ 取"0"的总数,$N_1 = x(k)$ 取"1"的总数,则

$$N_0 = \frac{1}{2}(N_p - 1), \qquad N_1 = \frac{1}{2}(N_p + 1).$$

(2) $\{x(k)\}$ 取值不变的一段长度称为**游程**,游程总数为 2^{p-1},0,1 游程各有 2^{p-2} 个.

(3) $\{x(k)\}$ 的移位序列与 $\{x(k)\}$ 按对应序号模 2 加所得序列仍为 M 序列.

(4) 设 $a > 0$,取变换

$$M(k) = 2a(x(k) - 0.5), \qquad (35.56)$$

则 $\{M(k)\}$ 为初值 $\pm a$ 的序列,称 $M(k)$ 为幅度等于 a 的零均值 M 序列.

(5) M 序列 $\{x(k)\}$ 的自协方差函数 $\varphi(\tau)$ 和自相关函数 $R(\tau)$ 按以下定义:

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t,$$

$$R(\tau) = \varphi(\tau)/\varphi(0),$$

其中 $x(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(k)(k \leqslant t < k+1)$，$\{x(k)\}$ 为零均值，幅度为 a 的 M 序列，周期记为 $T = N$ 他 $WB\Delta t$，$N = N_p = 2^p - 1$，则

$$R(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau = 0, \\ 1 - \dfrac{N+1}{N}\dfrac{\tau}{\Delta t}, & 0 < \tau < \Delta t, \\ -\dfrac{1}{N}, & \Delta t \leqslant \tau \leqslant (N+1)\Delta t, \\ 1 - \dfrac{N+1}{N}\dfrac{N\Delta t - \tau}{\Delta t}, & (N-1)\Delta t < \tau \leqslant N\Delta t. \end{cases} \tag{35.57}$$

逆 M 序列(inverse M sequence)

设 $\{x(k)\}$ 为取值 0,1 的 M 序列，周期为 N_p，取 $2N_p$ 长度的 $\{x(k) \mid k = 1, \cdots, 2N_p\}$ 与(0,1)序列进行模 2 加法，所生成的序列记为 $M(k)$，即

$$\begin{cases} M(2k-1) = \mathrm{mod}(x(2k-1)+1, 2), \\ M(2k) = \mathrm{mod}(x(2k)+0, 2), \\ \qquad k = 1, 2, \cdots, 2N_p, \end{cases} \tag{35.58}$$

则称 $\{M(k)\}$ 为**逆 M 序列**.

M 序列与逆 M 序列的对比

(1) 当 N_p 足够大时(即 p 足够大)，两者的自相关函数都近似为 $\delta(\tau)$.

(2) M 序列的谱中，$f_x(0) = \dfrac{2\pi a^2}{N^2}$，即 $\{x(k)\}$ 含有“直流”成分，其中 $\{x(k)\}$ 为取值 $(-a, a)$ 的 M 序列. 而对取值为 $(-a, a)$ 的逆 M 序列 $\{M(k)\}$，其谱中 $f_M(0) = 0$，不再含有直流成分.

表 35.2　3～8 阶 M 序列特征多项式代码表

$p=3$	$p=7$	$p=8$
(3,1,0)	(7,1,0)	(8,7,2,1,0)
(3,2,0)	(7,6,0)	(8,7,6,1,0)
$p=4$	(7,3,0)	(8,5,3,1,0)
(4,1,0)	(7,4,0)	(8,7,5,3,0)
(4,3,0)	(7,3,2,1,0)	(8,4,3,2,0)
$p=5$	(7,6,5,4,0)	(8,6,5,4,0)
(5,2,0)	(7,5,2,1,0)	(8,5,3,2,0)
(5,3,0)	(7,6,5,2,0)	(8,6,5,3,0)
(5,3,2,1,0)	(7,4,3,2,0)	(8,6,3,2,0)
(5,4,3,2,0)	(7,5,4,3,0)	(8,6,5,2,0)
(5,4,2,1,0)	(7,5,3,1,0)	(8,7,3,2,0)
(5,4,3,1,0)	(7,6,4,2,0)	(8,6,5,1,0)
$p=6$	(7,6,3,1,0)	(8,6,4,3,2,1,0)
(6,1,0)	(7,6,4,1,0)	(8,7,6,5,4,2,0)
(6,5,0)	(7,6,5,4,3,2,0)	(8,7,6,3,2,1,0)
(6,5,2,1,0)	(7,5,4,3,2,1,0)	(8,7,6,5,2,1,0)
(6,5,4,1,0)	(7,6,5,4,2,1,0)	
(6,4,3,1,0)	(7,6,5,3,2,1,0)	
(6,5,3,2,0)		

查表确定特征多项式示例(利用表 35.2)

(1) $p=4$，(4,1,0)，则 $F(s)=1\oplus s\oplus s^4$；

(2) $p=6$，(6,5,0)，则 $F(s)=1\oplus s^5\oplus s^6$.

系 统 辨 识

36 离散线性系统辨识的常用算法

36.1 引言

一个动态系统的组成由其内部结构完全确定,而系统的表现则由其内部结构所决定.所谓表现,是指在确定的或随机的外部条件(输入)下的动态响应,这种动态响应又称为系统的输出.

许多系统往往是机理不清楚或是不甚清楚,或是机理清楚而参数未知,对这类动态系统建立其数学模型,便是系统辨识(system identification)的目的.系统辨识的思想与方法之起源并非近年,但形成一套完整的、系统的理论和方法却在 20 世纪 70—80 年代,主要是计算机的发展与普及,使得这一领域的理论与方法的实践成为可能,并广泛应用于工业、军事及经济等领域.

从应用数学的角度来说,系统辨识是运用统计方法处理微分方程与差方方程的反问题,大多涉及一些交叉学科.从计算机应用角度来说,系统辨识又是一门数据处理技术.本卷 36～40 章给出有关系统辨识、动态建模及预报的基本结果.

36.2 LS 及其病态算法

定义 36.2.1 LS 的基本格式(basic scheme of LS).

模型

$$y(k+n)+\sum_{i=1}^{n}a_i y(k+n-i)=\sum_{i=1}^{m}b_i u(k+n-i)+\varepsilon(k+n),$$

(36.1)

其中 $a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $\{\varepsilon(k)\}$为零均值白噪声,方差为 σ^2, $\{u(k)\}$为与 $\{\varepsilon(k)\}$不相关的拟平稳信号(一般应为持续激励),记号

$$\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}=\big(-y(k+n-1),-y(k+n-2),\cdots,-y(k),$$

$$u(k+n-1),u(k+n-2),\cdots,u(k+n-m)\big),$$

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m),\qquad n\geqslant m.$$

模型(36.1)等价于模型

$$y(k+n)=\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}+\varepsilon(k+n).\tag{36.2}$$

令 $k=1,\cdots,N$,记

$$\boldsymbol{\Phi}_N=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varphi}_N^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{y}_N=\begin{bmatrix}y(n+1)\\ \vdots\\ y(n+N)\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\varepsilon}_N=\begin{bmatrix}\varepsilon(n+1)\\ \vdots\\ \varepsilon(n+N)\end{bmatrix}.$$

模型(36.2)基于 N 次观测数据的方程组为

$$\boldsymbol{y}_N=\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}_N.\tag{36.3}$$

目标函数

$$J(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\varepsilon}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_N=\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^2(n+k).\tag{36.4}$$

设 Θ 为参数集,若存在 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 使得

$$J(\hat{\boldsymbol{\theta}}_N)=\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}J(\boldsymbol{\theta}),$$

则称 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 基于(36.1)N 次观测的**最小二乘估计**(least squares

estimator),简称 LS.

当 $N \geqslant n+m$,且 $\operatorname{rank} \boldsymbol{\Phi}_N = n+m$ 时,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = (\boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_N)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_N^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_N = \Big(\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \Big)^{-1} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_k y(n+k). \tag{36.5}$$

定理 36.2.2 如果系统(36.1)是稳定的,且$\{u(k)\}$和$\{\varepsilon(k)\}$的四阶矩是指数有界的,则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的**弱一致性**(weak consistency)估计,即 $N \to \infty$时

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \xrightarrow{\text{prob.}} \boldsymbol{\theta}.$$

定理 36.2.3 在定理 36.2.2 的条件下,若再加上

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_k \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \xrightarrow[N \to \infty]{\text{a. s.}} \boldsymbol{\Phi} > 0, \tag{36.6}$$

则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的**强一致性**(strong consistency)估计,即 $N \to \infty$时

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N \xrightarrow{\text{a. s.}} \boldsymbol{\theta}.$$

定义 36.2.4 Householder(豪斯霍尔德)变换(Householder transformation) 设 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ 为单位向量,则称线性变换

$$\boldsymbol{Q} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$$

为一个 **Householder 变换**,简称 **H-变换**. $\boldsymbol{Q}$ 称为H-变换阵. $\boldsymbol{Q}$ 具有如下性质:

(1) $\boldsymbol{Q}$ 为对称阵,且为正交阵.

(2) 有限 $\boldsymbol{Q}$ 乘积仍然为 H-变换阵.

(3) $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ 一个H-变换阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} = (\lambda, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \lambda = \| \boldsymbol{x} \|_2.$$

(4) $\forall \boldsymbol{\Phi} \in \mathbb{R}^{N \times p}$, $\exists$ 一个 H-变换阵 $\boldsymbol{Q}$,使得

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为 p 阶上三角阵.

解法 36.2.5 LS 的 H -变换解法

对式(36.5)中的 $\boldsymbol{\Phi}_N$，$\exists Q\in\mathbb{R}^{N\times N}$，使得

$$Q\boldsymbol{\Phi}_N=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\qquad Q\boldsymbol{y}_N=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}_1\\ \boldsymbol{\eta}_2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\boldsymbol{\eta}_1,\qquad(36.7)$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为 $m+n$ 阶上三角阵，$\boldsymbol{\eta}_1\in\mathbb{R}^{m+n}$. 由 $\boldsymbol{R}$ 为上三角阵，因此式(36.7)中的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 可递归求解得到. 当 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}$ 的行列式很小时，上述方法可成功地求解最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$.

36.3 递推最小二乘法

定义 36.3.1 加权 LS 的递推格式 取加权阵 $\boldsymbol{W}_N=\mathrm{diag}(W(n+1),\cdots,W(n+N))$，将式(36.4)改为

$$J_N(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\varepsilon}_N\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{\varepsilon}_N=\sum_{k=1}^{N}W(n+k)\varepsilon^2(n+k).$$

设 $\mathrm{rank}\boldsymbol{W}_N=N$，并记

$$\boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{\Phi}_k)^{-1},\qquad k\geqslant n+m+1,$$

则有如下递推最小二乘格式(recursive least squares estimator)，简称 RLS：

$$\boldsymbol{K}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(\boldsymbol{W}^{-1}(k+1)+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1})^{-1},\qquad(36.8\mathrm{a})$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k,\qquad(36.8\mathrm{b})$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k+\boldsymbol{K}_{k+1}(y(n+k+1)-\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k).\qquad(36.8\mathrm{c})$$

初值可有两种取法：

(1) 取 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{P}_0=\alpha^2\boldsymbol{I}_{n+m}$，$\alpha^2=10^2\sim10^5$.

(2) 取一定长度的数据用 LS 或其H -变换法求出 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{N_0}\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{\theta}_0$，$\boldsymbol{P}_{N_0}\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{P}_0$.

另外，对(36.8)中的 $\boldsymbol{P}_{k+1}$ 在计算中应保持对称性，为此可等价地将 $\boldsymbol{P}_{k+1}$ 写为

$$\boldsymbol{P}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{K}_{k+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W}^{-1}(k+1)+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1}). \quad (36.9)$$

一般来说，当$\{\varepsilon(k)\}$为白噪声序列．而$\{u(k)\}$为 m 阶持续激励信号时，有

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}\xrightarrow[N\to\infty]{\text{a. s.}}\boldsymbol{\Phi}=\overline{\mathrm{E}}\{\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}\}>0. \quad (36.10)$$

这便是定理 36.2.3 的条件.

性质 36.3.2 $\{\boldsymbol{P}_k\}$的性质：

(1) $\{\boldsymbol{P}_k\}$是单调减矩阵序列，即

$$\boldsymbol{P}_{k+1}-\boldsymbol{P}_k\leqslant\mathbf{0}.$$

(2) 在式(36.10)的意义下，有 $\boldsymbol{P}_k\xrightarrow{\text{a. s.}}\mathbf{0}$.

(3) $\sigma^2\boldsymbol{P}_k$ 可作为 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ 的误差协方差阵的估计.

36.4 多变量系统的 LS

模型

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}(k+n)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}(k+n-1)+\cdots+\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{y}(k)\\&=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}(k+n-1)+\cdots+\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{u}(k+n-m)+\boldsymbol{\varepsilon}(k+n),\end{aligned} \quad (36.11)$$

其中 $\boldsymbol{y}(k)\in\mathbb{R}^p$，$\boldsymbol{u}(k)\in\mathbb{R}^r$，$\boldsymbol{A}_i\in\mathbb{R}^{p\times p}$，$\boldsymbol{B}_j\in\mathbb{R}^{p\times r}$，$\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\}$是 p 维零均值白噪声．记号

$$\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_m)^{\mathrm{T}}_{(np+mr)\times p},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{y}(k+n-1)\\\vdots\\-\boldsymbol{y}(k)\\\boldsymbol{u}(k+n-1)\\\vdots\\\boldsymbol{u}(k+n-m)\end{bmatrix}_{(np+mr)\times 1},$$

$\boldsymbol{\theta}$ 的最小二乘估计是

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}\right]^{-1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_k\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(n+k), \tag{36.12}$$

即$(np+mr)\times p$ 参数矩阵 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计需求一个 $np+mr$ 阶方阵的逆，式中的$\frac{1}{N}$是为了计算的方便，防止浮点运算的数据太长.

36.5 时变系统的适应算法

算法 36.5.1 指数窗法(exponential data window)

将定义 36.3.1 中的加权阵取为

$$\boldsymbol{W}_k = \begin{pmatrix} \rho^{k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho^{k-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{W}_{k+1}\begin{pmatrix} \rho\boldsymbol{W}_k & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}, \tag{36.13}$$

目标函数为(其余记号同 36.3 节)，其中 ρ 为渐消记忆因子.

$$J_k(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{k}\rho^{k-l}\boldsymbol{\varepsilon}^2(n+l). \tag{36.14}$$

则递推算法格式为

$$\boldsymbol{K}_{k+1} = \boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(\rho+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1})^{-1}, \tag{36.15a}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1} = (\boldsymbol{P}_k - \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k)/\rho, \tag{36.15b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + \boldsymbol{K}_{k+1}(\boldsymbol{y}(n+k+1) - \boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k), \tag{36.15c}$$

渐消因子推荐：$0.9\leqslant\rho\leqslant 1$.

算法 36.5.2 固定窗法(fixed data window)

记号(设 $k>N$，N 为选定记忆长度)如下

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{k-N+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}(n+k-N+1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}(n+k) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_k = (\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_k)^{-1} = \Big(\sum_{t=k-N+1}^{k}\boldsymbol{\varphi}_t\boldsymbol{\varphi}_t^{\mathrm{T}}\Big)^{-1}, \tag{36.16}$$

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_k$（基于固定长度为 N 的一次完成初始估计），

$$\boldsymbol{Q}_{k+1}=[\boldsymbol{P}_k^{-1}+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}]^{-1}.$$

$\boldsymbol{\varphi}_k$ 意义同 36.2 节，则递推算法格式为

$$\boldsymbol{Q}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(1+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1})^{-1}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k, \tag{36.17a}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}=\boldsymbol{Q}_{k+1}-\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_{k-N+1}(1+\boldsymbol{\varphi}_{k-N+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_{k-N+1})^{-1}\cdot \boldsymbol{\varphi}_{k-N+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{k+1}, \tag{36.17b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_K+\boldsymbol{P}_{k+1}(\boldsymbol{\varphi}_{N+1}\tilde{y}(n+k+1) -\boldsymbol{\varphi}_{k-N+1}\tilde{\boldsymbol{y}}(n+k-N+1)), \tag{36.17c}$$

$$\tilde{y}(n+k)\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{y}(n+k)-\hat{y}(n+k|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k), \tag{36.17d}$$

$$\hat{y}(n+k|\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)\stackrel{\text{def}}{=}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k. \tag{36.17e}$$

上述算法的实施步骤如下：

(1) 设定 N=常数，计算 $\boldsymbol{P}_N$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$.

(2) 置 $k=N$，加入新的观测 $\boldsymbol{y}(n+N+1)$ 及 $\boldsymbol{u}(n+N+1-m)$，计算 $\boldsymbol{Q}_{k+1}$.

(3) 计算 $\boldsymbol{P}_{k+1}$.

(4) 计算 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}$，置 $k=k+1$ 转(2).

36.6 基于 H-变换的RLS

模型：见(36.2)式.

对 $\boldsymbol{\Phi}_N$ 求 H -变换阵 $\boldsymbol{\psi}_{N-1}$，使

$$\boldsymbol{\psi}_{N-1}\boldsymbol{\Phi}_N=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_N\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\psi}_{N-1}\boldsymbol{y}_N=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_N\\ \boldsymbol{\xi}_N\end{bmatrix}, \tag{36.18}$$

其中 $\boldsymbol{R}_N$ 为 $n+m$ 阶上三角阵，置初值 $k=N$，$\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{R}_N$. 对新的数据集 $\boldsymbol{\varphi}_{k+1}$，求 H -变换 $\boldsymbol{\psi}_k$，使

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_{k+1}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\psi}_k\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_k\\ \boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}, \tag{36.19}$$

其中 $\boldsymbol{\psi}_k$ 为 $p\stackrel{\text{def}}{=}m+m$ 个正交阵之积，即

$$\boldsymbol{\psi}_k=\boldsymbol{Q}_p\boldsymbol{Q}_{p-1}\cdots\boldsymbol{Q}_1, \tag{36.20a}$$

$$Q_i=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{i-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & C_i & \boldsymbol{0} & S_i \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{p-i} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & S_i & \boldsymbol{0} & -C_i \end{bmatrix}_{(p+1)\times(p+1)}, \tag{36.20b}$$

$$C_i=(\boldsymbol{R}_k)_{ii}/\lambda_i, \tag{36.20c}$$

$$S_i=(\boldsymbol{\varphi}_{k+1})_i/\lambda_i, \tag{36.20d}$$

$$\lambda_i=[(\boldsymbol{R}_k)_{ii}^2+(\boldsymbol{\varphi}_{k+1})_i^2]^{1/2}, \qquad i=1,\cdots,p, \tag{36.20e}$$

$\boldsymbol{R}_k(k=N,N+1,\cdots)$均为 p 阶方阵，且为上三角阵. 使得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{k+1} \\ \xi_{k-1} \end{bmatrix}=\boldsymbol{\psi}_k\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_k \\ y(n+k+1) \end{bmatrix}, \tag{36.21}$$

则参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的递推估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}=\boldsymbol{R}_{k+1}^{-1}\boldsymbol{\eta}_{k+1}^{-1}, \tag{36.22}$$

$$J_{k+1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1})=J_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)+\xi_{k+1}^2. \tag{36.23}$$

36.7 具有不相关噪声模型的最大似然估计

模型：仍然取(36.2)式

假设$\{\varepsilon(k)\}$的方差为 σ^2，则 $\boldsymbol{y}_N$ 的对数似然函数为

$$\ln p(\boldsymbol{y}_N|\theta,\sigma^2)=-\frac{N}{2}(\ln 2\pi+\ln\sigma^2)$$
$$+\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_N-\boldsymbol{\Phi}_N\boldsymbol{\theta}), \tag{36.24}$$

$\boldsymbol{\theta}$ 与 σ^2 的最大似然估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{\mathrm{ML}}=(\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_k)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_k=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{\mathrm{LS}}, \tag{36.25}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathrm{ML}}^2=\frac{1}{k}(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{\mathrm{ML}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{\mathrm{ML}}). \tag{36.26}$$

36.8 关于一致性估计的注

以模型(36.2)为对象的 LS 给出的估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{\mathrm{LS}}$ 是参数真值 $\boldsymbol{\theta}$ 的一致性估计. 当取加权阵 $\boldsymbol{W}_k=\boldsymbol{I}$ 时，给出的递推估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ 与

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^{\mathrm{LS}}$ 是等价的. 但是，当 $\{\varepsilon(k)\}$ 为白噪声的假设不成立时，即 $\{\varepsilon(k)\}$ 为相关噪声时，虽然形式上仍可用 LS 或 RLS，但 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ 却不再具有一致性. 在以下的 36.9～36.12 节中，给出的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ 仍然保证一致性.

36.9 辅助变量法与 RIV

定义 36.9.1 辅助变量法(instrumental variable method)

模型:

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)+C(z^{-1})e(k), \tag{36.27}$$

$$A(z^{-1})=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n} \quad (\text{稳定多项式}),$$

$$B(z^{-1})=b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m},$$

$$C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+\cdots+c_qz^{-q} \quad (\text{稳定多项式}),$$

$\varepsilon(k)=C(z^{-1})e(k)$ 称为模型噪声，$\{e(k)\}$ 是方差为 σ^2 的零均值白噪声. 约定 $m\leqslant n$, $q\leqslant n$. 记号

$$\boldsymbol{\theta}=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}=(-y(n+k-1),\cdots,-y(k),u(n+k-1),\cdots,u(n+k-m)).$$

如果有 $\boldsymbol{h}_k\in\mathbb{R}^{n+m}$，使得 $N\to\infty$ 时有

(1) $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\boldsymbol{h}_k\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}\xrightarrow{\text{a. s.}}\boldsymbol{R}_{h\varphi}>\boldsymbol{0}$,

(2) $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\boldsymbol{h}_k\varepsilon(n+k)\xrightarrow{\text{a. s.}}\boldsymbol{0}$,

则称 $\boldsymbol{h}_k$ 是一个**辅助变量(向量)**，或称

$$\boldsymbol{H}_k=(\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_k)^{\mathrm{T}} \tag{36.28}$$

为**辅助变量矩阵**，并称

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N=\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{h}_k\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}\right]^{-1}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{h}_ky(n+k) \tag{36.29}$$

为 $\boldsymbol{\theta}$ 的**辅助变量估计**. 辅助变量估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的一致性估计.

不同的辅助变量将导致不同的辅助变量估计．一个方法是取一个辅助模型

$$A^*(z^{-1})x(k) = B^*(z^{-1})u(k), \tag{36.30}$$

可用 LS 先求解 $1+a_1^* z^{-1}+\cdots+a_n^* z^{-n}\overset{\text{def}}{=}A^*(z^{-1})$ 及 $B^*(z^{-1})\overset{\text{def}}{=} b_1^* u(k-1)+\cdots+b_m^* u(k-m)$，而后对给定的 $\{u(k)\}$ 取辅助变量为

$$\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}=(-x(n+k-1),\cdots,-x(k),u(n+k-1),\cdots,\\ u(n+k-m)), \tag{36.31}$$

$$x(k)=-a_1^* x(k-1)-\cdots-a_n^* x(k-n)+b_1^* u(k-1)\\ +\cdots+b_m^* u(k-m) \tag{36.32}$$

$$x(-k)=0, \qquad k>0.$$

定义 36.9.2 递推辅助变量格式(RIV)

$$\boldsymbol{K}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k \boldsymbol{h}_{k+1}(1+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{h}_{k+1})^{-1}, \tag{36.33a}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k, \tag{36.33b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k+\boldsymbol{K}_{k+1}(\boldsymbol{y}(n+k+1)-\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k). \tag{36.33c}$$

注 36.9.3 (1) 辅助变量法不能解出 $C(z^{-1})$.

(2) 辅助模型(36.30)中可取 $A^*(z^{-1})=1, B^*(z^{-1})=z^{-m}$，这时

$$\boldsymbol{h}_k^{\mathrm{T}}=(-u(n+k-m-1),\cdots,-u(k-m),\\ u(n+k-1),\cdots,u(n+k-m)).$$

36.10 增广最小二乘法与 RELS

模型：取(36.27)式

记号：

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m,c_1,\cdots,c_q), \tag{36.34}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}=(-y(n+k-1),\cdots,-y(k),u(n+k-1),\cdots,\\ u(n+k-m),\hat{e}(n+k-1),\cdots,\hat{e}(n+k-q)), \tag{36.35}$$

$$\hat{e}(n+k)=y(n+k)-\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k, \qquad k\geqslant 1, \tag{36.36}$$

$$\hat{e}(l)=y(l), \qquad l=1,\cdots,n, \tag{36.37}$$

则 $\boldsymbol{\theta}$ 的递推增广最小二乘格式为(RELS)

$$\boldsymbol{K}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(1+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1})^{-1}, \tag{36.38a}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k, \tag{36.38b}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}=\boldsymbol{\theta}_k+\boldsymbol{K}_{k+1}(y(n+k+1)-\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k), \tag{36.38c}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{P}_0=\alpha^2\boldsymbol{I}.$$

作为 LS 的直接推广，增广最小二乘有一次完成算法，其形式与 LS 类似．但常用的是 RELS(recursive extended least squares).

36.11 广义最小二乘法与 RGLS

定义 36.11.1 广义最小二乘法(generalized least squares)模型

$$\begin{cases}A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)+\varepsilon(k),\\ F(z^{-1})\varepsilon(k)=e(k),\end{cases}$$

或记为

$$F(z^{-1})A(z^{-1})y(k)=F(z^{-1})B(z^{-1})u(k)+e(k), \tag{36.39}$$

其中 $A(z^{-1}),F(z^{-1})$ 为稳定多项式. $A(z^{-1}),B(z^{-1})$ 同定义 36.9.1. $e(k)$ 为零均值正态白噪声序列.

$$F(z^{-1})=1+f_1z^{-1}+\cdots+f_pz^{-p}.$$

记号

$$F(z^{-1})y(k)=y_f(k), \tag{36.40}$$

$$F(z^{-1})u(k)=u_f(k). \tag{36.41}$$

模型(36.39)可记为

$$F(z^{-1})\varepsilon(k)=e(k), \tag{36.42}$$

$$A(z^{-1})y_f(k)=B(z^{-1})u_f(k)+e(k). \tag{36.43}$$

由上述模型求解 $A(z^{-1}),B(z^{-1})$ 及 $F(z^{-1})$ 是非线性最小二乘问题,其**松弛算法**(relaxation method)如下.

算法 36.11.2 (1) 记 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}=(f_1,\cdots,f_p)$,取初始估计为 $\hat{F}_i(z^{-1})=1$,即 $\hat{F}_i=0\ (i=0)$.

(2) 用(36.40)和(36.41)计算

$$y_f^i(k)=\hat{F}_i(z^{-1})y(k),\qquad u_f^i(k)=\hat{F}_i(z^{-1})u(k).$$

(3) 调用 LS 子程序,由(36.43)求解 $\hat{A}_i-(z^{-1}),\hat{B}_i(z^{-1})$.

(4) 噪声估计 $\hat{\varepsilon}_i(k)=\hat{A}_i(z^{-1})y(k)-\hat{B}_i(z^{-1})u(k)$.

(5) 置 $\varepsilon(k)=\hat{\varepsilon}_i(k)$. 调用 LS,由(36.42)求解 $\hat{F}_{i+1}$.

(6) 收敛性检验,满意则停止,否则置 $i=i+1$,转(2).

上述算法称为**广义最小二乘法**,所用数据为固定长度的观测数据集.

定义 36.11.3 递推广义最小二乘法(recursive generalized LS)

对模型(36.42)及(36.43),一种可以在线(on-line)应用的递推算法格式(RGLS)如下.记号

$$\boldsymbol{\theta}=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m),$$

$$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_p),$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}=(-y_f(n+k-1),\cdots,-y_f(k),\ u_f(n+k-1),\cdots,u_f(n)+k-m),$$

$$y_f(k+l)=\hat{F}_k(z^{-1})y(k+l),\quad l=0,1,\cdots,n-1,$$

$$u_f(k+j)=\hat{F}_k(z^{-1})u(k+j),\quad j=n-m,n-m+1,\cdots,n-1,$$

$$\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}}=(\hat{\varepsilon}(n+k-1),\cdots,\hat{\varepsilon}(n+k-p)),$$

$\hat{\varepsilon}(k+l)=\hat{A}_k(z^{-1})y(k+l)-\hat{B}_k(z^{-1})u(k+l),l=n-p,\cdots,n-1$, $\hat{A}_k(z^{-1}),\hat{B}_k(z^{-1})$ 及 $\hat{F}_k(z^{-1})$ 分别为参数估计代入相应多项式后而得到.参数辨识的递推格式为

$$\hat{\theta}_{k+1}=\hat{\theta}_k+\boldsymbol{K}_{k+1}^{(1)}(y_f(n+k+1)-\boldsymbol{\varphi}_{k+1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k),\qquad(36.44\text{a})$$

$$\boldsymbol{K}_{k+1}^{(1)}=\boldsymbol{P}_k^{(1)}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}/(1+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k^{(1)}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}), \tag{36.44b}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}^{(1)}=\boldsymbol{P}_k^{(1)}-\boldsymbol{K}_{k+1}^{(1)}\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k^{(1)}, \tag{36.44c}$$

$$\hat{f}_{k+1}=\hat{f}_k+\boldsymbol{K}_{k+1}^{(2)}(\varepsilon(n+k-1)-\boldsymbol{\xi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\hat{f}_k), \tag{36.44d}$$

$$\boldsymbol{K}_{k+1}^{(2)}=\boldsymbol{P}_k^{(2)}\boldsymbol{\xi}_{k+1}/(1+\boldsymbol{\xi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k^{(2)}\boldsymbol{\xi}_{k+1}), \tag{36.44e}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}^{(2)}=\boldsymbol{P}_k^{(2)}-\boldsymbol{K}_{k+1}^{(2)}\boldsymbol{\xi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k^{(2)}. \tag{36.44f}$$

36.12 递推最大似然法

定义 36.12.1 模型

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)+C(z^{-1})e(k),$$

$$A(z^{-1})=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n},\quad(\text{稳定})$$

$$B(z^{-1})=b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m},$$

$$C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+\cdots+c_qz^{-q},\quad(\text{稳定})$$

$\{e(k)\}$是方差为 σ^2 的零均值正态分布白噪声，约定 $q\leqslant m\leqslant n$. 目标函数取为

$$J_k(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{k}\varepsilon^2(t,\theta),$$

$$\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta}) = C^{-1}(z^{-1})[A(z^{-1})y(k)-B(z^{-1})u(k)],$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m,c_1,\cdots,c_q]^{\mathrm{T}}.$$

记

$$\hat{\varepsilon}(k)=y(k)-\hat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k,$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}=(-y(k-1),\cdots,-y(k-n),u(k-1),\cdots,$$
$$u(k-m),\hat{\varepsilon}(k-1),\cdots,\hat{\varepsilon}(k-q)),$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}=(-y_f(k-1),\cdots,-y_f(k-n),u_f(k-1),\cdots,$$
$$u_f(k-m),\hat{\varepsilon}_f(k-1),\cdots,\hat{\varepsilon}_f(k-q)),$$

$$y_f(k)=\hat{C}^{-1}(z^{-1})y(k),$$

$$u_f(k)=\hat{C}^{-1}(z^{-1})u(k),$$

$$\hat{\varepsilon}_f(k)=\hat{C}^{-1}(z^{-1})\hat{\varepsilon}(k).$$

算法递推格式为

$$\boldsymbol{P}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{K}_{k+1}+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k,$$

$$\boldsymbol{K}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1}(1+\boldsymbol{\varphi}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\varphi}_{k+1})^{-1},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k+\boldsymbol{K}_{k+1}\hat{\varepsilon}(k+1),$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{k+1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_k^{(n)} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_k^{(m)} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_k^{(g)}\end{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_k+\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{u}_0\\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0\end{pmatrix},$$

$$J_k(\boldsymbol{\theta})=\sum_{t=1}^{k}\varepsilon^2(t,\boldsymbol{\theta}), \tag{36.45}$$

$$\varepsilon(k,\theta)=C^{-1}(z^{-1})[A(z^{-1})y(k)-B(z^{-1})u(k)]. \tag{36.46}$$

上述目标函数的极小化实质上将导致预报误差估计(参见第 38 章),在正态分布的情形下,有如下近似极大似然估计.

记号

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_k^{\mathrm{T}}&=\frac{\partial\varepsilon(k,\theta)}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}}\\ &=(\varphi_k^1,\cdots,\varphi_k^n,\varphi_k^{n+1},\cdots,\varphi_k^{n+m},\cdots,\varphi_k^{n+m+p}),\end{aligned} \tag{36.47}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}=(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m,c_1,\cdots,c_q),$$

$$\boldsymbol{P}_k^{-1}=\left.\frac{\partial^2 J_k(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\partial\boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}. \tag{36.48}$$

算法 36.12.2 递推算法格式为

$$\boldsymbol{K}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{k+1}/(1+\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{k+1}),$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1}=\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{K}_{k+1}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{k+1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_k,$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k+\boldsymbol{K}_{k+1}\hat{\varepsilon}(k+1),$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(k)\overset{\mathrm{def}}{=}y(k)-\hat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}\theta_k,$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}=(&-y(k-1),\cdots,-y(k-n),u(k-1),\cdots,\\ &u(k-m),\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(k-1),\cdots,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(k-p)),\end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{k+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_k^{(n)} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_k^{(m)} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_k^{(g)}\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k+\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_0\\ \boldsymbol{u}_0\\ \boldsymbol{\varepsilon}_0\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_k^{(n)}=\begin{bmatrix}-\hat{c}_1 & -\hat{c}_2 & \cdots & -\hat{c}_q & 0 & \cdots & 0\\ & & & & & & 0\\ & \boldsymbol{I}_{n-1} & & & \vdots & & \vdots\\ & & & & 0 & & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_k^{(m)}=\begin{bmatrix}-\hat{c}_1 & -\hat{c}_2 & \cdots & -\hat{c}_q & 0 & \cdots & 0\\ & & & & \vdots & & 0\\ & \boldsymbol{I}_{m-1} & & & \vdots & & \vdots\\ & & & & 0 & & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_k^{(q)}=\begin{bmatrix}-\hat{c}_1 & -\hat{c}_2 & \cdots & -\hat{c}_q\\ & & & 0\\ & \boldsymbol{I}_{q-1} & & \vdots\\ & & & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_0=\begin{bmatrix}-y(k)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{n\times 1},\quad \boldsymbol{u}_0=\begin{bmatrix}u(k)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{m\times 1},\quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0=\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}(k)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{q\times 1}.$$

实施步骤：

(1) 赋初值，$k=0$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{P}_k=\alpha^2\boldsymbol{I}$，并置

$\varepsilon(l)=y(l)$（或 0），　　$l=-p,-p+1,\cdots,0$.

(2) 计算 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_{k+1}$，其中 $\boldsymbol{C}_k^{(n)}$，$\boldsymbol{C}_k^{(m)}$，$\boldsymbol{C}_k^{(q)}$ 中的参数取为第 k 次估计.

(3) 计算 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{\varepsilon}(l)$ $(l=k-p,\cdots,k)$.

(4) 计算 $\boldsymbol{K}_{k+1}$，$\boldsymbol{P}_{k+1}$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1}$.

(5) 收敛性检验，满意则停止，否则 $k=k+1$ 转(2).

37 模型检验与阶的估计

37.1 模型检验

模型检验(model test)有多种方法. 这里提供的方法是按如下原则:如果由辨识结果提供的模型是理想的,则模型中所假设的白噪声序列的后验估计$\{\hat{e}(k)\}$应在一定检验水平下可以认定是白噪声. 常用方法有以下两种.

方法 37.1.1 正态检验法 取统计量

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-\tau} \hat{e}(k)\hat{e}(k+\tau), \qquad \tau = 0,1,\cdots,N-1, \qquad (37.1)$$

$$R(\tau) = \varphi(\tau)/\varphi(0), \qquad \tau = 1,2,\cdots,N-1. \qquad (37.2)$$

相应于 α 检验水平,当

$$\left|\sqrt{N}\,R(\tau)\right| < F(\alpha), \qquad \tau = 1,2,\cdots,N-1 \qquad (37.3)$$

时,认为 $R(\tau)=0$,即$\{\hat{e}(k)\}$是不相关噪声序列 . $F(\alpha)$为标准正态分布函数的 α -临界值.

方法 37.1.2 **χ^2 检验法** 统计量和记号同正态检验法(37.1),(37.2),并取 χ^2 统计量

$$X = \sum_{\tau=1}^{N} NR^2(\tau) \sim \chi^2(N). \qquad (37.4)$$

当 $X<\chi^2_\alpha(N)$时认为$\{\hat{e}(k)\}$是不相关噪声序列. $\chi^2_\alpha(N)$是自由度为 N 的 χ^2 分布函数临界值.

注 37.1.3 当数据量 N 较大时,可取由用户选取最后一段$\{\hat{e}(k)\}$进行检验,并且在正态检验中,$\{R(\tau)\}$也可只取出其中的

$R(N-l), R(N-l+1), \cdots, R(N)$做(37.3)所示比较.

37.2 F 检验定阶法

模型阶的问题,实质上是模型中所含独立参数个数问题,对动态系统来说,这是一个相当复杂的理论问题,本手册提供两个较为成熟的方法——F 检验定阶法和基于最小信息准则的 AIC 方法.

定义 37.2.1 关于阶次检验的统计量

模型 以(36.45)为例,假设 $e(k) \sim N(0, \sigma^2)$.

记号 s:模型真实独立参数个数,即 $s=n+m+q$;

s_1 : $s_1 \geqslant s$, s_1 为某个模型的参数个数;

s_2 : $s_2 > s_1$, s_2 为另一个模型的参数个数;

$J(i)$: 相应于 s_i 的模型残差平方和,即

$$J(s_i) = J(s_i, \hat{\theta}^i) = \sum_{t=1}^{N} \hat{\varepsilon}^2(t, \hat{\theta}^i), \qquad i=1,2,$$

并取

$$J = J(s_1) - J(s_2).$$

则 $s_2 > s_1 \geqslant s$ 为真时,统计量

$$\mathrm{F}_{s_1 s_2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(N-s_2)J}{(s_2-s_1)J(s_2)} \sim \mathrm{F}(s_2-s_1, N-s_2). \qquad (37.5)$$

准则 37.2.2 检验准则 给定检验水平 α,当 $\mathrm{F} > \mathrm{F}_\alpha(s_2-s_1, N-s_2)$时,认为 s_2 比 s_1 更接近真实参数个数.

一般取 $s_2 = s_1 + 1$,这时统计量(37.5)变为

$$\mathrm{F}_{s_1 s_2} = \frac{(N-s_2)(J(s_1)-J(s_2))}{J(s_2)} \sim \mathrm{F}(1, N-s_2). \quad (37.6)$$

设 $\mathrm{F}_\alpha(1, N-s_2)$为相应于 α 的临界值,可有如下的检验程序.

程序 37.2.3 检验程序

(1) 置 $p_1=1, p_2=p_1+1$,进行参数估计.

(2) 计算 $J(s_1),J(s_2)$.

(3) 计算 $\mathrm{F}_{s_1s_2}$.

(4) 判断 $\mathrm{F}_{s_1s_2}<\mathrm{F}_\alpha(1,N-s_2)$? 若真,置 $s_1=s_1+1$,转(1);若否,置 $p_1=p_1+1,p_2=p_2+1$,进行参数估计后,重复(2)→(3)→(5).

(5) 判断 $\mathrm{F}_{s_1s_2}<\mathrm{F}_{s_1-1,s_2-1}$? 若真,则停止,$\hat{s}=s_2-1$;若否,即 $\mathrm{F}_{s_1s_2}>\mathrm{F}_{s_1-1,s_2-1}>\mathrm{F}_\alpha$,则置 $p_1=p_1+1,p_2=p_2+1$,参数估计后再次重复(2)→(3)→(5). 其中 $\hat{s}$ 为最后取定的估计.

F 分布的一个近似公式为($\alpha=0.05$,精度为 10^{-2})

$$\mathrm{F}_\alpha(k_1,k_2)=0.9+\frac{2.94}{\sqrt{k_1}}+\frac{9.9}{\sqrt{k_2}},\qquad k_1\leqslant 10,\quad k_2\geqslant 30. \tag{37.7}$$

注 37.2.4 上述检验方法源于静态模型独立参数个数的检验,对动态模型只是近似的. 另外,上面的示例方法可推广到其他模型类.

37.3 AIC 定阶法

定义 37.3.1 AIC(Akaike information criterion)准则 这是以人名 Akaike 命名的方法.

设$\{y(k)\}$为平稳序列,其样本 $\boldsymbol{y}_N$ 的对数似然函数记为

$$L(\boldsymbol{y}_N,\boldsymbol{\theta}_0)=\ln P(\boldsymbol{y}_N\mid\boldsymbol{\theta}_0), \tag{37.8}$$

$\boldsymbol{\theta}_0$ 为系统参数真值. $L(\boldsymbol{y}_N,\boldsymbol{\theta})$在 $\boldsymbol{\theta}_0$ 的附近有一致可积的一阶、二阶偏导数($\forall\boldsymbol{\theta}\in\Theta$),则模型独立参数个数的最优估计由下式极小化确定

$$\mathrm{AIC}(k)=-2\ln P(\boldsymbol{y}_N\mid\hat{\boldsymbol{\theta}}(k))+2k, \tag{37.9}$$

即独立参数个数 $\hat{k}$ 为上述右端关于 k 极小化的解. 其中 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$为 k 维参数参量 $\boldsymbol{\theta}(k)$的最大似然估计. AIC(k)称为**模型的 AIC 函数**.

例 37.3.2 (1) 模型(36.1)的 AIC 函数为

$$\mathrm{AIC}(n+m) = N \ln \hat{\sigma}^2, \qquad n+m+1.$$

由低到高调整 n,m 的值．可使 AIC 值达最小，其中 $\hat{\sigma}^2$ 是 σ^2 的最大似然估计.

(2) 模型(36.45)的 AIC 函数为

$$\mathrm{AIC}(s) = N \ln \hat{\sigma}^2 + 2(s+1),$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \hat{\varepsilon}^2(k, \hat{\theta}_k).$$

准则 37.3.3 改进的准则函数还有

$$\mathrm{BIC}(k) = -2\ln P(\boldsymbol{y}_N | \hat{\beta}) + 2k \ln N, \tag{37.10}$$

$$\Phi(k) = -2\ln P(\boldsymbol{y}_N | \hat{\beta}) + c\, k \ln N, \qquad c > 2. \tag{37.11}$$

38 预报误差方法与状态空间模型辨识

38.1 预报误差模型

考虑模型

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{f}(Y_{k-1},U_{k-1},k,\boldsymbol{\theta})+\boldsymbol{\varepsilon}(k), \tag{38.1}$$

其中：$\boldsymbol{y}(k)$为 m 维输出；$\boldsymbol{u}(k)$为 r 维输入；

$Y_k=\{\boldsymbol{y}(t)\,|\,t=k,k-1,\cdots\}$；　　$U_k=\{\boldsymbol{u}(t)\,|\,t=k,k-1,\cdots\}$；

$\boldsymbol{\varepsilon}(k)$为适应于$\{Y_k,U_k\}$的新息序列，即

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\mid Y_{k-1},U_{k-1}\}=\boldsymbol{0}, \tag{38.2}$$

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\mid Y_k,U_k\}=\boldsymbol{\varepsilon}(k), \tag{38.3}$$

则 $\boldsymbol{y}(k)$的预报可表示为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{y}}(k|k-1)&=\mathrm{E}\boldsymbol{y}(k|Y_{k-1},U_{k-1},\boldsymbol{\theta})\\&=\boldsymbol{f}(Y_{k-1},U_{k-1},k,\boldsymbol{\theta})\\&=\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{\varepsilon}(k),\end{aligned} \tag{38.4}$$

即$\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\}$为预报误差序列(最小方差意义下的预报，参见第 40 章)．称(38.1)为**预报误差模型**(prediction error model)．

考虑预报误差的方差(阵)

$$\mathrm{E}\{\|\boldsymbol{y}(k)-\hat{\boldsymbol{y}}(k|k-1)\|^2\,|\,Y_{k-1},U_{k-1},\boldsymbol{\theta}\}\overset{\text{def}}{=}D(\boldsymbol{\theta}). \tag{38.5}$$

称使(38.5)极小化的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$为 $\boldsymbol{\theta}$ 的**预报误差估计**(prediction error estimates, PEE)．

寻求 PEE 的方法一般称为**预报误差方法**(prediction error method, PEM)．实施 PEM 一般是取 $D(\boldsymbol{\theta})$的一个非负标量函数，即

$$J(N,\boldsymbol{\theta}) = f(D_N(\boldsymbol{\theta})), \tag{38.6}$$

$$D_N(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varepsilon}(k)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(k) \qquad （样本方差阵）. \tag{38.7}$$

例 38.1.1 考虑一阶 ARMAX 模型

$$y(k) \pm ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1).$$

记

$$\boldsymbol{\theta} = (-a, b, c)^{\mathrm{T}},$$

并注意到

$$\hat{y}(k|k-1) = -ay(k-1) + bu(k-1) + c\hat{e}(k-1), \tag{38.8}$$

其中 $\hat{e}(k-1)$是在 $k-1$ 时刻对 $e(k-1)$的后验估计. 再记

$$\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta}) = \hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1), \tag{38.9}$$

取目标函数为

$$J(N,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^2(k,\theta). \tag{38.10}$$

注意, $e(k)$是理论预报误差, 而 $\hat{e}(k) = \varepsilon(k,\theta)$是 $e(k)$的估计. 引入记号

$$\boldsymbol{\varphi}(k,\theta) = -\frac{\partial\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}, \tag{38.11}$$

则可得到

$$\boldsymbol{\varphi}(k,\boldsymbol{\theta}) + c\boldsymbol{\varphi}(k-1,\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} -y(k-1) \\ u(k-1) \\ \varepsilon(k-1,\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}. \tag{38.12}$$

假设 $k-1$ 时刻有估计 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$, 将 $J(k,\boldsymbol{\theta})$在 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$附近作 Taylor 展开, 得到($J'(\cdot,\cdot)$表示对 $\boldsymbol{\theta}$ 的导数)

$$\begin{aligned} J(k,\boldsymbol{\theta}) = {} & J(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)) + [J'(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \\ & + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]^{\mathrm{T}}J''(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))[\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)] \\ & + o(\|\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\|^2), \end{aligned}$$

其中 $o(\boldsymbol{x})/\|\boldsymbol{x}\|$ 当 $\|\boldsymbol{x}\|\to 0$，将 $J(k,\boldsymbol{\theta})$ 关于 $\boldsymbol{\theta}$ 极小化可得到 k 时刻的估计

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)-[J''ck,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)]^{-1}J'(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))$$
$$+o(\|\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)-\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)\|),\tag{38.13}$$

$$J'(k,\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial J(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=-\sum_{t=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\theta})\varepsilon(t,\boldsymbol{\theta})$$
$$=\frac{\partial J(k-1,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\varphi}(k,\boldsymbol{\theta})\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta}),\tag{38.14}$$

$$J''(k,\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial^2 J(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\partial\boldsymbol{\theta}}$$
$$=\frac{\partial J(k-1,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\partial\boldsymbol{\theta}}+\boldsymbol{\varphi}(k,\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k,\theta)$$
$$+\frac{\partial^2\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\partial\boldsymbol{\theta}}\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta}).\tag{38.15}$$

假设待求的 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)$ 是在接近 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$ 的一个较小邻域内（当 k 较大时，这一假设是合理的），于是(38.13)中的第三项 $o(\cdot)$ 可以忽略，并取近似

$$\left.\frac{\partial^2 J(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\partial\boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_k}=\left.\frac{\partial^2 J(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\partial\boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}}.$$

又 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$ 是 $k-1$ 时刻的最优估计，于是

$$J'(k-1,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))=\mathbf{0}.\tag{38.16}$$

另外，在接近参数真值 $\boldsymbol{\theta}_0$ 的附近，$\{\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta})\}$ 几乎就是白噪声，因此可认为 $\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta})$ 均值为零，并且 k 时刻之前的一切量均无关，而

$$\frac{\partial^2\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\partial\boldsymbol{\theta}}=-\frac{\partial\hat{y}(k|k-1)}{\partial\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\partial\boldsymbol{\theta}},$$

其中 $\hat{y}(k|k-1)$ 是以 k 之前的一些量表示的(38.8)，因此(38.15)右端第三项的期望值为零，可以忽略掉. 由(38.15)在 $k-1$ 时刻的(38.14)为

$$J'(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))=-\boldsymbol{\varphi}(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))\varepsilon(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)).\tag{38.17}$$

记$\bar{\boldsymbol{R}}(k)=J''(k,\boldsymbol{\theta})$，则 $k-1$ 时刻的(38.15)式又可变为

$$\bar{\boldsymbol{R}}(k)=\bar{\boldsymbol{R}}(k-1)+\boldsymbol{\varphi}(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)). \tag{38.18}$$

将(38.17)中的 $J'(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))$及(38.18)中的 $\bar{\boldsymbol{R}}(k)$作为 $J''(k,\theta)$代入(38.13)式，即有

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\bar{\boldsymbol{R}}^{-1}(k)\boldsymbol{\varphi}(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))\varepsilon(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)). \tag{38.19}$$

(38.8)中的 $\hat{e}(k-1)$可按下列方法递推算出

$$\begin{aligned}\hat{e}(s)=&y(s)+ay(s-1)\\&-bu(s-1)-c\hat{e}(s-1),\qquad s=1,2,\cdots,k-1.\end{aligned} \tag{38.20}$$

上式的实施需初值 $y(0)$和 $\hat{e}(0)$，当$|c|<1$ 时，初值的作用是按$|c|^{k-1}$衰减的，因而可任给初值.关于 $\boldsymbol{\varphi}(k,\boldsymbol{\theta})$的递推，只须取

$$\boldsymbol{\varphi}(k)=-\hat{e}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k-1)+\boldsymbol{\varphi}^{*}(k), \tag{38.21}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{*}(k)=(-y(k-1),u(k-1),\hat{e}(k-1))^{\mathrm{T}},$$

其中 $\hat{e}(k-1)$由(38.20)计算.于是，最后得到的递推格式是由(38.18)～(38.21)联合给出.

如引入记号 $\boldsymbol{R}(k)=\frac{1}{k}\bar{\boldsymbol{R}}(k)$，则上述算法可归纳为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k)=\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)+\frac{1}{k}\boldsymbol{R}^{-1}(k)\boldsymbol{\varphi}(k)\varepsilon(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)), \tag{38.22a}$$

$$\boldsymbol{R}(k)=\boldsymbol{R}(k-1)+\frac{1}{k}[\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)-\boldsymbol{R}(k-1)], \tag{38.22b}$$

$$\varepsilon(k,\hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1))=y(k)-\hat{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\varphi}^{*}(k), \tag{38.22c}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(k)=-\hat{e}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k-1)+\boldsymbol{\varphi}^{*}(k). \tag{38.22d}$$

如引入第 3 章中的 P 矩阵记号

$$\boldsymbol{P}(k)=[\bar{\boldsymbol{R}}(k)]^{-1},$$

则有

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{P}(k-1)+\frac{\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{P}(k-1)\boldsymbol{\varphi}(k)}.$$

注 38.1.2 此例恰与 36.12 节的 RML 算法相吻合，只不过

在(36.47)式中的 φ_k 是梯度,而这里的 $\boldsymbol{\varphi}(k)$ 是负梯度.关于 PEM 与 ML 的关系有如下结果.

38.2 PEM 与 ML 的关系

38.2.1 噪声方差为已知的情形

考虑模型(38.1),若 $\varepsilon(k)$ 的方差阵为已知,即

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(k)\}=\boldsymbol{\Sigma}(\text{已知}),$$

则当 $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$ 为正态噪声时,$\boldsymbol{\theta}$ 的最大似然估计与以下列 $J_1(N,\boldsymbol{\theta})$ 为目标函数的 PEE 相等价

$$J_1(N,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(k,\theta)\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{tr}\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{D}_N(\boldsymbol{\theta})\}. \tag{38.23}$$

38.2.2 噪声方差为未知的情形

当 $\boldsymbol{\Sigma}$ 未知时,$\boldsymbol{\theta}$ 的最大似然估计与取下列 $J_2(N,\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Sigma})$ 为目标函数的 PEE 相等价

$$J_2(N,\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Sigma})=\ln\det\boldsymbol{D}_N(\boldsymbol{\theta}),$$

以上 $\boldsymbol{D}_N(\boldsymbol{\theta})$ 由(38.7)定义.

注 38.2.1 PEM 是相当广泛意义下的一类模型,而实施 PEM(方法)的关键是如何计算并近似预测误差 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\boldsymbol{\theta})$ 的一阶导数(梯度)及二阶导数阵(Hessian 矩阵).PEM 方法可以对状态空间模型辨识直接给出结果,而这些结果多与 Kalman 卡尔曼滤波有关系,并且计算相当复杂.在以下几节,基于推广的 Kalman 滤波(Kalman filtering)方法(EKF),给出状态空间模型的一种辨识方法.

38.3 Kalman 滤波的基本结果

考虑状态空间模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{w}(k), \\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{v}(k), \end{cases} \tag{38.24}$$

其中 $\boldsymbol{x}(k)\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{y}(k)\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{u}(k)\in\mathbb{R}^r,\{\boldsymbol{w}(k)\}$ 与 $\{\boldsymbol{v}(k)\}$ 是零均值白噪声,并且

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(j)\}=\boldsymbol{w}\delta(k-j),\qquad \boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0},$$

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(j)\}=\boldsymbol{v}\delta(k-j),\qquad \boldsymbol{v}>0,$$

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(j)\}=0,\qquad \forall k,l.$$

初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$满足

$$\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0},$$

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\}=\boldsymbol{0},\qquad \forall k,$$

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\}=\boldsymbol{0},\qquad \forall k,$$

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\}=\boldsymbol{P}(0)\geqslant\boldsymbol{0}.$$

记号

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k)=\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(k)|\boldsymbol{y}(t);t=k,k-1,\cdots,1\},$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}(k+1)|\boldsymbol{y}(t);t=k,k-1,\cdots,1\},$$

$$\boldsymbol{P}(k)=\boldsymbol{P}(k,k)=\mathrm{E}\{[\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k)][\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k)]^{\mathrm{T}}\},$$

$$\boldsymbol{P}(k+1,k)=\mathrm{E}\{[\boldsymbol{x}(k+1)-\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)][\boldsymbol{x}(k+1)-\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)]^{\mathrm{T}}\},$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)=\mathrm{E}\{\boldsymbol{y}(k+1)|\boldsymbol{y}(t);t=k,k-1,\cdots,1\}.$$

则 **Kalman 滤波的递推算法格式为:**

(1) 初始化,$k=0$,初态为 $\hat{\boldsymbol{x}}(0),\hat{\boldsymbol{P}}(0)=\boldsymbol{P}(0)$.

(2) $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)=\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{u}(k)$.

(3) $\hat{\boldsymbol{P}}(k+1,k)=\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{P}}(k)\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{w}$.

(4) $\boldsymbol{K}(k+1)=\hat{\boldsymbol{P}}(k+1,k)\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{P}}(k+1,k)\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{V}]^{-1}$.

(5) $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)=[\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{K}(k+1)\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k]\hat{\boldsymbol{x}}(k)$

$$+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{K}(k+1)\boldsymbol{y}(k+1). \tag{38.25}$$

(6) $\hat{\boldsymbol{P}}(k+1)=\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{P}}(k)\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{K}(k+1)[\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{P}}(k+1,k)\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}$

$$+\boldsymbol{v}]^{-1}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(k+1). \tag{38.26}$$

(7) $\hat{\boldsymbol{y}}(k+1|k)=\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{x}}(k)$. (38.27)

Kalman 滤波的性质：

(1) 计算的复杂性只与输出的维数 m 有关，即计算格式中待求逆的矩阵为 m 维方阵.

(2) $\forall\varepsilon>0$ 及任意两个初态 $\hat{\boldsymbol{x}}^1(0)$，$\hat{\boldsymbol{x}}^2(0)$，若存在 $\delta>0$，使当

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}^1(0)-\hat{\boldsymbol{x}}^2(0)\|<\delta$$

时有

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}^1(k)-\hat{\boldsymbol{x}}^2(k)\|<\varepsilon, \tag{38.28}$$

则称**状态滤波** $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$是稳定的.

又若(38.24)的状态滤波稳定时，进一步满足

$$\lim_{k\to\infty}\|\hat{\boldsymbol{x}}^1(k)-\hat{\boldsymbol{x}}^2(k)\|=0, \tag{38.29}$$

则称(38.24)的**状态滤波是渐近稳定的**.

具有状态滤波渐近稳定的系统，其 **Kalman 滤波增益阵**(Kalman filtering gain matrix)$\boldsymbol{K}(k)$亦具有渐近稳定性，即

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{K}(k)=\boldsymbol{K}. \tag{38.30}$$

此时的 Kalman 滤波计算格式(5)与(6)可取为(k 足够大)

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)=[\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{K}\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{A}_k]\hat{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{k}\boldsymbol{y}(k+1), \tag{38.31}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}(k+1)=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{K}[\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{P}}(k+1,k)\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{V}]^{-1}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}. \tag{38.32}$$

(1)，(2)，(3)，(7)形式不变，(4)消失.

(3) 若 $\mathrm{E}\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)$，则任意时刻的滤波估计 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$和预测估计 $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)$是无偏的，即

$$\mathrm{E}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)=\mathrm{E}\hat{\boldsymbol{x}}(k+1)=\mathrm{E}\boldsymbol{x}(k+1).$$

(4) 预测误差 $\boldsymbol{\varepsilon}(k)$定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k)=\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{X}}(k|k-1),$$

则$\{\boldsymbol{\varepsilon}(k)\}$为零均值白噪声序列.

38.4 增广 Kalman 滤波

将 38.3 节的 Kalman 滤波方法推广应用到非线性状态空间模型,所得方法,一般称为增广 Kalman 滤波(extended Kalman filtering,EKF).

考虑非线性状态空间模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}(k))+\boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{x}(k))\boldsymbol{\xi}(k),\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}(k))+\boldsymbol{\eta}(k),\end{cases}\tag{38.33}$$

其中 $\boldsymbol{f}_k\in\mathbb{R}^n$,$\boldsymbol{g}_k\in\mathbb{R}^q$,$\boldsymbol{H}_k\in\mathbb{R}^{n\times p}$,$\{\boldsymbol{\xi}(k)\}$,$\{\boldsymbol{\eta}(k)\}$是零均值不相关噪声序列. 且满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\{\boldsymbol{\xi}(k)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(l)\}=\boldsymbol{Q}_k, && \delta(k-l),\\ &\mathrm{E}\{\boldsymbol{\eta}(k)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(l)\}=\boldsymbol{R}_k, && \delta(k-l),\\ &\mathrm{E}\{\boldsymbol{\xi}(k)\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(l)\}=\boldsymbol{0}, && \forall k,l,\\ &\mathrm{E}\{\boldsymbol{\xi}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\}=\boldsymbol{0}, && \forall k,\\ &\mathrm{E}\{\boldsymbol{\eta}(k)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\}=\boldsymbol{0}, && \forall k.\end{aligned}$$

初始估计取为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\hat{\boldsymbol{x}}(0|0)\overset{\text{def}}{=}\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0),$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(1|0)\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{f}_0(\hat{\boldsymbol{x}}(0)),$$

记

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k)=\hat{\boldsymbol{x}}(k|k),\tag{38.34}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(k+1|k)=\boldsymbol{f}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k)).\tag{38.35}$$

假设已有 $\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)$及 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$,将 $\boldsymbol{f}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k))$在 $\hat{\boldsymbol{x}}(k)$处及 $\boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}(k))$在 $\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)$处做 Taylor 展开,取它们的一阶近似得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}(k))\approx\boldsymbol{f}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k))+\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k)),\\ \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}(k))\approx\boldsymbol{g}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1))+\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{x}(k)-\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)),\end{cases}\tag{38.36}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_k=\frac{\partial \boldsymbol{f}_k}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)}\bigg|_{\hat{x}(k)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_k^1}{\partial x_1(k)} & \cdots & \dfrac{\partial f_k^1}{\partial x_n(k)}\\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_k^n}{\partial x_1(k)} & \cdots & \dfrac{\partial f_k^n}{\partial x_n(k)}\end{bmatrix}_{\hat{x}(k)},$$

$$\boldsymbol{C}_k=\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)}\bigg|_{\hat{x}(k|k-1)}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_k^1}{\partial x_1(k)} & \cdots & \dfrac{\partial g_k^1}{\partial x_n(k)}\\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k^q}{\partial x_1(k)} & \cdots & \dfrac{\partial g_k^q}{\partial x_n(k)}\end{bmatrix}_{\hat{x}(k|k-1)}.$$

记

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{f}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k))-\boldsymbol{A}_k\hat{\boldsymbol{x}}(k),\\ \boldsymbol{\Gamma}_k=\boldsymbol{H}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k)),\\ \boldsymbol{W}(k)=\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{g}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1))+\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1),\end{cases}\tag{38.37}$$

则(38.33)的一阶近似为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{\xi}(k),\\ \boldsymbol{W}(k)=\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{\eta}(k).\end{cases}\tag{38.38}$$

算法 EKF 的递推算法格式

(1) 初始化：$k=0,\hat{\boldsymbol{x}}(0)=\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)$. $\hat{\boldsymbol{P}}(0)=P(0,0)=\mathrm{Var}\,\mathbf{x}(0)$.

(2) $\boldsymbol{A}_{k-1}=\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-1)}\bigg|_{\hat{x}(k-1)}$, $k=1$.

(3) $\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)=\boldsymbol{A}_{k-1}\hat{\boldsymbol{P}}(k-1,k-1)\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}$.

(4) $\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)=\boldsymbol{f}_{k-1}(\hat{\boldsymbol{x}}(k-1))$.

(5) $\boldsymbol{C}_k=\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)}\bigg|_{\hat{x}(k|k-1)}$.

(6) $\boldsymbol{K}_k=\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k]^{-1}$.

(7) $\hat{\boldsymbol{P}}(k)\overset{\mathrm{def}}{=}\hat{\boldsymbol{P}}(k,k)=\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{C}_k\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)$.

(8) $\hat{\boldsymbol{x}}(k)\overset{\mathrm{def}}{=}\hat{\boldsymbol{x}}(k|k)=\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)+\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{y}(k)-\boldsymbol{g}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)))$.

(9) $\hat{\boldsymbol{y}}(k|k-1)=\boldsymbol{g}_k(\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1))$.

(10) 置 $k=k+1$,转(2).

38.5 状态空间模型的自适应辨识

38.5.1 引言

将 EKF 用于状态空间模型的辨识,是将系统的参数向量(一般是隐含在系数矩阵中),与系统的状态合并作为增广状态,则对于增广后的系统实施 EKF 时,原系统状态和参数向量"同时"被估计出来,一般称这类方法为自适应辨识(adaptive system identification).

38.5.2 自适应辨识算法

考虑线性时变系统模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{\Gamma}_k(\theta)\boldsymbol{\xi}(k), \\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}_k(\theta)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{\eta}(k), \end{cases} \tag{38.39}$$

其中 $\boldsymbol{A}_k(\cdot)$, $\boldsymbol{\Gamma}_k(\cdot)$, $\boldsymbol{C}_k(\cdot)$一般是已知形式的矩阵函数;$\boldsymbol{\theta}$ 为未知参数向量,实际上,$\boldsymbol{\theta}$ 应视为如下方程确定的随机变量序列 $\{\boldsymbol{\theta}(k)\}$

$$\boldsymbol{\theta}(k+1)=\boldsymbol{\theta}(k)+\boldsymbol{\zeta}(k); \tag{38.40}$$

$\{\boldsymbol{\zeta}(k)\}$是零均值白噪声,且与$\{\boldsymbol{\eta}(k)\}$不相关,方差满足

$$\mathrm{Var}\,\boldsymbol{\zeta}(k)\overset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{s}_k, \qquad \forall k; \tag{38.41}$$

对$\{\boldsymbol{\xi}(k)\}$与$\{\boldsymbol{\eta}(k)\}$的假设同(38.33). 将模型(38.39)与(38.40)合记为**增广模型**(extenden model)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(k+1) \\ \boldsymbol{\theta}(k+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_k(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{\theta}(k) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_k(\boldsymbol{\theta}(k))\boldsymbol{\xi}(k) \\ \boldsymbol{\zeta}(k) \end{pmatrix}, \tag{38.42a}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=(\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{\theta}(k)),\boldsymbol{0})\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(k) \\ \boldsymbol{\theta}(k) \end{pmatrix}+\boldsymbol{\eta}(k). \tag{38.42b}$$

模型(38.42a)右端第一项视为(38.33)中的 $\boldsymbol{f}_k(\boldsymbol{x}(k))$,模型

(38.42b)右端第一项视为(38.33)中的 $g_k(x(k))$,则按 EKF,可有以下算法.

38.5.3 算法

随机时变状态空间模型的自适应辨识递推格式

(1) 对已确定的 $\hat{\theta}(0)\overset{\text{def}}{=}\hat{\theta}(0|0)$ 构成如下初始化,$k=0$ ($\hat{\theta}(0)$ 的确定见(38.40))

$$\begin{pmatrix}\hat{x}(0)\\ \hat{\theta}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{E}\,x(0)\\ \hat{\theta}(0)\end{pmatrix},\qquad \hat{P}(0)\overset{\text{def}}{=}P(0,0)=\begin{bmatrix}\mathrm{Var}\,x_0 & 0\\ 0 & s_0\end{bmatrix}.$$

(2) $$\begin{pmatrix}\hat{x}(k|k-1)\\ \hat{\theta}(k|k-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{k-1}(\hat{\theta}(k-1))\hat{x}(k-1)\\ \hat{\theta}(k-1)\end{pmatrix},\qquad k=1,2,\cdots. \tag{38.43}$$

(3) $$\widetilde{A}_{k-1}\overset{\text{def}}{=}\begin{bmatrix}A_{k-1}(\hat{\theta}(k-1)) & \dfrac{\partial}{\partial\theta^{\mathrm{T}}}[A_{k-1}(\hat{\theta}(k-1))\hat{x}(k-1)]\\ 0 & I\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{H}_{k-1}(\hat{x}(k-1))\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\Gamma_{k-1}(\hat{\theta}(k-1)) & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\xi}(k-1)\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}\xi(k-1)\\ \zeta(k-1)\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q}_{k-1}=\mathrm{E}\{\boldsymbol{\xi}(k-1)\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(k-1)\}=\begin{bmatrix}Q_{k-1} & 0\\ 0 & \zeta_{k-1}\end{bmatrix},$$

$$\widetilde{H}_{k-1}(\hat{x}(k-1))\widetilde{Q}_{k-1}\widetilde{H}_{k-1}^{\mathrm{T}}(\hat{x}(k-1))$$
$$=\begin{bmatrix}\Gamma_{k-1}(\hat{\theta}(k-1))Q_{k-1}\Gamma_{k-1}^{\mathrm{T}}(\hat{\theta}(k-1)) & 0\\ 0 & S_{k-1}\end{bmatrix}.$$

(4) $$\hat{P}(k,k-1)=\widetilde{A}_{k-1}\hat{P}(k-1)\widetilde{A}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\widetilde{H}_{k-1}(\hat{x}(k-1))\widetilde{Q}_{k-1}\cdot\widetilde{H}_{k-1}^{\mathrm{T}}(\hat{x}(k-1)). \tag{38.44}$$

(5) $$\widetilde{C}_k\overset{\text{def}}{=}(C_k(\hat{\theta}(k|k-1)),0),$$
$$K_k=\hat{P}(k,k-1)\widetilde{C}_k^{\mathrm{T}}[\widetilde{C}_k\hat{P}(k,k-1)\widetilde{C}_k^{\mathrm{T}}+R_k]^{-1}. \tag{38.45}$$

(6) $\hat{\boldsymbol{P}}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\boldsymbol{P}}(k,k) = \hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1) - \boldsymbol{K}_k \widetilde{\boldsymbol{C}}_k \hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1).$

$$(38.46)$$

(7) $$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(k) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(k|k-1) \end{pmatrix} + \boldsymbol{K}_k [\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{C}_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}(k|k-1)) \cdot \hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)], \tag{38.47}$$

其中 $\boldsymbol{S}_k$ 可取为常数矩阵 $\boldsymbol{S}>0$.

38.5.4 EKF 的参数估计初始化问题

假设 $\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)$ 为已知，可由(38.39)求解一个 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$.

(1) 将 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ 视为待求的确定性常向量，由(38.39)第二式可得

$$\mathrm{E}\{\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)\} = 0,$$

$$\boldsymbol{y}(0) - C_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\eta}_0.$$

取 $\mathrm{Var}\,[\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)]$ 的估计为

$$[\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)][\boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)]^{\mathrm{T}},$$

可得如下近似等式

$$\boldsymbol{y}(0)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(0) - \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(0) - \boldsymbol{y}(0)[\boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)\mathrm{E}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{Var}\,\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{C}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{R}_0. \tag{38.48}$$

关于 $\boldsymbol{\theta}$ 求解方程(38.48)，若得到一个解，则以该解做 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$；若无解，则进一步由(38.39)令 $k=1$，重复(1)的步骤.

(2) $k=1$ 时，与(38.48)类似地处理可得到近似等式

$$\boldsymbol{y}(1)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(1) - \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(1) - \boldsymbol{y}(1)[\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)]^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Gamma}_0(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{Q}_0[\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Gamma}_0(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{E}\boldsymbol{x}(0)\mathrm{E}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0) = \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{\theta})\mathrm{Var}\,\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{R}_1. \tag{38.49}$$

求解(38.49)……直到得到一个 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ 为止.

38.6 应用

例 38.6.1 考虑一维模型的自适应辨识

$$\begin{cases} x(k+1)=ax(k), \\ y(k)=x(k)+\eta(k). \end{cases}$$

记 $a(k+1)=a(k)+\zeta(k)$,并假设

$$\mathrm{E}\zeta(k)=0, \qquad \mathrm{Var}\ \zeta(k)=0.01,$$

$$\mathrm{E}x(0)=1, \qquad \mathrm{Var}\ \boldsymbol{x}(0)=0.01,$$

$$\mathrm{E}\eta(k)=0, \qquad \mathrm{Var}\ \eta(k)=0.01.$$

则增广状态模型是

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x(k+1) \\ a(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(k)x(k) \\ a(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta(k) \end{pmatrix}, \\ y(k)=(1,0)\begin{pmatrix} x(k) \\ a(k) \end{pmatrix}+\eta(k). \end{cases}$$

(1) 初始化

由(38.49)可得方程

$$y^2(1)-1.1a-1.1a-0+a^2-0.01a^2-0.01=0.$$

解得(由仿真数据取得 $y(1)=-1.1$)

$$0.99a^2+2.2a+1.2=0,$$

$$a_1=-1.261, \qquad a_2=-0.961.$$

取 $\hat{a}(0)=a_1$ 或 a_2

$$\hat{\boldsymbol{P}}(0)=\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

对 $k=1,2,\cdots$结果是:

(2) $$\begin{pmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{a}(k|k-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{a}(k-1)\hat{x}(k-1) \\ \hat{a}(k-1) \end{pmatrix}.$$

(3) $$\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)=\begin{pmatrix} \hat{a}(k-1) & \hat{x}(k-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\hat{\boldsymbol{P}}(k-1)\cdot \begin{pmatrix} \hat{a}(k-1) & 0 \\ \hat{x}(k-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) $\boldsymbol{K}_k=\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\left((1,0)\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0.01\right)^{-1}$.

(5) $\hat{\boldsymbol{P}}(k)=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\boldsymbol{K}_k(1,0)\right]\hat{\boldsymbol{P}}(k,k-1)$.

(6) $\begin{pmatrix}\hat{x}(k)\\\hat{a}(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{a}(k-1)\hat{x}(k-1)\\\hat{a}(k-1)\end{pmatrix}+\boldsymbol{K}_k(y(k)-\hat{a}(k-1)\hat{x}(k-1))$.

由仿真数据,$k\geqslant10$,即有良好的收敛性,参数真值 $a=1$. 辨识中将 a 视为随机序列$\{a(k)\}$是必需的.

注 若将 a 视为确定性常数,则可得增益阵

$$\boldsymbol{K}_k=\begin{pmatrix}g(k)\\0\end{pmatrix}\quad 因为\quad \hat{\boldsymbol{P}}(0)=\begin{pmatrix}0.01&0\\0&0\end{pmatrix},$$

其中 $g(k)$为某一数,这将导致 a 不可辨识.

例 38.6.2 卫星轨道估计问题

应用 EKF,考虑地球卫星轨道的估计问题,其模型为如下非线性方程(m,g 分别表示质量和引力常数)

$$\begin{cases}\ddot{r}=r\dot{\theta}^2-mgr^{-2}+\xi_r,\\ \ddot{\theta}=-2r^{-1}\dot{r}\dot{\theta}+r^{-1}\xi_\theta,\end{cases}\tag{38.50}$$

其中 $r=r(t)$为卫星距地心的向径,$\theta=\theta(t)$为卫星对过地心的某一参考轴的偏角. 现应用 EKF,估计 r 与 θ. ξ_r 与 ξ_θ 为互不相关的零均值白噪声. 假设 r 可以观测到其数据. 先将(38.50)化为状态方程,引入状态变量

$$\boldsymbol{x}=(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta})^{\mathrm{T}}\overset{\text{def}}{=}(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))^{\mathrm{T}}.$$

方程(38.50)变为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}x_2(t)\\x_1(t)x_4^2(t)-mg/x_1^2(t)\\x_4(t)\\-2x_2(t)x_4(t)/x_1(t)\end{bmatrix}$$

$$
+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/x_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_r(t) \\ 0 \\ \xi_\theta(t) \end{pmatrix}. \tag{38.51}
$$

离散化近似：以 $\boldsymbol{x}(k)$ 代替 $\boldsymbol{x}(t)$，以 $(\boldsymbol{x}(k+1)-\boldsymbol{x}(k))/h$ 代替 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$，$h>0$ 为采样长度．则(38.51)离散化方程与观测方程构成如下模型：

$$
\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}(k))\boldsymbol{\xi}(k), \\ \boldsymbol{y}(k)=(1,0,0,0)\boldsymbol{x}(k)+\eta(k), \end{cases} \tag{38.52}
$$

其中 $\boldsymbol{\xi}(k)=(0,\xi_r(k),0,\xi_\theta(k))^{\mathrm{T}}$，$\eta(k)$ 为观测噪声，并假设 $\{\eta(k)\}$ 为与 $\{\xi(k)\}$ 不相关的零均值白噪声．

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k))=\begin{pmatrix} x_1(k)+hx_2(k) \\ x_2(k)+hx_1(k)/x_4^2(k)-hmg/x_1^2(k) \\ x_3(k)+hx_4(k) \\ x_4(k)-2hx_2(k)x_4(k)/x_1(k) \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}(k))=\begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h/x_1(k) \end{pmatrix}.
$$

按 38.4 节中的算法，只须算出 $\boldsymbol{A}_{k-1}$，$\boldsymbol{C}_k$ 及 $\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{x}}(k-1))$．

$$
\boldsymbol{A}_{k-1}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k-1))}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k-1)}\right|_{\hat{\boldsymbol{x}}(k-1)}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{2hmg\hat{x}_1^3(k-1)+h}{\hat{x}_4^2(k-1)} & 0 & \dfrac{2h\hat{x}_2(k-1)\hat{x}_4(k-1)}{x_1^2(k-1)} \\ h & 1 & & \dfrac{-2h\hat{x}_4(k-1)}{\hat{x}_1(k-1)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-2h\hat{x}_1(k-1)}{\hat{x}_4^3(k-1)} & h & \dfrac{1-2h\hat{x}_2(k-1)}{\hat{x}_1(k-1)} \end{pmatrix},
$$

$$c_k=\frac{\partial g(\boldsymbol{x}(k))}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)}\bigg|_{\hat{x}(k|k-1)}=(1,0,0,0),$$

$$\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{x}}(k-1))=\begin{pmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h/\hat{x}_1(k-1) \end{pmatrix}.$$

最后按 38.4 节的算法(8)即可得到卫星轨道估计 $\hat{x}_1(k)$与 $\hat{x}_3(k)$.

39 连续系统的辨识

39.1 引言

自 20 世纪 70 年代发展并成熟起来的系统辨识理论与方法，主要是针对离散系统的．从应用角度来说，这几乎是必然的，因为在绝大多数场合下，动态系统数学模型的建模与计算实施都是从离散采样数据入手的．许多问题，有了系统的离散模型便可以达到目的，比如大量的控制问题和预报问题即是如此．但也还有一些场合，只有离散系统模型是不够的，比如药物动力学要研究药物在人体内转移和排除的速率．机械系统中的模态分析要研究广义质量，刚度以及阻尼之间的机理关系，导航定位系统要研究位置、速度、加速度以及随机干扰之间的关系，等等．这类系统都需要建立系统的连续时间模型，因此，连续系统的辨识问题也具有重要的理论和实际意义．

连续系统辨识问题可以有两类方法，第一类是根据系统的离散采样数据首先建立相应的离散系统模型，而后再复原得到连续系统的模型，当然，二者可交替或在线进行，这类方法称为**间接辨识方法**．第二类是根据连续系统的输入输出模型，利用离散采样数据直接进行积分（数值积分），从而得到连续系统的拟合模型，这类方法称为**直接辨识方法**．连续系统的间接辨识方法主要是矩阵对数的计算问题，已有许多方法可以达到很满意的精度．而直接辨识方法，实施较方便，但目前已有的方法一般尚不能达到高精度的要求．

本章给出一些较成熟的结果．

39.2 采样与模型

用 S_C 和 S_D 分别表示连续系统和相应的离散系统，并设 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times r}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

$$S_C:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}.\end{cases}\tag{39.1}$$

设均匀采样时间区间 T 为单位时间长度.

$$S_D:\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(k),\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{v}(k),\end{cases}\tag{39.2}$$

其中$\{\boldsymbol{v}(k)\}$为观测噪声，均值为零，且不相关.

(1) 脉冲近似采样

$$\boldsymbol{u}(kT+\tau)=T\boldsymbol{u}(kT)\delta(\tau),\quad 0\leqslant\tau<T,$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{T}\ln\boldsymbol{F},\qquad \boldsymbol{B}=\frac{1}{T}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{G},\qquad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{H}.\tag{39.3}$$

(2) 阶跃近似采样

$$\boldsymbol{u}(kT+\tau)=\boldsymbol{u}(kT),\quad 0\leqslant\tau<T,$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{T}\ln\boldsymbol{F},\qquad \boldsymbol{B}=\frac{1}{T}[\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I}]^{-1}[\ln F]\boldsymbol{G},\qquad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{H}.\tag{39.4}$$

上述关系参见 34.11.2 节.

采样限制　T 应满足采样定理 35.11.5.

$$|\lambda_i(\boldsymbol{AT})|\leqslant 0.5,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\lambda_i(\boldsymbol{AT})$是 $\boldsymbol{AT}$ 的特征值.

39.3 ln F 的解析算法

ln $\boldsymbol{F}$ 的解析算法可以通过矩阵函数标准形的任何一种方法来实现，可参见本卷 31.4 节. 以下结合矩阵函数的 Jordan 标准形和

Lagrange - Sylvester 内插多项式标准形，给出计算 $A=\frac{1}{T}\ln F$ 的常用公式.

(1) 设 $F\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的相异特征值为 $\mu_1,\cdots,\mu_s$，则 A 亦有 s 个相异特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，且

$$\lambda_j=\frac{1}{T}\ln\mu_j=\frac{1}{T}\log|\mu_j|+\frac{\mathrm{i}}{T}\arg\mu_j, \tag{39.5}$$

其中 log 表示取对数主值 arg 为主辐角.

(2) 若 F 为 Jordan 矩阵，即

$$F=\begin{pmatrix}\mu & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & 0\\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \mu\end{pmatrix}, \tag{39.6}$$

则

$$A=\frac{1}{T}\begin{pmatrix}\ln\mu & \mu^{-1} & -\mu^2 & \cdots & (-1)^{n-1}(n-2)!\ \mu^{-n+1}\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & -\mu^2\\ & 0 & & \ddots & \mu^{-1}\\ & & & & \ln\mu\end{pmatrix}. \tag{39.7}$$

(3) 若 F 的条件满足(1)，则 $\ln F$ 的 Lagrange-Sylvester 内插多项式标准形为

$$\ln F=\sum_{k=1}^{s}[\alpha_{k1}I+\alpha_{k2}(A-\mu_kI)+\cdots+\alpha_{kd_k}(A-\mu_kI)^{d_k-1}]\varphi_k\mu, \tag{39.8}$$

$$\alpha_{kl}=\frac{1}{(l-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}\mu^{l-1}}\left(\frac{(\mu-\mu_k)^{d_k}\ln\mu_k}{\psi_{\mathrm{m}}(\mu)}\right)\right]_{\mu=\mu_k},$$

$$k=1,\cdots,s;\quad l=1,\cdots,d_k, \tag{39.9}$$

$$\psi_m(\mu)=(\mu-\mu_1)^{d_1}(\mu-\mu_2)^{d_2}\cdots(\mu-\mu_s)^{d_s} \quad (\boldsymbol{F}\text{ 的最小多项式}), \tag{39.10}$$

$$\varphi_k(\mu)\overset{\text{def}}{=}\frac{\psi_m(\mu)}{(\mu-\mu_k)^{d_k}}=(\mu-\mu_1)^{d_1}\cdots(\mu-\mu_{k-1})^{d_{k-1}}\cdot(\mu-\mu_{k+1})^{d_{k+1}}\cdots(\mu-\mu_s)^{d_s}, \tag{39.11}$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{T}\ln \boldsymbol{F}. \tag{39.12}$$

特别地，当 $d_1=d_2=\cdots=d_s=1$ 时，当然包括 $\boldsymbol{F}$ 有 n 个相异特征值时($n=s$)，

$$\ln \boldsymbol{F}=\sum_{k=1}^{s}(\ln \mu_k)\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{F}), \tag{39.13}$$

$$\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{F})\overset{\text{def}}{=}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{s}\frac{\boldsymbol{F}-\mu_j\boldsymbol{I}}{\mu_k-\mu_j}, \qquad k=1,\cdots,s. \tag{39.14}$$

(4) 直接求逆方法(Padé(帕德)近似)

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{T}\ln \boldsymbol{F}=2(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{I})^{-1}, \tag{39.15}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{4}{T}(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{I})^{-2}\boldsymbol{G}. \tag{39.16}$$

39.4 ln *F* 的级数算法

按矩阵函数定义 31.4.6，$\ln \boldsymbol{F}$ 的直接展开级数为

$$\ln \boldsymbol{F}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^k, \qquad \|\boldsymbol{F}\|<1. \tag{39.17}$$

可取(39.17)的有限项作为近似. 加快收敛速度的改进级数展开式为

$$\ln \boldsymbol{F}=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\boldsymbol{R}^{2k-1}, \qquad \operatorname{Re}\mu_j(\boldsymbol{F})>0, \tag{39.18}$$

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{I})^{-1}. \tag{39.19}$$

取(39.18)的几何级数近似，可有 $\ln \boldsymbol{F}$ 的有限项级数近似

$$\ln \boldsymbol{F}=2\left[\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\boldsymbol{R}^{2k-1}}{2k-1}+\frac{\boldsymbol{R}^{2N-1}}{2N-1}\left(1-\frac{\boldsymbol{R}^2}{1+\dfrac{2}{2N-1}}\right)^{-1}\right], \tag{39.20}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 由(39.19)定义.

39.5 ln *F* 的数值迭代算法

矩阵对数的解析算法对阶数高的 $\boldsymbol{F}$ 矩阵是不方便的，而级数方法要达到较高精度，将导致计算量的加大. 因此，数值迭代(numerical iteration)方法往往显得更为重要.

算法 39.5.1

$$(\boldsymbol{AT})^{(j+1)}=(\boldsymbol{AT})^{(j)}+\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}^{(j)}),$$

$$\boldsymbol{F}^{(j)}=\sum_{k=0}^{M}\frac{1}{k!}[\boldsymbol{AT}^{(j)}]^k \qquad (M\text{ 足够大}),$$

$$(\boldsymbol{AT})^{(0)}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}^{-1}).$$

定理 39.5.2 设 $e^{\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{F}$，对算法 39.5.1 记

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}=(\boldsymbol{AT})^{(j)}-\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}.$$

若对某个 $\delta>0$ 使得 $\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)}\|<\frac{6}{5}-\delta$，则

(1) $\lim\limits_{j\to\infty}\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}\|=0$，即算法 39.5.1 收敛.

(2) 当 δ 满足 $0<\delta<1$ 时，有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(j+1)}\|}{\|\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}\|^2}=\frac{1}{2},$$

即算法 39.5.1 是二阶收敛的.

注 39.5.3 (1) 当 S_C(39.1)中的常数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 换为 $\boldsymbol{A}(t)$时，若满足 $\boldsymbol{A}(t)$与 $\int_0^t \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau$ 可交换的条件，则可用形如(39.1)式的时变系统的辨识所对应的算法，此时可获得 $\left\{\int_0^{t_k} \boldsymbol{A}(\tau)\mathrm{d}\tau\right\}$ 的估计序列，进一步利用差分和函数拟合的方法，可得到 $\boldsymbol{A}(t)$的估计.

(2) 当连续系统由高阶线性微分方程描述时，可将高阶微分方程先化为状态空间模型，而后根据连续系统与离散系统模型转换的关系进行辨识.

(3) 一般实际工作中，也常取例 38.6.2 中离散化的方法，即差分代替微分，也能取得较满意的效果，在线性系统的场合，这相当于取 $\mathrm{e}^{AT} \approx \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}T$(一阶近似).

40 系统预报

40.1 引言

系统预报的理论与方法是系统分析的重要组成部分,也是应用数学中有着广泛应用背景的一个部分.随着计算机应用的迅速普及,系统预报的理论与方法大量地用于工业、军事、天气、航天以及社会经济的各个领域.一般来说,应用于实际对象的预报模型、理论与方法不尽相同.本章提供的系统预报方法是基于最小方差估计意义下的结果.

40.2 最小方差预报

定义 40.2.1 考虑动态系统

$$y(k)=f(Y^{k-1},U^{k-1},\boldsymbol{\theta},k)+\varepsilon(k), \tag{40.1}$$

其中

$$Y^{k-1}=\{y(t)\mid t=k-1,k-2,\cdots\}, \tag{40.2}$$

$$U^{k-1}=\{u(t)\mid t=k-1,k-2,\cdots\}, \tag{40.3}$$

$\{\varepsilon(k)\}$为模型噪声,均值为零.若存在 $y(t+d)$的线性无偏估计

$$\hat{y}(t+d)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k y(t-k)+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k u(t-k)\quad(d>0), \tag{40.4}$$

使得

$$\mathrm{E}\{(y(t+d)-E\hat{y}(t+d))^2\}=\inf \mathrm{E}\{(y(t+d)-\hat{y}(t+d\mid\tilde{\alpha}_k,\tilde{\beta}_k))^2\}, \tag{40.5}$$

则称 $\hat{y}(t+d)$ 为 $y(t+d)$ 的 d 步最小方差预报(least mean squares prediction). 其中 $\hat{y}(t+d|\tilde{\alpha}_k,\tilde{\beta}_k)$ 是(40.5)中 α_k 与 β_k 由 $\hat{\alpha}_k$ 和 $\hat{\beta}_k$ 分别替换后构成的估计. 最小方差预报常常记为 $\hat{y}(k+d|k)$ 或 $\hat{y}(k+d|\theta,k)$ 的形式,其中 $\boldsymbol{\theta}$ 表示模型(40.1)中的参数向量.

最小方差预报的性质

(1) 最小方差预报是条件均值或正交投影

$$\hat{y}(k+d|k)=\mathrm{E}\{y(k+d)|Y^{k-1},U^{k-1},\boldsymbol{\theta}\}, \tag{40.6}$$

即 $\hat{y}(k+d)$ 是 $y(k+d)$ 在 $\{Y^{k-1},U^{k-1}\}$ 各元素张成的子空间上的正交投影.

(2) 设 $y^*(k+d)$ 是任意不同于 $\hat{y}(k+d|k)$ 的线性无偏估计, 则 $\hat{y}(k+d|k)$ 为最小方差估计的充要条件是

$$E\{(y(k+d)-\hat{y}(k+d|k))y^*(k+d)\}=0. \tag{40.7}$$

40.3 权函数模型的预报

40.3.1 模型

本节均以下列权函数模型为对象

$$y(k)=G(z^{-1})u(k)+H(z^{-1})e(k), \tag{40.8}$$

$$\varepsilon(k)=H(z^{-1})e(k), \tag{40.9}$$

其中 $G(z),H(z)$ 的零点和极点均在单位圆内,$\{e(k)\}$ 是 σ^2 为方差的零均值白噪声,$\{u(k)\}$ 是与 $\{e(k)\}$ 不相关的拟平稳序列,与 $G(z^{-1})$ 和 $H(z^{-1})$ 相应的脉冲响应序列分别记为

$$g(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{G(z^{-1})\}, \tag{40.10}$$

$$h(k)=\mathscr{Z}^{-1}\{H(z^{-1})\}. \tag{40.11}$$

40.3.2 预报函数(预报器)

一步向前预报器(predictor)

$$\hat{\varepsilon}(k \mid k-1) = [1-H^{-1}(z^{-1})]\varepsilon(k) = H^{-1}(z^{-1})[H(z^{-1})-1]\varepsilon(k)$$

$$= -\sum_{t=1}^{\infty}\tilde{h}(t)\varepsilon(k-t), \tag{40.12}$$

$$\hat{y}(k \mid k-1) = H^{-1}(z^{-1})G(z^{-1})u(k) + [1-H^{-1}(z^{-1})]y(k)$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} l(t)u(k-t) + \sum_{t=1}^{\infty} -\tilde{h}(t)y(k-t), \tag{40.13}$$

其中$\{\tilde{h}(k)\}$是相应于 $H^{-1}(z^{-1})$的脉冲响应序列,$\{l(k)\}$满足展开式

$$H^{-1}(z^{-1})G(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} l(k)z^{-k}. \tag{40.14}$$

预报误差

$$\tilde{y}(k) \stackrel{\text{def}}{=} y(k) - \hat{y}(k|k-1) = e(k).$$

注 40.3.1 (1) 当 $H(z^{-1})=1$ 时,(40.13)变为

$$\hat{y}(k \mid k-1) = G(z^{-1})u(k). \tag{40.15}$$

(2) 当 $H(z^{-1})\neq 1$ 时,(40.13)需要 k 之前的无限多个观测数据,这时可用下式近似:

$$\hat{y}(k \mid k-1) \approx \sum_{t=1}^{k} l(t)u(k-t) + \sum_{t=1}^{k} -\tilde{h}(t)y(k-t). \tag{40.16}$$

d 步向前预报器

$$\hat{\varepsilon}(k+d|k) = \widetilde{H}_d(z^{-1})H^{-1}(z^{-1})\varepsilon(k), \tag{40.17}$$

$$\hat{y}(k+d|k) = W_d(z^{-1})G(z^{-1})u(k+d) + \widetilde{H}_d(z^{-1})H^{-1}(z^{-1})y(k), \tag{40.18}$$

$$\widetilde{H}_d(z^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=d}^{\infty} h(l)z^{-l+d}, \tag{40.19}$$

$$W_d(z^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - z^{-d}\widetilde{H}_d(z^{-1})H^{-1}(z^{-1})$$
$$= [H(z^{-1}) - z^{-d}\widetilde{H}_d(z^{-1})]H^{-1}(z^{-1}), \quad (40.20)$$

其中(40.18)还可记为

$$y(k|k-d) = W_d(z^{-1})G(z^{-1})u(k) + [1 - W_d(z^{-1})]y(k).$$

d 步预报误差

$$\tilde{y}(k+d) \stackrel{\text{def}}{=} y(k+d) - \hat{y}(k+d|k) = \widetilde{H}_d(z^{-1})e(k+d).$$

注 (1) 当 $H(z^{-1}) = 1$ 时, $\widetilde{H}_d(z^{-1}) = 0$, $W_d(z^{-1}) = 1$, (40.18)变为

$$\hat{y}(k+d|k) = G(z^{-1})u(k+d). \quad (40.21)$$

(2) 当 $H(z^{-1}) \neq 1$ 时,实际应用中需取类似(40.16)的近似公式.

40.3.3 多变量系统的预报

以上公式均为针对(40.8)为单输入单输出情形的,对多变量系统,只须引入脉冲传递函数矩阵及其逆矩阵,则以上公式均可参照应用.脉冲传递函数阵及其逆矩阵按下述定义.

$$\boldsymbol{H}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{h}(k) z^{-k}, \quad (40.22)$$

$$\boldsymbol{H}^{-1}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\boldsymbol{h}}(k) z^{-k}, \quad (40.23)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{h}}(k)$ 和 $\boldsymbol{h}(k)$ 均为 $p \times p$ 矩阵,展开式应理解为由矩阵每个元素展开而得到.

40.4 输入输出模型的预报

40.4.1 模型

本节以下列输入-输出模型为对象

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})e(k), \quad (40.24)$$

其中 $A(z)$, $C(z)$ 为稳定多项式,即零点位于单位圆内, $A(z)$ 与

$B(z)$,$C(z)$互质. $\{e(k)\}$与$\{u(k)\}$同模型(40.8). (40.24)称为**ARMAX模型**.

$$A(z^{-1})=1+a_1z^{-1}+\cdots+a_pz^{-p},$$
$$B(z^{-1})=b_1z^{-1}+\cdots+b_mz^{-m}, \qquad m\leqslant p,$$
$$C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+\cdots+c_qz^{-q}, \qquad q\leqslant p.$$

40.4.2 预报函数(预报器)

一步预报器

$$\begin{aligned}\hat{y}(k|k-1)&=C^{-1}(z^{-1})[C(z^{-1})-A(z^{-1})]y(k)\\&\quad+C^{-1}(z^{-1})B(z^{-1})u(k)\\&=[1-C^{-1}(z^{-1})A(z^{-1})]y(k)\\&\quad+C^{-1}(z^{-1})B(z^{-1})u(k),\end{aligned} \tag{40.25}$$

或表示为递推预报形式

$$C(z^{-1})\hat{y}(k|k-1)=[C(z^{-1})-A(z^{-1})]y(k)+B(z^{-1})u(k). \tag{40.26}$$

上式右端为 $q+1$ 个预报之和,计算中需要 q 个初值. 设 μ 为$C(z)$零点的最大模,则(40.26)中预报 $\hat{y}(k|k-1)$所受 q 个预报初值影响将以 $C\mu^k$ 的速度递减. 一步预报误差为 $e(k)$.

当 $C(z^{-1})=1$ 时,(40.25)变为

$$\hat{y}(k|k-1)=[1-A(z^{-1})]y(k)+B(z^{-1})u(k). \tag{40.27}$$

d 步预报器

$$\begin{aligned}\hat{y}(k+d|k)&=C^{-1}(z^{-1})G(z^{-1})y(k)+C^{-1}(z^{-1})F(z^{-1})\cdot\\&\quad B(z^{-1})u(k+d),\end{aligned} \tag{40.28}$$

其中 $G(z^{-1})$与 $F(z^{-1})$满足

$$A^{-1}(z^{-1})C(z^{-1})=F(z^{-1})+z^{-d}A^{-1}(z^{-1})G(z^{-1}), \tag{40.29}$$
$$F(z^{-1})=1+f_1z^{-1}+\cdots+f_{d-1}z^{-(d-1)}, \tag{40.30}$$
$$G(z^{-1})=g_0+g_1z^{-1}+\cdots+g_lz^{-l}, \qquad l=\max\{q-d,p-1\}, \tag{40.31}$$

当 $l<0$ 时，规定 $G(z^{-1})=0$.

式(40.28)可以写成如下递推格式：

$$C(z^{-1})\hat{y}(k+d|k)=G(z^{-1})y(k)+F(z^{-1})B(z^{-1})u(k+d). \tag{40.32}$$

当 $C(z^{-1})=1$ 时，式(40.28)变为

$$\hat{y}(k+d|k)=[1-A(z^{-1})F(z^{-1})]y(k+d)+F(z^{-1})B(z^{-1})u(k+d). \tag{40.33}$$

d 步预报误差及方差

$$\tilde{y}(k+d)=y(k+d)-\hat{y}(k+d|k)=\begin{cases}F(z^{-1})e(k+d), & d\leqslant q,\\ C(z^{-1})e(k+d), & d>q,\end{cases} \tag{40.34}$$

$$\mathrm{Var}\ \hat{y}(k+d|k)=\begin{cases}\sigma^2(1+f_1^2+\cdots+f_{d-1}^2), & d\leqslant q,\\ \sigma^2(1+c_1^2+\cdots+c_q^2), & d>q.\end{cases} \tag{40.35}$$

40.5 状态空间模型的预报

状态空间模型预报的有效方法，即是 Kalman 滤波方法. 可直接参见 38.3 节～38.6 节，其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(k|k-1)$ 与 $\hat{\boldsymbol{y}}(k|k-1)$ 即是预报. **Kalman 方法给出的预报不仅适用于定常系统，而且适用于时变系统，并且对非线性系统也有较满意的效果(EKF).**

40.6 自适应预报

40.6.1 引言

40.3 节～40.4 节的预报方法均以已知参数的模型为对象. 根据实际预报对象的情况，常常是参数未知，这时的处理方法，可以将参数辨识和系统预报交替进行，也可以按预报误差模型方法

(PEM)，直接求解作为预报误差模型(也称预报器)中的参数，从而直接计算预报值. 这两类方法都称为**自适应预报**(adaptive prediction). 以下给出 PEM 的结果.

40.6.2 PEM 自适应预报算法

取模型(40.24)的递推预报格式(40.32)，引入记号

$$
\begin{aligned}
P(z^{-1}) &= B(z^{-1})F(z^{-1}) \\
&= p_1 z^{-1} + \cdots + p_s z^{-s}, \quad s = m+d-1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k+d,\boldsymbol{\theta}) = (&y(k),\cdots,y(k-l),-\hat{y}(k+d-1|k-1;\boldsymbol{\theta}),\\
&\cdots,-\hat{y}(k+d-q|k-q;\boldsymbol{\theta}),\\
&u(k+d-1),\cdots,u(k+d-s)),
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} = (g_0, g_1, \cdots, g_l, c_1, \cdots, c_q, p_1, \cdots, p_s).
$$

式(40.32)变为

$$
\hat{y}(k+d|k;\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(k+d,\boldsymbol{\theta}). \tag{40.36}
$$

预报误差的负梯度记为

$$
\boldsymbol{\psi}(k) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}}\hat{y}(k+d|k;\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{C(z^{-1})}\boldsymbol{\varphi}(k+d,\boldsymbol{\theta}), \tag{40.37}
$$

则 d 步向前预报误差递推算法为

$$
\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + r_k \boldsymbol{R}^{-1}(k)\boldsymbol{\psi}(k)e(k), \tag{40.38a}
$$

$$
e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1), \tag{40.38b}
$$

$$
\hat{y}(k|k-d) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(k), \tag{40.38c}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k) = (&y(k-d),\cdots,y(k-d-l),\cdots,\\
&-\hat{y}(k-1|k-d-1),\cdots,-\hat{y}(k-q|k-d-q),\\
&u(k-1),\cdots,u(k-s)),
\end{aligned} \tag{40.38d}
$$

$$
\boldsymbol{\psi}(k) = \frac{1}{\hat{C}_{k-1}(z^{-1})}\boldsymbol{\varphi}(k), \tag{40.38e}
$$

$$
\boldsymbol{R}(k) = \boldsymbol{R}(k-1) + r(k)[\boldsymbol{\psi}(k)\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k) - \boldsymbol{R}(k-1)], \tag{40.38f}
$$

其中 $\hat{C}_{k-1}(z^{-1})$ 是由 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}$ 中的参数代入 $C(z^{-1})$ 而得到，r_k 是一个

收敛因子，满足（由用户选择）

$$r_k \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} r_k = \infty, \qquad \sum r_k^2 < \infty. \tag{40.39}$$

一般推荐取 $r_k = 1/k$. 式(40.38d)中的预报值可用后验值代替，即

$$\hat{y}(k-\tau|k-d-\tau) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-\tau}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}(k-\tau), \qquad \tau = 1, \cdots, q,$$

而预报初值可用观测值代替（假设递推格式是从 $k=q+1$ 开始）.

算法(40.38a～f)的一种近似是将 $\boldsymbol{\psi}(k)$ 统统换为 $\boldsymbol{\varphi}(k)$，这相当于忽略(40.36)对隐含 $\boldsymbol{\theta}$ 的依赖性. 即式(40.38a)与式(40.38f)变为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + r_k \boldsymbol{R}^{-1}(k) \boldsymbol{\varphi}(k) e(k), \tag{40.40a}$$

$$\boldsymbol{R}(k) = \boldsymbol{R}(k-1) + r_k [\boldsymbol{\varphi}(k) \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(k) - \boldsymbol{R}(k-1)]. \tag{40.40b}$$

式(40.38e)消失，这对许多实际情形可以满足要求.

偏微分方程

41　偏微分方程基本概念

41.1　基本概念

定义 41.1.1　包含未知函数、未知函数的偏导数、自变量的方程称为**偏微分方程**(partial differential equation, PDE).

定义 41.1.2　出现在偏微分方程中未知函数最高阶偏导数的阶数称为**方程的阶**(order of PDE).

定义 41.1.3　如果一个偏微分方程对所有的未知函数及其导数来说都是线性的，则称为**线性偏微分方程**(linear PDE).

定义 41.1.4　如果一个偏微分方程对未知函数的所有最高阶导数来说是线性的，则称为**拟线性偏微分方程**(quasilinear PDE).

例 41.1.5　方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=0,$$

对未知函数 u 是二阶拟线性方程. 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2u,$$

对未知函数 u 来说是二阶线性方程. 方程

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=u,$$

对于函数 u 既不是线性的也不是拟线性的，称为**非线性方程**（nonlinear PDE）.

定义 41.1.6 一组函数将它们代替微分方程中的未知函数后，这个方程对其全体自变量来说成为一个恒等式，这样的一组函数称为**解**（solution）.

为研究偏微分方程的解，先给出下列重要的方程

例 41.1.7 （1）$-\Delta u=f$（或 $-\nabla^2 u=f$）Poisson 方程（Poisson equation）或位势方程.

（2）$u_t-a^2\Delta u=f$ 热传导方程.

（3）$u_{tt}-a^2\Delta u=f$ 波动方程.

（4）$\Delta u+\lambda u=0$ Helmholtz 方程.

（5）$\Delta^2 u=0$ 双调和方程.

（6）$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u+\lambda u=0$ Klein - Gordon 方程.

41.2 定解条件

为了确定微分方程的解，通常对方程附加一些条件，称为定解条件，常见的类型有：初始条件、边界条件、相容性条件、周期性条件、有界性条件等.

定义 41.2.1 初始条件（initial condition）是指对时间变量 $t=t_0$ 时刻给出的定解条件. 习惯上取 $t_0=0$，即 $u(\boldsymbol{x},t_0)=\xi(\boldsymbol{x})$.

定义 41.2.2 第一类边界条件（boundary condition of 1st class）是指

$$u(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t),\qquad \forall\, \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$\phi(\boldsymbol{x},t)$ 是已知函数，Ω 是微分方程的定义区域.

定义 41.2.3 第二类边界条件是指

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\phi(\boldsymbol{x},t),\qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega,$$

其中 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 为已知函数，$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是边界 $\partial\Omega$ 的外法向导数.

定义 41.2.4 第三类边界条件是指

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+hu=\phi(\boldsymbol{x},t),\qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in\partial\Omega,$$

其中 h 是给定常数或函数，其他记号同上.

例 41.2.5 对于弦的振动，各种定解条件为：

(1) 初始条件　即必须给出弦上各点在初始时刻 $t=0$ 的位移和速度.

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l,$$
$$u_t(x,0)=\psi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l,$$

其中 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为已知函数.

(2) 边界条件有下列 3 种：

① 已知端点的位移变化，即

$$u(0,t)=g_1(t),\quad u(l,t)=g_2(t),\qquad t\geqslant 0.$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)\equiv 0$ 时，称弦具有固定端.

② 已知在端点所受的垂直于弦线的外力的作用，即

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=g_1(t),\qquad T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=g_2(t),\qquad t\geqslant 0.$$

特别当 $g_1(t)=g_2(t)\equiv 0$ 时，称弦具有自由端.

③ 已知端点的位移与所受外力作用的一个线性组合，即

$$-T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}+\alpha_1 u(0,t)=g_1(t),$$
$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}+\alpha_2 u(l,t)=g_2(t),\qquad t\geqslant 0,$$

其中 $\alpha_i>0(i=1,2)$. 特别当 $g_1(t)=g_2(t)\equiv 0$ 时，表示弦的两端固定在弹性支撑上，$\alpha_i(i=1,2)$ 分别表示支撑的弹性系数.

例 41.2.6 对于热传导问题,定解条件为:

(1) 初始条件 即已知初始的温度分布,

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in\bar{\Omega}\subset\mathbb{R}^3.$$

(2) 边界条件有 3 类:

① 已知边界$\partial\Omega$上的温度分布

$$u\,|_{\Sigma}=g(x,y,z,t),$$

其中 $\Sigma=\partial\Omega\times[0,\infty)$. 当 $g\equiv$ 常数时,称物体的边界保持恒温.

② 已知通过边界 $\partial\Omega$ 的热量,

$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\Sigma}=g(x,y,z,t).$$

当 $g\geqslant 0$ 时表示流入,$g\leqslant 0$ 时表示流出. 特别当 $g\equiv 0$ 时,表示物体绝热.

③ 已知通过边界 $\partial\Omega$ 与周围介质有热交换

$$k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\Sigma}=a_0(g_0-u)\bigg|_{\Sigma}$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\alpha u\right)\bigg|_{\Sigma}=g(x,y,z,t),$$

其中 g_0 表示周围介质温度,α_0 表示热交换系数,$\alpha=\dfrac{\alpha_0}{k}>0$.

注 41.2.7 当在边界上不同部分(比如 Γ_1,Γ_2)上取不同的类型条件时,构成**混合边界条件**.

41.3 定解问题

定义 41.3.1 一个偏微分方程连同与它相应的定解条件(初始条件和边界条件)组成一个**定解问题**.

定义 41.3.2 由偏微分方程连同与它相应的初始条件组成

的定解问题,称为初值问题(initial value problem 或 Cauchy problem).

定义 41.3.3 由偏微分方程连同与之相应的边界条件组成的定解问题,称为边值问题(boundary value problem). 根据 41.2 节中的 3 类边界条件,依次称这些定解问题为第一、第二、第三边值问题. 通常把第一和第二边值问题分别称为方程的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题.

定义 41.3.4 由偏微分方程连同与之相应的初始条件及边界条件组成的定解问题,称为混合问题(或初边值问题)(mixed problem(或 initial boundary value problem)).

定义 41.3.5 弦振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\qquad 0<x<l,\quad t>0,$$

其中 $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, T_0 外力, ρ 为密度常数(弦是均匀的),结合例 41.2.5 可以得到初值问题、初边值问题.

例 41.3.6 热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\Delta u=f(x,y,z,t),\qquad (x,y,z)\in\Omega\subset\mathbb{R}^3.$$

结合例 41.2.6 可以得到初值问题、初边值问题.

例 41.3.7 位势方程为

$$-\Delta u=f,$$

可以结合边界条件给出边值问题.

从上面的例题可以看出,对于 3 类常见的方程定解问题的提法是不同的:对于振动方程和热传导方程,应该提混合问题和初值问题,而对位势方程应该提边值问题. 这样提定解问题从物理上讲是合理的,从数学上说:为了使一个偏微分方程的定解问题正确反映客观实际,它必须有解存在,且只有一个解,以及解对定解数据(即出现在定解条件和方程中的已知函数)是连续依赖的或称之为

稳定的.

定义 41.3.8 如果一个定解问题的解存在、惟一、稳定,称这个定解问题是**适定的**.

41.4 偏微分方程分类

定义 41.4.1 含两个自变量的二阶线性偏微分方程一般形式为

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \qquad (41.1)$$

其中 $a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c,f$ 等都是变量 x,y 在某一区域 Ω 上的实函数,通常假定它们为连续可微的.

定义 41.4.2 方程

$$a_{11}\mathrm{d}y^2-2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+a_{22}\mathrm{d}x^2=0,$$

称为方程(41.1)的特征方程(characteristic equation). 特征方程的积分曲线

$$\varphi_1(x,y)=c, \qquad \varphi_2(x,y)=c$$

称为方程(41.1)的特征线(characteristic curve).

通过自变量的变换,可以将方程(41.1)变形. 作变换

$$\xi=\xi(x,y)=\varphi_1(x,y), \qquad \eta=\eta(x,y)=\varphi_2(x,y),$$

方程(41.1)化为

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi}+2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta}+\bar{a}_{22}u_{\eta\eta}+\bar{b}_1u_\xi+\bar{b}_2u_\eta+\bar{c}u=\bar{f}, \qquad (41.2)$$

其中

$$\begin{cases}\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\ \bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\ \bar{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2.\end{cases} \qquad (41.3)$$

定义 41.4.3 偏微分方程(41.1)的判别式(discriminant)是指 $\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{22}$. 依照判别式可以将方程(41.1)进行分类:

(1) $\Delta|_{(x_0,y_0)}>0$,称方程(41.1)在点 (x_0,y_0) 为双曲型的

(hyperbolic)；

(2) $\Delta|_{(x_0,y_0)}=0$，称方程在点(x_0,y_0)为抛物型的(parabolic)；

(3) $\Delta|_{(x_0,y_0)}<0$，称方程在点(x_0,y_0)为椭圆型的(elliptic).

定义 41.4.4 按照判别式的不同可以把方程(41.1)依次化为**标准型**(canonical form)：

(1) 双曲型 在特征线坐标下，标准型为

$$u_{\xi\eta}=Au_{\xi}+Bu_{\eta}+Cu+D,$$

其中 A,B,C,D 为 ξ,η 的函数. 也可写成

$$u_{ss}-u_{tt}=A_1u_s+B_1u_t+C_1u+D_1.$$

(2) 抛物型 作坐标变换 $\xi=\varphi_1(x,y),\eta=\varphi_2(x,y)$，$\varphi_1,\varphi_2$ 中一个取为特征线，另一个任取无关函数. 标准型为

$$u_{\eta\eta}=A_1u_{\xi}+B_1u_{\eta}+C_1u+D_1.$$

(3) 椭圆型 作坐标变换 $\xi=\operatorname{Re}\varphi(x,y)$，$\eta=\operatorname{Im}\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+\mathrm{i}\,\varphi_2(x,y)$满足特征方程. 标准型为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=Au_{\xi}+Bu_{\eta}+Cu+D.$$

定义 41.4.5 一般的多个自变量的二阶线性偏微分方程形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f, \tag{41.4}$$

其中 a_{ij},b_i,c,f 是 n 维空间$\mathbb{R}^n$ 中某区域Ω 内的连续函数，通常取 $a_{ij}=a_{ji}$.

定义 41.4.6 设方程(41.4)在某点 $P(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$，二次型

$$A(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P)\lambda_i\lambda_j$$

为正定或负定，称方程在点 P 为椭圆型的；如果 $A(\lambda)$在点 P 为退化的(即矩阵(a_{ij})的特征根中至少有一为零)，则称方程在点 P 为抛物型的；如果 $A(\lambda)$在点 P 既不为退化，也不为正定或负定，但

矩阵(a_{ij})的特征根中有 $n-1$ 个同号,则称方程在点 P 为双曲型的.

例 41.4.7 (1) 弦振动方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

为双曲型的,特征线族为

$$x+at=c, \qquad x-at=c.$$

(2) Tricomi(特里科米)方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

特征方程为

$$y\,\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2=0.$$

在上半平面 $y>0$ 内是椭圆的,在下半平面 $y<0$ 中是双曲型的.

(3) 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0,$$

二次型 $A(\lambda)=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2$ 正定,为椭圆型.

(4) 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$$

为双曲型的.

(5) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$$

为抛物型的.

定理 41.4.8 **叠加原理** 设 u_i 满足线性方程(或线性定解条件)

$$Lu_i=f_i, \qquad i=1,2,\cdots,n,$$

则它们的线性组合 $u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$ 必满足

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i.$$

特别当 u_i 满足齐次方程(即 $f_i=0$)或齐次定解条件时,u 也满足齐次方程或齐次定解条件.

42 一阶偏微分方程

42.1 一阶线性偏微分方程

方法 42.1.1 考察 n 个自变量的一阶线性方程

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+X_n \frac{\partial z}{\partial x_n}=Z, \tag{42.1}$$

其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$z=z(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为未知函数，X_i $(i=1,2,\cdots,n)$，Z 均为已知函数.

先解常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}=\frac{\mathrm{d}z}{Z},$$

命其 n 个函数无关的解为

$$\begin{gathered}\varphi_1(z,x_1,\cdots,x_n)=c_1,\\ \varphi_2(z,x_1,\cdots,x_n)=c_2,\\ \vdots\\ \varphi_n(z,x_1,\cdots,x_n)=c_n,\end{gathered}$$

其中 $c_i(i=1,\cdots,n)$ 是常数，则方程(42.1)的通解为

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=0, \tag{42.2}$$

这里 Φ 是任意函数.

例 42.1.2 求解

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n \frac{\partial z}{\partial x_n}=mz,$$

其中 m 为常数，先解

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n}=\frac{\mathrm{d}z}{mz},$$

得出

$$\frac{x_1}{x_n}=c_1,\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},\qquad \frac{z}{x_n^m}=c_n.$$

因此

$$\frac{z}{x_n^m}=\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

这里 Φ 是一任意函数. 故得通解为

$$z=x_n^m\Phi\left(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

例 42.1.3 求方程

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}+5=0,$$

经过直线

$$x=a_1v,\qquad y=a_2v,\qquad z=a_3v$$

的解,这里 a_1,a_2,a_3 为常数,且 $3a_1-2a_2\neq 0$.

解 先由

$$\frac{\mathrm{d}x}{2}=\frac{\mathrm{d}y}{3}=\frac{\mathrm{d}z}{-5}$$

得解

$$u=3x-2y,\quad v=5x+2z.$$

因而得一般解

$$5x+2z=\varphi(3x-2y),$$

这里 φ 是任意函数. 以直线代入,有

$$(5a_1+2a_3)v=\varphi[(3a_1-2a_2)v],$$

故

$$\varphi(t)=\frac{5a_1+2a_3}{3a_1-2a_2}t,$$

从而要求的解为

$$(3a_1-2a_2)(5x+2z)=(5a_1+2a_3)(3x-2y).$$

例 42.1.4 求

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$$

满足 $z(1,y)=\varphi(y)$的解.

解 先解

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{y\mathrm{d}z}{x^3},$$

由前两项得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+a,$$

又由一、三项得

$$\mathrm{d}z=\frac{x}{y}\mathrm{d}x=x\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{d}x=(1-ax)\mathrm{d}x,$$

即有

$$z=x-\frac{1}{2}ax^2+b=\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2y}+b.$$

因而得一般解

$$z-\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{2y}=\psi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

这里 ψ 为任意函数. 利用 $z(1,y)=\varphi(y)$,得

$$\varphi(y)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\psi\left(1-\frac{1}{y}\right),$$

求出

$$\psi(t)=\varphi\left(1-\frac{1}{t}\right)-1+\frac{1}{2}t,$$

要求的解是

$$z=\frac{1}{2}x+\frac{x^2}{2y}-1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+\varphi\left(\frac{xy}{xy-y+x}\right).$$

42.2 一般一阶偏微分方程

方法 42.2.1 考虑一般的一阶偏微分方程

$$F(x,y,z,p,q)=0. \tag{42.3}$$

如果(42.3)的解还满足另一个方程

$$\Phi(x,y,z,p,q)=0, \tag{42.4}$$

则由(42.3)、(42.4)联立解出

$$p=\psi(x,y,z),\qquad q=\varphi(x,y,z).$$

但 Φ 不能是任意的,它必须满足相容性条件

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{42.5}$$

如果这条件适合了,则可由

$$\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y \tag{42.6}$$

来求出(42.3)的解.因而解(42.3)的问题变为寻求一个函数 Φ 满足(42.5).

对 x,y 求偏导,有

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}p+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}q+\frac{\partial \Phi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0.$$

从前两个方程消去$\frac{\partial p}{\partial x}$,有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+\frac{\partial q}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)=0,$$

从后两个方程消去$\frac{\partial q}{\partial y}$,有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)=0.$$

由于$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}$,上两式相加,整理得

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial p}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q}+\left(-\frac{\partial F}{\partial p}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$
$$+\left(-\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\left(-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0. \tag{42.7}$$

这是函数 Φ 的线性方程,由上节的结果,可以化为下列线性方程组的问题来求解:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\mathrm{d}q}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{\mathrm{d}z}{-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}}$$
$$=\frac{\mathrm{d}x}{-\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{\mathrm{d}y}{-\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{0}, \tag{42.8}$$

将这方程的解与(42.3)联立,即可求解.

例 42.2.2 解微分方程

$$p^2+q^2-2px-2qy+2xy=0.$$

解 其对应的常微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}p}{2y-2p}=\frac{\mathrm{d}q}{2x-2q}=\frac{\mathrm{d}x}{-2p+2x}=\frac{\mathrm{d}y}{-2q+2y},$$

故

$$\mathrm{d}p+\mathrm{d}q=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

即

$$p-x+q-y=a.$$

与原方程$(p-x)^2+(q-y)^2=(x-y)^2$ 联立,

$$2(p-x)=a+[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$
$$2(q-y)=a-[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$

故 $dz=pdx+qdy$ 变为

$$2dz=(2x+a)dx+(2y+a)dy+(dx-dy)[2(x-y)^2-a^2]^{1/2},$$

即得

$$2z-b=x^2+ax+y^2+ay+\frac{x-y}{2}[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}$$
$$-\frac{a^2}{2^{3/2}}\ln\{2^{1/2}(x-y)+[2(x-y)^2-a^2]^{1/2}\},$$

其中 a,b 为任意常数.

42.3 一阶偏微分方程组 Cauchy - Kovalevskaya 定理

定义 42.3.1 含有未知函数 $u_1,u_2,\cdots,u_N$ 的关于自变量 t, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的偏微分方程组

$$\frac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}}=F_i\left(t,x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_N,\cdots,\frac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\cdots\right),$$
$$i,j=1,\cdots,N;\ k_0+k_1+\cdots+k_n=k\leqslant n_j,\quad k_0<n_j. \tag{42.9}$$

称为 Kovalevskaya(柯瓦列夫斯卡娅)型方程组(systems of Kovalevskaja type).

例 42.3.2 解析函数的实部 u 和虚部 v 之间必须满足 Cauchy-Riemann 条件(Cauchy-Riemann condition)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

这是一阶线性偏微分方程组. 对流体的平面定常不可压缩的无旋流的研究,归结为求解此方程组.

例 42.3.3 在电磁波理论中,对各向同性的介质成立着下面

的 Maxwell(麦克斯韦)方程组

$$\begin{cases} c\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}=\lambda\boldsymbol{E}+\varepsilon\boldsymbol{E}_t, \\ c\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\mu\boldsymbol{H}_t, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 为电场和磁场的强度，c 为光速，λ 为介质的传导系数，ε 和 μ 是介电常数和导磁率. 令 $\boldsymbol{E}=(e_1,e_2,e_3)$，$\boldsymbol{H}=(h_1,h_2,h_3)$，在 t,x_1,x_2,x_3 坐标下，

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}+\dfrac{\partial h_2}{\partial x_3}-\dfrac{\partial h_3}{\partial x_2}+\dfrac{\lambda}{c}e_1=0, \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial e_2}{\partial t}+\dfrac{\partial h_3}{\partial x_1}-\dfrac{\partial h_1}{\partial x_3}+\dfrac{\lambda}{c}e_2=0, \\ \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial e_3}{\partial t}+\dfrac{\partial h_1}{\partial x_2}-\dfrac{\partial h_2}{\partial x_1}+\dfrac{\lambda}{c}e_3=0, \\ \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial h_1}{\partial t}+\dfrac{\partial e_3}{\partial x_2}-\dfrac{\partial e_2}{\partial x_3}=0, \\ \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial h_2}{\partial t}+\dfrac{\partial e_1}{\partial x_3}-\dfrac{\partial e_3}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial h_3}{\partial t}+\dfrac{\partial e_2}{\partial x_1}-\dfrac{\partial e_1}{\partial x_2}=0. \end{cases}$$

这是一个常系数线性方程组.

例 42.3.4 流体动力学方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}u_k+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_i}=f_i, \qquad i=1,2,3, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-\rho\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}-\sum_{k=1}^{3}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_k}u_k. \end{cases}$$

例 42.3.5 声学方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\dfrac{\partial\rho}{\partial x_i}=0, \qquad i=1,2,3, \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}=0. \end{cases}$$

例 42.3.6 弹性力学方程组

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial y_k}{\partial x_k}+\mu\Delta u_i-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+F_i=0,\quad i=1,2,3.$$

例 42.3.7 考察方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+x,\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+y.\end{cases}$$

带初始条件

$$u|_{t=0}=x+\sin xy,\qquad v|_{t=0}=y+\cos xy$$

的 Cauchy 问题.用幂级数解法(solution of power series)求这一问题在原点 $O(t=0,x=0,y=0)$附近的近似解.

解 由给定的初始条件得到 u,v 及其对 x,y 的一阶二阶导数在原点的值

$$u|_{t=0,x=0,y=0}=0,\qquad (v)_0=1,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0=1,\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0=1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_0=1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0=0,\qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0=0.$$

再利用方程并对 x,y,t 各进行一阶求导后,可得在原点的导数值

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0=1,\qquad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\right)_0=2,\qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y}\right)_0=1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x}\right)_0=1, \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y}\right)_0=1,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_0=2, \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_0=1.$$

这样，就得到在原点附近此 Cauchy 问题的近似解为

$$u(t,x,y)=t+x+t^2+2tx+ty+xy,$$

$$v(t,x,y)=1+y+\frac{t^2}{2}+tx+ty.$$

定理 42.3.8 Cauchy-Kovalevskaya 定理　考察方程组(42.9)及其初始条件

$$\left.\frac{\partial^k u_i}{\partial t^k}\right|_{t=t_0}=\varphi_i^{(k)}(x_1,x_2,\cdots,x_n), \qquad k=0,1,2,\cdots,n_i-1$$

所构成的 Cauchy 问题，如果所有的函数 F_i 在点$(t^0,x_1^0,\cdots,x_n^0,\cdots,\varphi_j^0,k_0,k_1,\cdots,k_n,\cdots)$的某一邻域内是解析的，而且所有的函数 $\varphi_j^{(k)}$ 在点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的一个邻域内也是解析的，那么 Cauchy 问题在点$(t^0,x_1^0,\cdots,x_n^0)$的某一邻域内有一个解析解存在，并且这个解在解析函数类中是惟一的.

注 42.3.9 如果系数与初值不是解析的，但属于 C^∞，则有 Lewy(莱维)反例，见定理 46.6.1.

43 行波法与分离变量法

43.1 一维波动方程的行波解

考察一维弦振动方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & t>0,x\in(-\infty,+\infty),\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), & x\in(-\infty,+\infty).\end{cases}\tag{43.1}$$

根据 41.4 节叠加原理,这一问题可以分解为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}\tag{43.2}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\\ u|_{t=0}=0,\qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\end{cases}\tag{43.3}$$

两个问题的解之和,表示由 $f(x,t)$所代表的外力因素和由 $\varphi(x)$,$\psi(x)$所表示的初始振动状态对整个振动过程所产生的综合影响,可以分解为单独只考虑外力因素(初始位移及速度为零)或只考虑初始状态(外力为零)的影响的叠加.

对于问题(43.2),可以通过变量变换的方法求解.

令

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at,$$

则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta},$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

直接积分求解，得

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

或

$$u(x,t) = F(x - at) + G(x + at). \tag{43.4}$$

代入初始条件

$$u\big|_{t=0} = F(x) + G(x) = \varphi(x),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = a(-F'(x) + G'(x)) = \psi(x),$$

解之得

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,\mathrm{d}s + \dfrac{c}{2a}, \\ G(x) = \dfrac{1}{2}\varphi(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,\mathrm{d}s - \dfrac{c}{2a}, \end{cases}$$

其中 x_0 为任意一点，c 为积分常数. 回代后得到 D'Alembert 公式 (D'Alembert formula)

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,\mathrm{d}s. \tag{43.5}$$

对于问题(43.3)我们有

定理 43.1.1 齐次化原理(homogenization principle) 若 $W(x,t;\tau)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0, & t>\tau,\\ W\big|_{t=\tau}=0, \quad \dfrac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=\tau}=f(x,\tau) \end{cases}$$

的解(其中 τ 为参数),则

$$u(x,t)=\int_0^t W(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

是初值问题(43.3) 的解.

利用 D'Alembert 公式解出 $W(x,t;\tau)$ 为

$$W(x,t;\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi,$$

故问题(43.3) 的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2a}\iint_G f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau,$$

其中 G 为(ξ,τ)平面上过点(x,t)向下作两特征线与 ξ 轴所夹的三角形区域,如图 43.1.

定义 43.1.2 齐次波动方程形如 $F(x-at)$的解所描述的振动规律,称为**右传播波**.形如 $G(x+at)$的解,称为**左传播波**.左、右传播波也称为行波解.

定义 43.1.3 (x,t)平面上的区域

$$x_1-at\leqslant x\leqslant x_2+at,\qquad t>0,$$

称为区间$[x_1,x_2]$的影响区域,如图 43.2.区间$[x-at,x+at]$称为点(x,t)的**依赖区间**(或称依赖区域),如图 43.3.区域

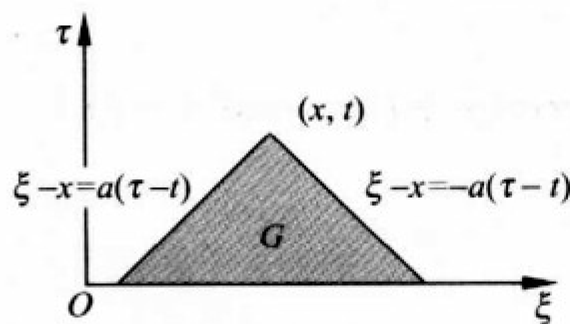


图 43.1

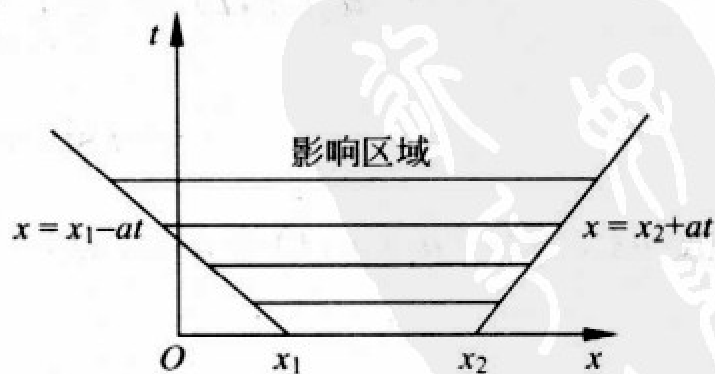


图 43.2

$$x_1+at\leqslant x\leqslant x_2-at,\qquad t>0,$$

称为$[x_1,x_2]$的决定区域,如图 43.4.

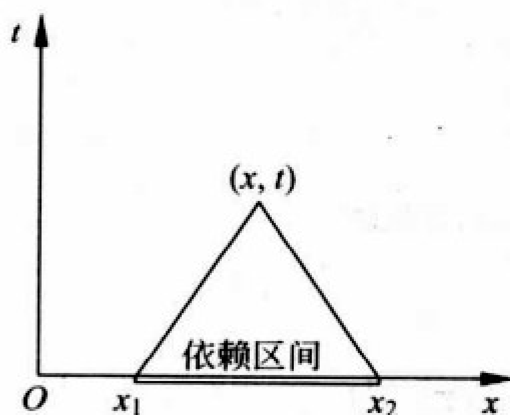


图 43.3

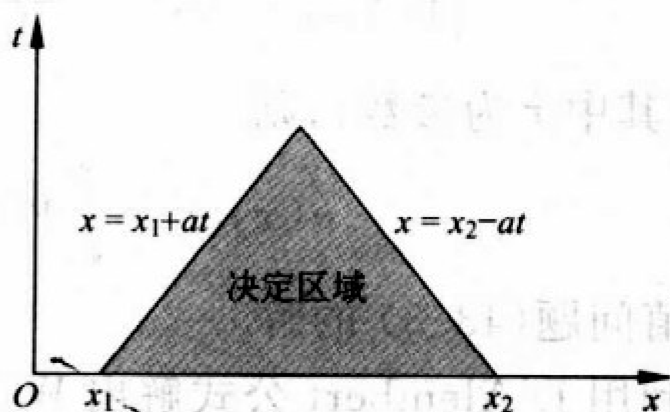


图 43.4

位于影响区域中的点(x,t),其振动规律受$[x_1,x_2]$区间上的初值影响. 而点(x,t)依赖于区间$[x-at,x+at]$上的初值. 对于决定区域中的点(x,t),其振动规律完全由$[x_1,x_2]$上的初值所决定.

例 43.1.4 求解波动方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t\sin x,\\ u|_{t=0}=0,\qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sin x.\end{cases}$$

解 齐次方程的解$u_1(x,t)$可由 D'Alembert 公式求得

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin s\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}[\cos(x-t)-\cos(x+t)].$$

外力的作用产生的解$u_2(x,t)$由齐次化原理求出

$$\begin{aligned}u_2(x,t)&=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau\sin\zeta\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\tau\\&=t\sin x+\frac{1}{2}[\cos(x+t)-\cos(x-t)].\end{aligned}$$

故$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)=t\sin x$.

43.2 Sturm-Liouville 固有值问题

定义 43.2.1 包含参数 λ 的二阶线性常微分方程

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)y=\lambda\rho(x)y$$

称为 **Sturm-Liouville 型方程**.

在 $x\in[a,b]$上求此方程满足边界条件

$$\begin{cases}\alpha_1 y'(a)-\alpha_2 y(a)=0,\\ \beta_1 y'(b)+\beta_2 y(b)=0\end{cases}$$

的非零解问题称为 **Sturm-Liouville 固有值问题**. 其中 α_i, β_i $(i=1,2)$为非负实数,且 $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$.

使上述问题有非零解的参数 λ 称为**固有值**,相应的非零解称为问题的**固有函数**.

定义 43.2.2 如果$[a,b]$为有限区间,且在$[a,b]$上 $p(x)\geqslant p_0>0$, 一阶连续可微,$q(x)\geqslant 0$, $\rho(x)\geqslant\rho_0>0$ 均为连续函数. 则此时的 Sturm-Liouville固有值问题称为**正则的**.

定理 43.2.3 对于正则的 Sturm-Liouville 问题(Sturm-Liouville problem),其所有固有值非负;当且仅当 $q(x)\equiv 0$, $\alpha_2=0$, $\beta_2=0$ 同时成立时,才有等于零的固有值.

定理 43.2.4 对于正则的 Sturm-Liouville 问题,对应于不同固有值的固有函数在$[a,b]$上关于权函数 $\rho(x)$ 正交. 即如果 $\lambda_n\neq\lambda_m$,则对应于 λ_n,λ_m 的固有函数 y_n,y_m 满足关系式

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0,\qquad n\neq m.$$

定理 43.2.5 对于正则的 Sturm-Liouville 问题,存在单调增趋向正无穷的固有值序列

$$0\leqslant\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n<\cdots$$

以及相应的固有函数族 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), \cdots$,该固有函数族在$[a,b]$上构成一个正交完备系. 当函数 $f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可微且满足定义 43.2.1 中的边界条件时,即可将其展为关于函数族$\{y_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$的绝对且一致收敛的级数(或称广义 Fourier 级数)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n y_n(x),$$

其中系数

$$c_n=\frac{\int_a^b f(x)y_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x}.$$

注 43.2.6 上面正则 Sturm-Liouville 问题中对函数 $p(x)$, $q(x)$所做的假定,在不少情况下不被满足,可能会出现 $p(a)=0$ 或 $p(b)=0$ 的情形,这时边界条件的提法应做如下改变:

如果 $x=a$ 是 $p(x)$的一阶零点,即 $p(x)$在点 a 的邻域内具有 $p(x)=(x-a)p_1(x)$的形式,此处 $p_1(a)\neq 0$, $x=a$ 是 $q(x)$的连续点或一阶极点,即 $q(x)$在点 $x=a$ 的邻域内有 $q(x)=q_1(x)/(x-a)$的形式,这里 $q_1(a)\neq 0$,在 $x\in(a,b)$开区间内部,原先关于 $p(x)$, $q(x)$的假定不变. 则将 $x=a$ 处的边界条件(定义 43.2.1 中)换成 $y(x)$在 $x=a$ 有界,即"$|y(a)|<\infty$"之后,所得固有值问题仍有类似的 3 个定理.

43.3 一维混合问题的分离变量法

例 43.3.1 用分离变量法解两端固定弦的自由振动问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

解 分离变量,假设

$$u(x,t)=X(x)\,T(t).$$

代入原方程

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t),$$

即

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}\overset{\text{def}}{=\!=}-\lambda.$$

上式二者相等,只能等于常数,记为$-\lambda$,乘开即有

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,$$
$$X''(x)+\lambda X(x)=0.$$

为使 $u(x,t)$满足边界条件,应有

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0,$$
$$u(l,t)=X(l)T(t)=0.$$

因为 $T(t)$不能恒为零,于是

$$X(0)=X(l)=0,$$

得到固有值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X(0)=X(l)=0.\end{cases}$$

这是一个 Sturm-Liouville 问题,并且 $p(x)=1>0, q(x)=0$, $\rho(x)=1>0$, $a=0$, $b=l$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$, $\beta_1=0$, $\beta_2=1$,从而由上节定理 43.2.3,固有值 $\lambda>0$,令 $\lambda=k^2(k>0)$则固有函数通解为

$$X(x)=C\cos kx+D\sin kx.$$

代入条件有

$$X(0)=C=0, \qquad X(l)=C\cos kl+D\sin kl=0.$$

为使 $X(x)$ 不恒为零，则 $D\neq 0$，于是

$$\sin kl=0,$$

即 $k=\frac{n\pi}{l}$ $(n=1,2,\cdots)$，此时

$$X_n(x)=\widetilde{C}_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \qquad n=1,2,\cdots$$

是固有函数，固有值为 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $(n=1,2\cdots)$. 将 λ_n 代入 $T(t)$ 的方程，求出通解

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t.$$

因此

$$\begin{aligned}u_n(x,t)&=X_n(x)T_n(t)\\&=\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,\end{aligned}$$

其中 $a_n=A_n\widetilde{C}_n$，$b_n=B_n\widetilde{C}_n$ 为任意常数.

将 $u_n(x,t)$ 关于 n 叠加，设

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,\end{aligned}$$

适当选择 a_n,b_n 使解 $u(x,t)$ 满足初始条件，将 $t=0$ 代入上式，有

$$\varphi(x)=u\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\psi(x)=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

利用函数族 $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}(n=1,2\cdots)$ 的正交性，即

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{l}{2}, & m = n. \end{cases}$$

可得

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, \qquad b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x.$$

例 43.3.2 长为 l，两端固定的弦 $t=0$ 时刻在 $x=c$ 处把弦拉到距离 $u=h$ 处，然后无速度地放开，求解弦的振动情况（见图 43.5）.

解 定解问题为

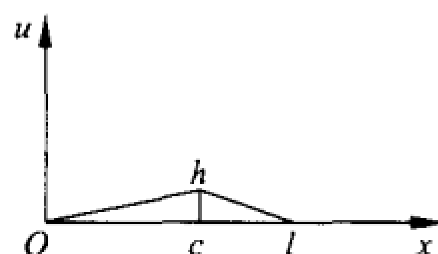


图 43.5

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=l} = 0, \\ u\big|_{t=0} = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x, & 0 \leqslant x \leqslant c, \\ \dfrac{h(l-x)}{l-c}, & c \leqslant x \leqslant l, \end{cases} \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)n^2}\sin\frac{n\pi c}{l},$$

$$b_n = 0.$$

于是

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi c}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}t\ \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

例 43.3.3 两端不受力杆的纵振动问题. 相应定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0, & t \geqslant 0, \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), & 0 < x < l. \end{cases}$$

解 设 $u(x,t) = X(x)T(t)$，分离变量

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \overset{\text{def}}{=} -\lambda,$$

固有值问题为

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

由定理 43.2.3 知固有值 $\lambda \geqslant 0$，且为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

固有函数

$$\cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n = 1,2,3,\cdots,$$

相应于 $\lambda_0 = 0$，固有函数为 1，故可合并为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$$X_n = \cos\frac{n\pi}{l}x, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

$$\lambda_0 = 0, \qquad T_0(t) = a_0 + b_0 t,$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad T_n(t) = a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t.$$

于是

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

代入初始条件

$$\varphi(x) = u\big|_{t=0} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \cos\frac{n\pi}{l}x,$$

由正交性，有

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, \end{aligned}\right. \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

例 43.3.4 一端固定，一端弹性支撑的杆的纵振动问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\bigg|_{x=l} = 0, & t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

解 令 $u(x,t) = X(x)T(t)$，得固有值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < l, \\ X(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \end{cases}$$

由定理 43.2.3 知 $\lambda > 0$，设 $\lambda_n = k_n^2$，满足

$$\tan kl = -\frac{k}{n}$$

的第 n 个正根，即在同一坐标系中作曲线 $y_1 = \tan kl$，$y_2 = -\dfrac{k}{n}$，其交点的横坐标 $k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots$ 就是要求的正根．这时相应的固有函数为

$$X_n(x) = \sin k_n x, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

代入 $T(t)$ 的方程，有

$$T_n(t) = a_n\cos k_n at + b_n\sin k_n at,$$

于是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos k_nat+b_n\sin k_nat)\sin k_nx,$$

其中

$$a_n=\frac{\int_0^l\varphi(x)\sin k_nx\,\mathrm{d}x}{\int_0^l\sin^2k_nx\,\mathrm{d}x},\qquad b_n=\frac{\int_0^l\psi(x)\sin k_nx\,\mathrm{d}x}{k_na\int_0^l\sin^2k_nx\,\mathrm{d}x},$$

$$n=1,2,\cdots,$$

并且

$$\int_0^l\sin^2k_nx\,\mathrm{d}x=\frac{l}{2}+\frac{h}{2(h^2+k_n^2)},\qquad n=1,2,\cdots.$$

例 43.3.5 两端固定弦的强迫振动问题.定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t), & 0<x<l,\ t>0,\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0, & t\geqslant0,\\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

解 我们用两种方法来解此非齐次方程的混合问题:

(1) 固有函数法 令

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x),$$

其中 $X_n(x)$ 为齐次方程相应于 $\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$ 固有值的固有函数,

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x,\qquad n=1,2,\cdots.$$

设

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中 $f_n(t)=\dfrac{2}{l}\int_0^lf(\xi,t)\sin\dfrac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi$,代入原方程,并比较系数,有

$$T_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t).$$

由初始条件

$$0=u\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

于是

$$T_n(0)=0,\qquad T_n'(0)=0.$$

利用变动任意常数法可以求出

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)f_n(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

从而

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

(2) 齐次化原理　设 $v(x,t;\tau)$ 是定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & 0<x<l,\quad t>\tau,\\ v\big|_{x=0}=0,\quad v\big|_{x=l}=0, & t\geqslant\tau,\\ v\big|_{t=\tau}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=\tau}=f(x,\tau), & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

的解(其中参数 $\tau\geqslant 0$),则

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

就是本题定解问题的解. 而

$$v(x,t;\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$b_n(\tau)=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\,\mathrm{d}\xi,$$

这时

$$u(x,t)=\int_0^t\left[\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x\right]d\tau.$$

例 43.3.6 非齐次边界条件的处理. 考虑定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,\quad t>0,\\ u|_{x=0}=\alpha(t), & u|_{x=l}=\beta(t),\quad t\geqslant 0,\\ u|_{t=0}=0, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

解 令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$,选择 $w(x,t)$ 满足非齐次边界条件,即

$$w|_{x=0}=\alpha(t),\qquad w|_{x=l}=\beta(t).$$

这时

$$v|_{x=0}=(u-w)|_{x=0}=0,$$
$$v|_{x=l}=(u-w)|_{x=l}=0.$$

$v(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left[a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right],\\ v|_{x=0}=0, & v|_{x=l}=0,\\ v|_{t=0}=-w|_{t=0}, & \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=-\left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0},\end{cases}$$

这样即可用例 43.3.5 的方法来解 $v(x,t)$,从而解出 $u(x,t)$.

实用中,常选 $w(x,t)$ 为

$$w(x,t)=\frac{\beta(t)-\alpha(t)}{l}x+\alpha(t).$$

例 43.3.7 设弹簧一端固定,另一端在外力作用下作周期振动,此时定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,t>0,\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=A\sin\omega t, & t\geqslant 0,\\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

试求解 $u(x,t)$，其中$\dfrac{\omega l}{\pi a}$不为正整数，a,l,ω,A 均为常数.

解 对非齐次边界条件齐次化，令

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{x}{l}A\sin\omega t,$$

则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\omega^2 x}{l}A\sin\omega t, & 0<x<l,t>0,\\ v|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=0, & t\geqslant 0,\\ v|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=-\dfrac{\omega xA}{l}, & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

令 $v(x,t)=v_1(x,t)+v_2(x,t)$，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, & 0<x<l,t>0,\\ v_1|_{x=0}=0,\quad v_1|_{x=l}=0, & \\ v_1|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial v_1}{\partial t}\right|_{t=0}=-\dfrac{\omega xA}{l}, & 0\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\dfrac{\omega^2 xA}{l}\sin\omega t, & 0<x<l,t>0,\\ v_2|_{x=0}=v_2|_{x=l}=0, & \\ v_2|_{t=0}=\left.\dfrac{\partial v_2}{\partial t}\right|_{t=0}=0. & \end{cases}$$

用前面例题的方法，可以求出

$$v_1(x,t)=\frac{2\omega Al}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$v_2(x,t)=\frac{\omega Al}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\left[\frac{\sin\omega t+\sin\frac{n\pi a}{l}t}{\frac{n\pi a}{l}+\omega}-\frac{\sin\frac{n\pi a}{l}t-\sin\omega t}{\frac{n\pi a}{l}-\omega}\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=\frac{2\omega^2 Al}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\left[\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\right]}\left[\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t-\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

于是

$$u(x,t)=\frac{x}{l}A\sin\omega t+v_1(x,t)+v_2(x,t).$$

题中$\frac{\omega l}{\pi a}$不为整数，保证了对任意正整数 n，$v_2(x,t)$ 表达式中的分母不为零．顺便指出，如果 $x=l$ 端振动的频率ω与固有频率中的某一个 $\omega_n=\frac{n\pi a}{l}$ 相近，则 $\omega\to\frac{n\pi a}{l}$ 时，得

$$\frac{\sin\frac{n\pi a}{l}t-\sin\omega t}{\frac{n\pi a}{l}-\omega}\to t\cos\frac{n\pi a}{l}t.$$

这表明 $t\to\infty$ 时，$v_2(x,t)$ 是无界的．这种现象称为共振．

例 43.3.8　一维热传导方程的混合问题．研究长为 l 的均匀细杆的热传导问题．假定杆的侧面绝热，内部无热源，$x=0$ 端温度始终保持为 0，$x=l$ 端绝热，杆的初始温度分布为 $\varphi(x)$，杆上温度 $u(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,t>0,\\ u\big|_{x=0}=0,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0, & t\geqslant 0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

解 令 $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, 分离变量, 固有值问题为

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < l, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

固有值

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

固有函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{2n+1}{2l}\pi x\,(n = 0,1,2,\cdots)$,

$$T_n(t) = a_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi a\right)^2 t}, \qquad n = 0,1,2,\cdots.$$

于是

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{2n+1}{2}\pi a\right)^2 t} \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x,$$

代入初始条件

$$\varphi(x) = u\,|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x,$$

故

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\xi\right)\mathrm{d}\xi.$$

注 对于一维热传导方程其他类型的混合问题与振动问题的解法相同.

43.4 高维混合问题的分离变量法 Laplace 方程的解

例 43.4.1 矩形薄膜的横振动. 考虑边界固定的矩形薄膜的自由横振动问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), & (x,y)\in D, t>0,\\
u|_{x=0}=0, & u|_{x=l_1}=0,\\
u|_{y=0}=0, & u|_{y=l_2}=0,\\
u|_{t=0}=\varphi(x,y), & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x,y),
\end{cases}
$$

其中 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<l_1, 0<y<l_2\}$.

解 令 $u(x,y,t)=v(x,y)T(t)$,分离变量得

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda v=0.$$

借助边界条件可有

$$v|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l_1}=0,\quad v|_{y=0}=0,\quad v|_{y=l_2}=0.$$

这样 $v(x,y)$的方程与条件构成偏微分方程固有值问题,为确定固有值 λ 及固有函数 $v(x,y)$,进一步分离变量,设

$$v(x,y)=X(x)Y(y),$$

代入 $v(x,y)$的方程,得

$$X''(x)+\mu X(x)=0,$$

$$Y''(y)+\nu Y(x)=0,$$

其中 μ 是新的固有值,$\nu=\lambda-\mu$,并且

$$X(0)=X(l_1)=0,$$

$$Y(0)=Y(l_2)=0.$$

由定理 43.2.3 知:

固有值 $\mu_n=\left(\dfrac{n\pi}{l_1}\right)^2 (n=1,2,\cdots)$.

相应固有函数 $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l_1}x (n=1,2,\cdots)$.

固有值 $\nu_m=\left(\dfrac{m\pi}{l_2}\right)^2 (m=1,2,\cdots)$.

固有函数 $Y_m(y)=\sin\frac{m\pi}{l_2}y(m=1,2,\cdots)$.

从而偏微分方程的固有值

$$\lambda_{n,m}=\mu_n+\nu_m=\left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2,$$

固有函数

$$v_{n,m}(x,y)=\sin\frac{n\pi}{l_1}x\sin\frac{m\pi}{l_2}y,\qquad n,m=1,2,\cdots$$

对应的 $T(t)$ 的解是

$$T_{n,m}(t)=a_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at+b_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at.$$

于是

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at+b_{n,m}\sin\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{l_1}x\sin\frac{m\pi}{l_2}y,$$

其中 $\lambda_{n,m}=\left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2(m,n=1,2,\cdots)$,代入初始条件

$$\varphi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}\sin\frac{n\pi}{l_1}x\sin\frac{m\pi}{l_2}y,$$

$$\psi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{n,m}a\sqrt{\lambda_{n,m}}\sin\frac{n\pi}{l_1}x\sin\frac{m\pi}{l_2}y,$$

利用 $v_{n,m}(x,y)=\sin\frac{n\pi}{l_1}x\sin\frac{m\pi}{l_2}y\ (n,m=1,2\cdots)$ 的正交性,可以求出二重 Fourier 系数

$$a_{n,m}=\frac{4}{l_1l_2}\int_0^{l_1}\mathrm{d}\xi\int_0^{l_2}\varphi(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi}{l_1}\xi\sin\frac{m\pi}{l_2}\eta\mathrm{d}\eta,$$

$$b_{n,m}=\frac{4}{a\sqrt{\lambda_{n,m}}\,l_1l_2}\int_0^{l_1}\mathrm{d}\xi\int_0^{l_2}\psi(\xi,\eta)\sin\frac{n\pi}{l_1}\xi\sin\frac{m\pi}{l_2}\eta\,\mathrm{d}\eta.$$

例 43.4.2 圆域上 Laplace 方程的第一边值问题,Poisson 积分公式(Poisson integral formula)

求圆域内无源静电场的电位分布. 假定圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上的电位已知,即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & x^2+y^2<a^2,\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=f_1(x,y).\end{cases}$$

作自变量变换

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi,$$

定解问题化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0, & 0<\rho<a, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\\ u|_{\rho=a}=f_1(a\cos\varphi, a\sin\varphi)=f(\varphi),\\ u(\rho,0)=u(\rho,2\pi),\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=2\pi},\\ |u(0,\varphi)|<+\infty.\end{cases}$$

令 $u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$,分离变量

$$\begin{cases}\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0,\\ |R(0)|<+\infty;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0,\\ \Phi(0)=\Phi(2\pi),\quad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi).\end{cases}$$

由定理 43.2.3 知 λ 非负, $\lambda=0$,可得固有函数 $\Phi_0=1$,设 $\lambda=k^2$,解得 $\lambda_n=n^2(n=1,2,\cdots)$对每一个 λ_n,有两个独立的固有函数

$$\cos n\varphi,\quad \sin n\varphi,\qquad n=1,2,\cdots,$$

对应于 $\lambda_0=0, R_0(\rho)=\tilde{a}_0+\tilde{b}_0\ln\rho$; 对应于 $\lambda_n=n^2, R_n(\rho)=\tilde{a}_n\rho^n+\tilde{b}_n\rho^{-n}(n=1,2,\cdots)$. 由有界性条件, $\tilde{b}_0, \tilde{b}_n$ 应取为零. 从而

$$u_0(\rho,\varphi)=R_0(\rho)\Phi_0(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}a_0,$$

$$u_n(\rho,\varphi)=R_n(\rho)\Phi_n(\varphi)=\rho^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),\qquad n=1,2,\cdots.$$

于是

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)\mathrm{e}^n,$$

又

$$f(\varphi)=u(\rho,\varphi)\mid_{\rho=a}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)a^n,$$

故

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad a_n=\frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\cos n\xi\ \mathrm{d}\xi,$$

$$b_n=\frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\sin n\xi\ \mathrm{d}\xi.$$

从而

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\int_0^{2\pi}f(\xi)\cos n(\varphi-\xi)\mathrm{d}\xi\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\xi)\right]\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

因为当 $\rho<a$ 时

$$\begin{aligned}1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos nt&=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos nt\\&=-1+2\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\\&=-1+2\mathrm{Re}\frac{1}{1-\frac{\rho}{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\\&=\frac{1-\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}{1-2\frac{\rho}{a}\cos t+\left(\frac{\rho}{a}\right)^2}\\&=\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos t},\end{aligned}$$

所以

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\xi)\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\xi)}\mathrm{d}\xi,$$

称为圆域内的 **Poisson** 积分公式.

例 43.4.3 求圆柱域 $\Omega\{(\rho,\varphi,z)\mid 0\leqslant\rho<r_0, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0<z<h\}$ 上的调和函数,使满足边界条件

$$\begin{cases} u\big|_{\rho=r_0}=0, & u\big|_{\rho=0}\text{ 有界}, \\ u\big|_{z=0}=f_1(\rho,\varphi), & u\big|_{z=h}=f_2(\rho,\varphi), \end{cases}$$

$$\Delta u\equiv\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

解 令

$$u(\rho,\varphi,z)=Z(z)V(\rho,\varphi),$$

分离变量得

$$Z''(z)-\lambda Z(z)=0$$

和固有值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\lambda V=0, \\ V\big|_{\rho=r_0}=0, \quad \left|V\big|_{\rho=0}\right|<+\infty, \\ V(\rho,\varphi)\text{ 关于 }\varphi\text{ 以 }2\pi\text{ 为周期}. \end{cases}$$

再分离变量,令 $V(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$,得

$$\begin{cases} \Phi''+\mu\Phi=0, \\ \Phi\text{ 以 }2\pi\text{ 为周期}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)-\dfrac{\mu}{\rho}R+\lambda\rho R=0, \\ |R(0)|<+\infty, \qquad R(r_0)=0. \end{cases}$$

解这两个固有值问题,固有值 $\mu_m=m^2(m=0,1,2,\cdots)$,固有函数 $\Phi_m(\varphi)=\sin m\varphi$ 或 $\cos m\varphi(m=0,1,2\cdots)$,

$$\lambda_{m,n}=\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\right)^2,\qquad n=1,2,\cdots,$$

$$R_{m,n}(\rho)=\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right),\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 $\mathrm{J}_m(x)$是 Bessel 函数，而 $\mu_n^{(m)}$ 是方程 $\mathrm{J}_m(x)=0$ 的第 n 个正根. 所以得到原问题的固有值为

$$\lambda_{m,n}=\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\right)^2,\qquad m=0,1,2\cdots;n=1,2,\cdots,$$

固有函数

$$V_{m,n}(\rho,\varphi)=\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\cos m\varphi$$

或

$$\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\sin m\varphi.$$

将 $\lambda_{m,n}$代入 $Z(z)$的方程，求出通解

$$Z_{m,n}(z)=a_{m,n}\sinh\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}z+b_{m,n}\sinh\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}(h-z).$$

于是

$$\begin{aligned}u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{&\left[A_{m,n}\sinh\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}z+B_{m,n}\sinh\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}(h-z)\right]\cdot\\&\cos m\varphi\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)+\left[C_{m,n}\sinh\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}z\right.\\&\left.+D_{m,n}\sinh\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}(h-z)\right]\sin m\varphi\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

代入边值条件后可以定出 4 组常数.

$$\begin{aligned}-f_1(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{&B_{m,n}\sinh\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}h\cos m\varphi\ \mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\\&+D_{m,n}\sinh\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}h\right)\sin m\varphi\ \mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

和

$$f_2(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_{m,n}\sinh\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}h\right)\cos m\varphi\ \mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\right.$$
$$\left.+C_{m,n}\sinh\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}h\right)\sin m\varphi\ \mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\right\},$$

系数为

$$B_{m,n}\sinh\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}h\right)=\frac{\iint\limits_D f_1(\rho,\varphi)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\cos m\varphi\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\left[\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\cos m\varphi\right]^2\mathrm{d}\sigma}$$
$$=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}f_1(\rho,\varphi)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\cos(m\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{\frac{r_0^2}{2}[\mathrm{J}_{m+1}(\mu_n^{(m)})]^2\delta_m\pi},$$

其中 $\delta_m=\begin{cases}2,\ m=0,\\1,\ m\neq 0,\end{cases}$

$$D_{m,n}\sinh\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}h\right)=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}f_1(\rho,\varphi)\mathrm{J}_m\left(\frac{\mu_n^{(m)}}{r_0}\rho\right)\sin(m\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi}{\frac{r_0^2}{2}[\mathrm{J}_{m+1}(\mu_n^{(m)})]^2\pi}.$$

同理可得 $A_{m,n}, C_{m,n}$.

例 43.4.4 球体函数，球域上 Laplace 方程第一边值问题的解

$$\begin{cases}\Delta u\equiv\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0,\ r<r_0,\\ u\big|_{r=r_0}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

解 利用分离变量法，令

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)V(\theta,\varphi),$$

得固有值问题

$$
\begin{cases}
-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\dfrac{\partial V(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right]-\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 V(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=\lambda Y(\theta,\varphi),\\
0<\varphi<2\pi,\quad 0<\theta<\pi,\\
V(\theta,\varphi)\text{关于 }\varphi\text{ 以 }2\pi\text{ 为周期},\\
|V(\theta,\varphi)|\text{在 }\theta=0,\pi\text{ 时有界}
\end{cases}
$$

和

$$
r^2R''(r)+2rR'(r)-\lambda R(r)=0.
$$

解固有值问题，可进一步分离变量，令 $V(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，化为

$$
\begin{cases}
\Phi''(\varphi)+\mu\Phi(\varphi)=0,\\
\Phi(\varphi)\text{以 }2\pi\text{ 为周期};
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\dfrac{\mu}{\sin\theta}\Theta=\lambda\sin\theta\,\Theta,\qquad 0<\theta<\pi,\\
|\Theta(0)|<+\infty,\qquad |\Theta(\pi)|<+\infty.
\end{cases}
$$

从而解出

$$
\begin{aligned}
&\mu_m=m^2, && m=0,1,2,\cdots\\
&\Phi_m(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi, && m=0,1,2,\cdots\\
&\lambda_n=n(n+1), && n=m,m+1,\cdots\\
&\Theta_{n,m}(\theta)=\mathrm{P}_n^m(\cos\theta),
\end{aligned}
$$

这里 $\mathrm{P}_n^m(x)$是 Legendre 函数，即满足

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\dfrac{m^2}{1-x^2}y=\lambda y,\qquad -1<x<1,\\
|y(-1)|<+\infty,\quad |y(1)|<+\infty.
\end{cases}
$$

合并起来得到固有值 $\lambda_n=n(n+1)$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 固有函数

$$
V_{n,m}(\theta,\varphi)=\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{cases}\cos(m\varphi),\\ \sin(m\varphi),\end{cases}\qquad n,m=0,1,2,\cdots;m\leqslant n.
$$

将 λ_n 代到 $R(r)$方程中，

$$
r^2R''(r)+2rR'(r)-n(n+1)R(r)=0,\qquad n=0,1,2,\cdots,
$$

这是 Euler 方程，两个线性无关解为

$$r^n, \qquad \frac{1}{r^{n+1}}.$$

考虑到 $r \to 0$ 时的有界性，得

$$u_{n,m}(r,\theta,\varphi)=r^n \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{cases}\cos(m\varphi),\\ \sin(m\varphi),\end{cases} \qquad n,m=0,1,2,\cdots;m\leqslant n.$$

叫做 n 阶球体函数. 叠加后有

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{n,m}\cos(m\varphi)+b_{n,m}\sin(m\varphi))r^n\mathrm{P}_n^m(\cos\theta),$$

即为球域上调和函数的一般表达式．利用边界条件有

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{n,m}\cos(m\varphi)+b_{n,m}\sin(m\varphi))r_0^n\mathrm{P}_n^m(\cos\theta).$$

于是

$$a_{n,0} = \frac{2n+1}{4\pi r_0^n}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$a_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi r_0^n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos(m\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$b_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi r_0^n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin(m\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\varphi,$$

其中 $m = 1,2,3,\cdots,n = 0,1,2,\cdots$.

公式 43.4.5 圆内 Neumann 问题(Neumann problem)

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & x^2+y^2<R^2,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{x^2+y^2=R^2} = f(\theta), & \tan\theta = \dfrac{y}{x}\end{cases} \tag{43.6}$$

的解为

$$u(r,\theta) = a_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln[R^2-2rR\cos(\theta-\tau)+r^2]f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

公式 43.4.6 圆环 Dirichlet 问题(Dirichlet problem)

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & R_1<r<R_2,\\ u(R_1,\theta) = \varphi(\theta), & u(R_2,\theta) = \psi(\theta)\end{cases} \tag{43.7}$$

的解为

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2}(a_0 + b_0 \ln r) + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n})\sin n\theta],$$

其中 a_n, b_n, c_n, d_n 由下式联立确定

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\mathrm{d}\theta, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\mathrm{d}\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta; \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta. \end{cases}$$

公式 43.4.7 立方体域上 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi, \\ u(0,y,z) = u(\pi,y,z) = 0, \\ u(x,0,z) = u(x,\pi,z) = 0, \\ u(x,y,0) = f(x,y), \quad u(x,y,\pi) = 0 \end{cases} \tag{43.8}$$

的解为

$$u(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \sinh\left[\sqrt{m^2+n^2}(\pi - z)\right]\sin mx \sin ny,$$

其中

$$a_{m,n} = \frac{4}{\pi^2 \sinh(\sqrt{m^2+n^2}\,\pi)}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x,y)\sin mx \sin ny \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

公式 43.4.8 长方体内的波的传播问题

$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0,\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2, 0 < z < l_3, \\
u|_{\Sigma} = 0, \qquad \Sigma \text{为长方体边界}, \\
u|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y,z)
\end{cases}
\tag{43.9}
$$

的解为

$$
u(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{k,m,n}\cos\sqrt{\lambda}\,at + b_{k,m,n}\sin\sqrt{\lambda}\,at\right]\cdot \sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{n\pi z}{l_3},
$$

其中

$$
a_{k,m,n} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3}\varphi(x,y,z)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{n\pi z}{l_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,
$$

$$
b_{k,m,n} = \frac{8}{\sqrt{\lambda}\,a l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3}\psi(x,y,z)\sin\frac{k\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}\sin\frac{n\pi z}{l_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,
$$

$$
\lambda = \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{n^2}{l_3^2}\right)\pi^2.
$$

44 积分变换法

44.1 Fourier 变换与 Cauchy 问题

定义 44.1.1 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$内的函数，在$[-l,l]$上有连续导数，则称函数

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi$$

为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**(Fourier transform)，记为 $F[f]$(也记为 $\hat{f}$).

定义 44.1.2 设 $g(x)$ 使下述积分有意义，称

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda$$

为 $g(\lambda)$的 **Fourier 逆变换**(inversion of Fourier transform)，记为 $F^{-1}[g]$(也记为 $\check{g}$).

定义 44.1.3 如果对 $f_1(x),f_2(x)$，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x-t)f_2(t)\mathrm{d}t$$

存在，则称 $f(x)$为 $f_1(x)$与 $f_2(x)$的**卷积**(convolution of functions)，记为 $f(x)=f_1*f_2$.

Fourier 变换的性质

(1) Fourier 变换是线性变换，即对任意复数 α,β 及函数 f_1，f_2，成立

$$F[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha F[f_1]+\beta F[f_2].$$

(2) $f_1(x)$与 $f_2(x)$卷积的 Fourier 变换等于 $f_1(x)$与 $f_2(x)$

的 Fourier 变换的乘积,即

$$F[f_1 * f_2]=F(f_1)\cdot F(f_2).$$

(3) $F[f_1\cdot f_2]=\frac{1}{2\pi}F[f_1]*F[f_2]$.

(4) 如果 $f(x)$,$f'(x)$均可进行 Fourier 变换,而且当$|x|\to\infty$时,$f(x)\to 0$,则有

$$F[f'(x)]=\mathrm{i}\,\lambda F[f(x)].$$

(5) 如果 $f(x)$及 $xf(x)$均可进行 Fourier 变换,则

$$F[-\mathrm{i}\,xf(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F[f].$$

定义 44.1.4 n 维 Fourier 变换及逆变换 多个自变量函数的 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}F[f]&=g(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,\end{aligned}$$

逆变换为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}g(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_1\lambda_1+\cdots+x_n\lambda_n)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

例 44.1.5 用 Fourier 变换求解热传导 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+f(x,t),\\u(x,0)=\varphi(x).\end{cases}$$

解 将 $u(x,t)$关于 x 进行 Fourier 变换,记 $F[u(x,t)]=\tilde{u}(\lambda,t)$, $F[f(x,t)]=\tilde{f}(\lambda,t)$. $F[\varphi(x)]=\tilde{\varphi}(\lambda)$,对方程进行 Fourier 变换,有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}=-a^2\lambda^2\tilde{u}+\tilde{f}(x,t),\\\tilde{u}(\lambda,0)=\tilde{\varphi}(\lambda).\end{cases}$$

解之得

$$\tilde{u}(\lambda,t) = \tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t} + \int_0^t \tilde{f}(\lambda,\tau)e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}d\tau.$$

又

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

$$F^{-1}[e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

因此

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

理论上可以证明,这个形式解即是原定解问题的解.

公式 44.1.6 二维热传导 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\ u|_{t=0} = \varphi(x,y)\end{cases} \tag{44.1}$$

解的表达式为

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi,\eta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}}d\xi\, d\eta.$$

44.2 广义函数与基本解

为了引出一般广义函数的概念,我们先考察$[a,b]$上的平方可积函数. 如果$f(x)\in L^2[a,b]$,则它以下列方式定义了$L^2[a,b]$上的一个线性连续泛函:

$$F(\varphi) = \langle f,\varphi\rangle = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\, \varphi(x)\in L^2[a,b]. \tag{44.2}$$

反之，根据 Riesz(里斯)表现定理知道，对于 $L^2[a,b]$中的一个线性连续泛函，就有惟一的函数 $f(x)\in L^2[a,b]$与之对应.

定义 44.2.1 广义函数(distribution)是指定义在某特定函数空间上的线性连续泛函.

广义函数与它作用在哪一个函数空间密切相关. 为了一般地定义广义函数，首先要将 $\varphi(\boldsymbol{x})$所属的函数空间描述清楚，称 $\varphi(\boldsymbol{x})$所属的函数空间为**基本函数空间**(basic functions space). 广义函数的作用记为

$$T(\varphi)=\langle T,\varphi\rangle, \tag{44.3}$$

$\varphi(\boldsymbol{x})$属于基本函数空间.

定义 44.2.2 函数的支集(support of functions)是指 $\varphi(\boldsymbol{x})\neq 0$的点全体构成的点集的闭包，称为 $\varphi(\boldsymbol{x})$的**支集**，记作 $\operatorname{supp}\varphi(\boldsymbol{x})$，即

$$\operatorname{supp}\varphi(\boldsymbol{x})=\overline{\{\boldsymbol{x}\mid\varphi(\boldsymbol{x})\neq 0\}}.$$

如果 $\varphi(\boldsymbol{x})$的支集是$\mathbb{R}^n$中的紧集(即有界闭集)，则称 $\varphi(\boldsymbol{x})$有**紧支集**(compact support).

定义 44.2.3 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$空间中的元素是在$\mathbb{R}^n$中无穷可微而且有紧支集的函数. 在 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$中的极限关系是：

如果 $\varphi_\nu\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，且满足：

(1) 所有 φ_ν 的支集在一个共同的紧集内，

(2) 对每个重指标 α，在上述紧集内，

$$\partial^\alpha\varphi_\nu\to 0$$

一致成立，则称 $\varphi_\nu\to 0(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$.

定义 44.2.4 如果定义在$\mathbb{R}^n$上的函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$满足如下性质：

(1) $\varphi(\boldsymbol{x})$为$\mathbb{R}^n$中的 C^∞ 函数，

(2) $\varphi(\boldsymbol{x})$在无穷远处急剧下降，即对于任意的重指标 α,p，成立

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\boldsymbol{x}^\alpha\partial^p\varphi(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}.$$

则称 $\varphi(\boldsymbol{x})$为**速降函数**. 其全体记作 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,称为**速降函数空间**(space of rapidly decreasing functions).

定义 44.2.5 如果函数 $f(\boldsymbol{x})$连续,且存在正整数 k,使对某个常数 C,成立

$$|f(\boldsymbol{x})|\leqslant C(1+\|\boldsymbol{x}\|^2)^k,$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$为**缓增函数**(slowly increasing function).

定义 44.2.6 我们称 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$上的线性连续泛函为 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$广义函数;称 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$上的线性连续泛函为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$广义函数;称 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$上的线性连续泛函为 $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$广义函数.

定义 44.2.7 若有一广义函数 $T\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,对于任一函数 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,$\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega$,有

$$\langle T,\varphi\rangle=0,$$

则称 T 在 Ω 内为零,或者称 T 在 Ω 内取零值.

定义 44.2.8 广义函数的支集(support of distributions)是指使广义函数 T 取零值的最大开集的余集,记作 $\operatorname{supp} T$.

定义 44.2.9 一维 δ-函数是指

$$\begin{cases}\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases}\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}\delta(x)=0, & x\neq 0,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=1,\end{cases}$$

或对 $x=0$ 处连续的函数 $f(x)$,有

$$\langle\delta(x),f(x)\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\mathrm{d}x=f(0).$$

定义 44.2.10 二维 δ-函数 $\delta(x,y)$是指满足下述运算性质的广义函数:

$$\langle \delta, f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(0,0),$$

其中 $f(x,y)$ 是连续函数.

定义 44.2.11 三维 δ- 函数是指满足下述运算性质的广义函数 $\delta(x,y,z)$:

$$\langle \delta, f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,y,z) f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = f(0,0,0),$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数.

定义 44.2.12 若有一列广义函数 $\{T_k\}$,对于基本空间中任一元素 φ,成立

$$\langle T_k, \varphi\rangle \to 0,$$

则称 T_K **弱收敛**(weak convergence)于零. 如果 $T_K - T$ 弱收敛于零,则称 T_K 的极限是 T,记为 $T_k \to T$. 如此定义的极限称为广义函数的极限(limit of distributions).

定义 44.2.13 设 T 为 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数,定义 T 关于 x_k 的偏导数为广义导数 $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$,满足:

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi\right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right\rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

定义高阶导数 $\partial^\alpha T$ 为

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

α 为重指标, $\partial^\alpha T = \dfrac{\partial^\alpha T}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\sum \alpha_i = |\alpha|$. 如此定义的导数称为广义函数的导数(derivative of distributions).

例 44.2.14 考虑 Heaviside(赫维赛)函数

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

作为广义函数,它在 $\mathbb{R}^1$ 上可导, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$,

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}, \varphi\right\rangle = -\left\langle H, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right\rangle = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x} = \delta(x).$$

定义 44.2.15 设 T 为 $\mathscr{D}'$ 广义函数，$\alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$，则定义 α 与 T 的乘积 αT 为

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

定义 44.2.16 两个广义函数 S, T 的卷积定义为

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle,$$

这里 S, T 的下标 x, y 表示它们是作用在 $C_0^{\infty}(\mathbb{R}_x^n)$ 与 $C_0^{\infty}(\mathbb{R}_y^n)$ 上的广义函数.

广义函数卷积的性质(假定下面所写的卷积都是存在的)：

(1) $(R * S) * T = R * (S * T)$,

(2) $\delta * T = T$,

(3) $\partial_k T = (\partial_k \delta) * T$,

(4) $\partial_k (S * T) = (\partial_k S) * T = S * (\partial_k T)$.

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换的性质：

$$F[f] = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$F^{-1}[g] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{e}^{\mathrm{i} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

(1) Fourier 变换是线性的，对于任意复数 α_1, α_2.

$$F[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 F[f_1] + \alpha_2 F[f_2].$$

(2) $F[\partial_j f] = \mathrm{i}\, \xi_j F[f]$,

$F[\partial^{\alpha} f] = \mathrm{i}^{|\alpha|} \xi^{\alpha} F[f]$,

$F[-\mathrm{i}\, x_j f] = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j} F[f]$,

$F[(-\mathrm{i})^{|\alpha|} \boldsymbol{x}^{\alpha} f] = \partial^{\alpha} F[f]$.

(3) $F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$,

$$F[f\cdot g]=(2\pi)^{-n}F[f]*F[g].$$

(4) 关于 Fourier 变换的 Parseval 等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\cdot \bar{g}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} F[f]\cdot \overline{F[g]}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(5) Fourier 变换建立了 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的一个同构对应.

定义 44.2.17 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上广义函数的 Fourier 变换(Fourier transform of distributions) 对于任一 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数 T,它的 Fourier 变换 $F[T]$ 为

$$\langle F[T],\varphi\rangle=\langle T,F[\varphi]\rangle,\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

例 44.2.18 求 δ 函数的 Fourier 变换.

解 $\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\langle F[\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})],\varphi\rangle&=\langle\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),F[\varphi]\rangle\\&=\langle\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}),\int\varphi(\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\rangle\\&=\int\varphi(\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\xi}}\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}=\langle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\xi}},\varphi\rangle,\end{aligned}$$

故 $F[\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\xi}}$. 特别地,当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,$F[\delta(\boldsymbol{x})]=1$.

性质 44.2.19 若 $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$,则

$$\begin{aligned}&F^{-1}[F[T]]=T,\\&F[\partial_j T]=\mathrm{i}\,\xi_j\,F[T],\\&F[\partial^\alpha T]=\mathrm{i}^{|\alpha|}\boldsymbol{\xi}^\alpha F[T],\\&F[-\mathrm{i}\,x_j T]=\frac{\partial}{\partial\xi_j}F[T],\\&F[(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\boldsymbol{x}^\alpha T]=\partial^\alpha F[T].\end{aligned}$$

定义 44.2.20 设已知一个 m 阶常系数微分方程

$$P(\partial)u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha\partial^\alpha u=0.\tag{44.4}$$

如果能找到一个广义函数 $E\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$,使

$$P(\partial)E=\delta$$

成立，则称 E 为微分方程(44.4)的基本解(fundamental solution).

如果已知微分方程(44.4)的基本解 E，则对于非齐次方程

$$P(\partial)u=f,$$

其解为 $u=E*f$.

例 44.2.21 热传导方程的基本解.

考虑

$$\frac{\partial E}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\delta(t,x)=\delta(t)\delta(x),$$

方程两边实行 Fourier 变换后，有

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{E}}{\mathrm{d}t}+a^2\xi^2\widetilde{E}=\delta(t),$$

故

$$\widetilde{E}=\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cdot H(t).$$

求逆变换知热传导方程的基本解

$$E(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}H(t).$$

例 44.2.22 椭圆型方程

$$\Delta E=\delta$$

的基本解.

当 $n=2$ 时，$E(r)=\frac{1}{2\pi}\ln r$；

当 $n>2$ 时，$E(r)=-\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}}\cdot\frac{1}{r^{n-2}}$，

其中 ω_{n-1} 表示 $n-1$ 维单位球面的面积；

当 $n\geqslant 2$ 任意正整数时，

$$\Delta^m E=0$$

的基本解为

$$E=\begin{cases}C_{m,n}r^{2m-n}\ln r, & 2m-n\geqslant 0,\text{且为偶数},\\ C_{m,n}r^{2m-n}, & \text{其他情形},\end{cases}$$

其中 $C_{m,n}$ 为仅与 m,n 有关的常数.

例 44.2.23 n 维热传导方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial t}=a^2\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_i^2},\\ E(\boldsymbol{x},0)=\delta(\boldsymbol{x})\end{cases}$$

的基本解.

两边进行 Fourier 变换,有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{E}}{\mathrm{d}t}=-a^2\|\boldsymbol{\xi}\|^2\widetilde{E},\\ \widetilde{E}|_{t=0}=1.\end{cases}$$

解为

$$\widetilde{E}(\boldsymbol{\xi},t)=\mathrm{e}^{-a^2\|\boldsymbol{\xi}\|^2 t},$$

故基本解为

$$E(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\mathrm{e}^{-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2 t}}.$$

例 44.2.24 三维波动方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 E}{\partial x_3^2}\right),\\ E|_{t=0}=0,\\ \left.\dfrac{\partial E}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta(x_1,x_2,x_3)\end{cases}$$

的基本解.

关于变量 x_1,x_2,x_3 进行 Fourier 变换,有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2\widetilde{E}}{\mathrm{d}t^2}=-a^2(s_1^2+s_2^2+s_3^2)\widetilde{E},\\ \widetilde{E}|_{t=0}=0,\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{E}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1.\end{cases}$$

解为

$$\widetilde{E}=\frac{\sin a\rho t}{a\rho}, \qquad \rho=\| \boldsymbol{s} \| = \sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2},$$

基本解为

$$\begin{aligned} E(x_1,x_2,x_3,t) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbf{R}^3} \frac{\sin a\rho t}{a\rho} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(s_1x_1+s_2x_2+s_3x_3)} \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \mathrm{d}s_3 \\ &= \frac{1}{4\pi ar}\delta(r-at), \end{aligned}$$

其中 $r=\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

44.3 Laplace 变换

定义 44.3.1 指数阶函数(function of exponential order)是指对函数 $f(t)$,当 t 充分大时,存在常数 M, a 使

$$|f(t)|<M\mathrm{e}^{at}$$

成立.

定义 44.3.2 设 $f(t)$为指数阶函数,定义 $f(t)$的 Laplace 变换(Laplace transform)为

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\mathrm{d}t,$$

称 $f(t)$为原函数,$F(s)$为象函数.

定义 44.3.3 Laplace 逆变换为

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma_0-\mathrm{i}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{st}F(s)\mathrm{d}s \\ &= \lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma_0-\mathrm{i}\omega}^{\sigma_0+\mathrm{i}\omega} \mathrm{e}^{st}F(s)\mathrm{d}s (\text{主值意义下}). \end{aligned}$$

性质 44.3.4 “$\rightarrow$”是指原象变为象

(1) Laplace 变换是线性变换,设 α_1,α_2 为任意复数,则

$$\alpha_1 f_1(t)+\alpha_2 f_2(t)\longrightarrow\alpha_1 F_1(s)+\alpha_2 F_2(s).$$

(2) 微分性质

$$f^{(n)}(t) \to s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

(3) 积分性质

$$\underbrace{\iint \cdots \int}_{n\text{重}} f(t)(\mathrm{d}t)^n \to s^{-n} F(s) + s^{-n} f_0^{(-1)} + \cdots + s^{-1} f_0^{(-n)},$$

其中

$$f_0^{(-n)} = \lim_{t \to 0^+} \left[\underbrace{\iint \cdots \int}_{n\text{重}} f(t)(\mathrm{d}t)^n \right].$$

(4) 放大

$$f(at) \to \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \qquad a > 0.$$

(5) 卷积

$$f_1 * f_2 \to F_1(s) F_2(s).$$

(6) 平移

$$f(t-a) \to \mathrm{e}^{-as} F(s), \qquad f(t+a) \to \mathrm{e}^{as} F(s).$$

(7) 用 $\mathrm{e}^{\pm\lambda t}$ 乘,则

$$\mathrm{e}^{-\lambda t} f(t) \to F(s+\lambda), \qquad \mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \to F(s-\lambda), \qquad \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0.$$

(8) 参数性质

$$\lim_{\alpha \to a} f(t,\alpha) \to \lim_{\alpha \to a} F(s,\alpha), \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} f(t,\alpha) \to \frac{\partial}{\partial \alpha} F(s,\alpha),$$

$$\int_0^a f(t,\alpha)\mathrm{d}\alpha \to \int_0^a f(s,\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

(9) 有理函数

$$\sum_i \frac{H_0(a_i)}{H'(a_i)} \mathrm{e}^{a_i t} \to \frac{H_0(s)}{H(s)},$$

a_i 是 $H(s) = 0$ 的单实根.

$$\frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}s^{n-1}} \left[\frac{H_0}{H} \right]_{s=0} \mathrm{e}^{a_i t} \right\} + \sum_i \frac{H_0(a_i)}{a_i^n H(a_i)} \mathrm{e}^{a_i t} \to \frac{H_0(s)}{s^n H(s)},$$

$H_0(0) \neq 0$, $H(a_i) = 0$ 单实根. 这里 $H_0(s)$, $H(s)$ 分别是 s 的多项式.

44.4 Laplace 变换的应用

设有以 $u(t,x)$ 为未知函数的常系数二阶线性微分方程

$$Au_{tt} + 2Bu_{tx} + Cu_{xx} + au_t + bu_x + cu = f(t,x), \tag{44.5}$$

及边界条件、初始条件为

$$\begin{cases} u(0,x) = f_1(x), & u_t(0,x) = f_2(x), \\ u(t,0) = g_1(t), & u_x(t,0) = g_2(t). \end{cases} \tag{44.6}$$

对 t 进行 Laplace 变换，令

$$u(t,x) \to U(s,x), \qquad f(t,x) \to F(s,x),$$

则(44.5) 化为

$$\begin{aligned} & c\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2} + (2Bs+b)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} + (As^2+as+c)U \\ = & F + A(sf_1+f_2) + 2Bf'_1 + af_1, \end{aligned} \tag{44.7}$$

条件(44.6) 化为

$$U(s,0) = G_1(s), \qquad U_x(s,0) = G_2(s). \tag{44.8}$$

再对 x 进行 Laplace 变换，并令

$$U(s,x) \to W(s,\sigma), \qquad F(s,x) \to G(s,\sigma),$$

则方程(44.7) 化为

$$\begin{aligned} & [As^2 + 2Bs\sigma + C\sigma^2 + as + b\sigma + c]W \\ = & G + A(sF_1+F_2) + 2B[\sigma F_1 - f_1(0)] + C[\sigma G_1 + G_2] + aF_1 - bG_1. \end{aligned} \tag{44.9}$$

解出 $W(s,\sigma)$ 后经过两次逆变换，即可得到原方程(44.5) 的解.

例 44.4.1 椭圆型偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & 0<x<l,t>0,\\ u\big|_{t=0}=f_1(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f_2(x),\\ u\big|_{x=0}=g_1(t), & u\big|_{x=l}=g_2(t),\end{cases}$$

在象空间中变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2U(x,s)}{\mathrm{d}x^2}+s^2U=f_1(x)s+f_2(x),\\ U(0,s)=G_1(s),\\ U(l,s)=G_2(s).\end{cases}$$

$$U(x,s)=-\int_0^l G(x,\xi;s)[g_1(\xi)s+g_2(\xi)]\mathrm{d}\xi$$

$$+F_1(s)\frac{\sin(l-x)s}{\sin ls}+F_2(s)\frac{\sin xs}{\sin ls},$$

其中

$$G(x,\xi;s)=\begin{cases}\dfrac{\sin(l-x)s\cdot\sin\xi s}{s\sin ls}, & 0\leqslant\xi\leqslant x,\\ \dfrac{\sin(l-\xi)s\cdot\sin xs}{s\sin ls}, & x\leqslant\xi\leqslant 1.\end{cases}$$

例 44.4.2 双曲型偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t>0,x>0,\\ u(x,0)=f_1(x), & u_t(x,0)=f_2(x),\\ u(0,t)=0, & u(+\infty,t)=0.\end{cases}$$

对 t 作 Laplace 变换,得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{s^2}{a^2}U=-\dfrac{s}{a^2}f_1(x)-\dfrac{1}{a^2}f_2(x),\\ U(0,s)=0,\\ U(+\infty,s)=0.\end{cases}$$

再对 x 作 Laplace 变换，令 W 为 U 的象，即

$$U(x,s) \to W(\sigma,s),$$

W 为 u 的二重象函数．方程变为

$$s^2W - sF_1(\sigma) - F_2(\sigma) = a^2\sigma^2W - a^2F_3(s),$$

其中 $f_1(x) \to F_1(\sigma), f_2(x) \to F_2(\sigma), F_3(s) = U_x(0,s)$. 解出 $W(\sigma,s)$ 为

$$W(\sigma,s) = \frac{sF_1(\sigma)}{s^2-a^2\sigma^2} + \frac{F_2(\sigma)}{s^2-a^2\sigma^2} + \frac{-a^2F_3(s)}{s^2-a^2\sigma^2},$$

将 σ 返回到 x，有

$$\begin{aligned}
U(x,s) = \frac{1}{2a}\Big\{&\frac{2a}{s}f_1(x) - \frac{a}{s}\int_0^x f'_1(\xi)\exp\left[-\frac{s}{a}(x-\xi)\right]d\xi \\
&- \frac{a}{s}\int_0^\infty f'_1(\xi)\exp\left[-\frac{s}{a}(x+\xi)\right]d\xi \\
&+ \frac{a}{s}\int_x^\infty f'_1(\xi)\exp\left[-\frac{s}{a}(\xi-x)\right]d\xi \\
&+ \frac{1}{s}\int_0^x f_2(\xi)\exp\left[-\frac{s}{a}(x-\xi)\right]d\xi \\
&+ \frac{1}{s}\int_x^\infty f_2(\xi)\exp\left[-\frac{s}{a}(\xi-x)\right]d\xi \\
&- \frac{1}{s}\int_0^\infty f_2(\xi)\exp\left[-\frac{s}{a}(x+\xi)\right]d\xi,
\end{aligned}$$

再把 s 返回到 t，得到解

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\{f_1(x+at) - f_1(at-x)\} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{at+x} f_2(\xi)d\xi, & at > x, \\ \dfrac{1}{2}\{f_1(x+at) + f_1(at-x)\} \\ \quad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{at+x} f_2(\xi)d\xi + \int_0^{x-at} f_2(\xi)d\xi, & at < x. \end{cases}$$

这就是 D'Alembert 公式在半无界情况的应用.

例 44.4.3 抛物型偏微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & \\ u|_{x=0}=g_1(t), & u|_{x=l}=g_2(t).\end{cases}$$

我们不妨设 $\varphi(x)=0$, $l=+\infty$, $g_1(t)=u_0$. 来求半无界问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad x>0,t>0.$$

对 t 进行 Laplace 变换，有

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{s}{a^2}U=0.$$

解之

$$U=Ae^{-x\frac{\sqrt{s}}{a}}+Be^{x\frac{\sqrt{s}}{a}}.$$

为使 $x\to\infty$ 时解有界，令 $B=0$. 故

$$U(x,s)=\frac{u_0}{s}e^{-x\frac{\sqrt{s}}{a}},$$

从而

$$\begin{aligned}u(x,t)&=u_0\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\\&=u_0\left(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\\&=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-t^2}dt,\end{aligned}$$

其中误差函数 $\operatorname{erf}(y)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-t^2}dt$,余误差函数 $\operatorname{erfc}(y)=1-\operatorname{erf}(y)$.

44.5 积分变换表

在给出积分变换表 44.1～表 44.6 之前，我们再给出 4 种积分变换的定义.

定义 44.5.1 设函数 $g(r,\theta)$ 具有圆对称性，即

$$g(r,\theta)=g_R(r).$$

称 $G_P(\rho) = 2\pi\int_0^\infty r g_R(r) \mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}r$ 为 g 的 **Fourier-Bessel 变换**(Fourier-Bessel transform)，其中 $\mathrm{J}_0(x)$ 为零阶 Bessel 函数. 反变换为

$$g_R(r) = 2\pi\int_0^\infty \rho G_P(\rho)\mathrm{J}_0(2\pi\rho r)\mathrm{d}\rho.$$

定义 44.5.2 函数 $f(x)$ 的 **Hilbert**(希尔伯特) **变换**(Hilbert transform) 定义为

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{Hi}}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\alpha)}{\alpha - x}\mathrm{d}\alpha \\ &= f(x) * \left(-\frac{1}{\pi x}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{f(\alpha)}{\alpha - x}\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\alpha)}{\alpha - x}\mathrm{d}x\right]. \end{aligned}$$

反变换定义为

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F_{\mathrm{Hi}}(\alpha)}{\alpha - x}\mathrm{d}\alpha.$$

定义 44.5.3 设函数具有圆对称性 $f = f(r)$，其 **Abel 变换**(Abel transform) 定义为

$$F_{\mathrm{A}}(x) = 2\int_{|x|}^{\infty}\frac{f(r)r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 反变换为

$$f(r) = -\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^\infty F_{\mathrm{A}}(x)\frac{r\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - r^2}}.$$

定义 44.5.4 函数 $f(x)$ 的 **Mellin**(梅林) **变换**(Mellin transform) 由积分

$$F_{\mathrm{M}}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x$$

定义. Mellin 反变换的定义式为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F_M(s)x^{-s}ds.$$

表 44.1 Fourier 变换表

原象函数	象函数
$f(x)$	$g(\lambda)$
$f'(x)$	$(i\lambda)g(\lambda)$
$f^{(n)}(x)$	$(i\lambda)^n g(\lambda)$
$f(x)e^{iax}$	$g(\lambda-a)$
$f_1 * f_2$	$g_1(\lambda)g_2(\lambda)$， $g_i(\lambda)$是 f_i 的变换
$f(x)=\begin{cases}h, & -l<x<l\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$2h\frac{\sin\lambda l}{\lambda}$
$\delta(x)$	1
$\frac{\sin ax}{x}$	$g(\lambda)=\begin{cases}\pi, & \lvert\lambda\rvert<a\\ 0, & \lvert\lambda\rvert>a\end{cases}$
$f(x)=\begin{cases}e^{i\omega x}, & a<x<b\\ 0, & x<a \text{ 或 } x>b\end{cases}$	$\frac{i}{\omega-\lambda}(e^{ia(\omega-\lambda)}-e^{ib(\omega-\lambda)})$
$f(x)=\begin{cases}e^{-cx+i\omega x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\frac{i}{\omega-\lambda+ic}$
$e^{-\eta x^2}$， $\mathrm{Re}\,\eta>0$	$\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\lambda^2}{4\eta}}$
$\cos\eta x^2$	$\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\lambda^2}{4\eta}-\frac{\pi}{4}\right)$
$\sin\eta x^2$	$\left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\lambda^2}{4\eta}+\frac{\pi}{4}\right)$

续表

原象函数	象函数
$\|x\|^{-s}$，　$0<\mathrm{Re}\,s<1$	$\dfrac{2}{\|\lambda\|^{1-s}}\Gamma(1-s)\sin\dfrac{1}{2}\pi s$
$\dfrac{1}{\|x\|}\mathrm{e}^{-a\|x\|}$	$\left(\dfrac{2\pi}{a^2+\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}[(a^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}+a]^{\frac{1}{2}}$
$\dfrac{1}{\|x\|}$	$\dfrac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{\|\lambda\|}$
$\dfrac{\cosh ax}{\cosh \pi x}$，　$-\pi<a<\pi$	$\dfrac{2\cos\dfrac{a}{2}\cosh\dfrac{\lambda}{2}}{\cosh\lambda-\cos a}$
$\dfrac{\sinh ax}{\sinh \pi x}$，　$-\pi<a<\pi$	$\dfrac{\sin a}{\cosh\lambda+\cos a}$
$f(x)=\begin{cases}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}, & \|x\|<a\\ 0, & \|x\|>a\end{cases}$	$\pi \mathrm{J}_0(a\lambda)$
$\dfrac{\sin[b(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}]}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$	$g(\lambda)=\begin{cases}0, & \|\lambda\|>b\\ \pi \mathrm{J}_0(a\sqrt{b^2-\lambda^2}), & \|\lambda\|<b\end{cases}$
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(b(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}})}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}, & \|x\|<a\\ 0, & \|x\|>a\end{cases}$	$\pi \mathrm{J}_0(a\sqrt{b^2+\lambda^2})$
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cosh(b(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}})}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}, & \|x\|<a\\ 0, & \|x\|>a\end{cases}$	$g(\lambda)=\begin{cases}\pi \mathrm{J}_0(a\sqrt{\lambda^2-b^2}), & \|\lambda\|>b\\ 0, & \|\lambda\|<b\end{cases}$
1	$2\pi\delta(\lambda)$
多项式 $P(x)$	$2\pi P\left(\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right)\delta(\lambda)$

续表

原象函数	象函数
$\delta^{(m)}(x)$	$(\mathrm{i}\lambda)^m$
e^{bx}	$2\pi\delta(\lambda+\mathrm{i}b)$
$\sin bx$	$\mathrm{i}\pi(\delta(\lambda+b)-\delta(\lambda-b))$
$\cos bx$	$\pi(\delta(\lambda+b)+\delta(\lambda-b))$
$\sinh bx$	$\pi(\delta(\lambda+\mathrm{i}b)-\delta(\lambda-\mathrm{i}b))$
$\cosh bx$	$\pi(\delta(\lambda+\mathrm{i}b)+\delta(\lambda-\mathrm{i}b))$
x^{-1}	$-\mathrm{i}\pi\,\mathrm{sgn}\,\lambda$
x^{-2}	$-\pi\|\lambda\|$
x^{-m}	$(-\mathrm{i})^m\frac{\pi}{(m-1)!}\lambda^{m-1}\mathrm{sgn}\,\lambda$
$\|x\|^l,\quad l\neq-1,-3,\cdots$	$-2\sin\frac{l\pi}{2}\Gamma(l+1)\|\lambda\|^{-l-1}$
$\|x\|^{-\frac{1}{2}}$	$\|\lambda\|^{-\frac{1}{2}}$

表 44.2 Laplace 变换表

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$\delta(t)$	1
$E(t)=1$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$

续表

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$t^{-\frac{1}{2}}$	$\pi^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\exp(-k\sqrt{s})$
$t^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)$	$\frac{2}{k}\sqrt{\pi}\exp(-k\sqrt{s})$
$[\lambda+(\mu-a\lambda)t]e^{-at}$	$\frac{\lambda s+\mu}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{r}e^{-bt}\sin rt$	$\frac{1}{s^2+2bs+c}$, $r=\sqrt{c-b^2}$
$e^{-bt}\left(\cos rt-\frac{b}{r}\sin rt\right)$	$\frac{s}{s^2+2bs+c}$, $r=\sqrt{c-b^2}$
$\frac{1}{a}\sin at$	$\frac{1}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\frac{1}{a}\sinh at$	$\frac{1}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{bt}\sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$

续表

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\frac{t}{2a}\sin at$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$J_0(at)$	$(s^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}$
$\mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{-k\sqrt{s}}$

注　其中 erfc 是余误差函数.

表 44.3　Fourier-Bessel 变换表

$g_R(r)$	$G_P(\rho)$
$\frac{1}{2}\delta(r-a)$	$\pi a J_0(2\pi a\rho)$
$\exp[-\pi r^2]$	$\exp[-\pi\rho^2]$
$(a^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{e^{-2\pi a\rho}}{\rho}$
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{\rho}$
e^{-ar}	$\frac{2\pi a}{(4\pi^2\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$
$\frac{e^{-ar}}{r}$	$\frac{2\pi}{(4\pi^2\rho^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$
$r^2\exp[-\pi r^2]$	$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi}-\rho^2\right)\exp[-\pi\rho^2]$

表 44.4 Hilbert 变换简表

$f(x)$	$F_{Hi}(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\frac{\sin x}{x}$	$\frac{\cos x-1}{x}$
$\delta(x)$	$-\frac{1}{\pi x}$
$\Pi(x)=\begin{cases}1, & \lvert x\rvert<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & \lvert x\rvert=\frac{1}{2}\\ 0, & \lvert x\rvert>\frac{1}{2}\end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\lvert\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right\rvert$
$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{x}{1+x^2}$
C（常数）	0
$\frac{1}{\pi x}$	$\delta(x)$

表 44.5 Abel 变换简表

$f(r)$	$F_A(x)$
$\delta(r-a),\quad a>0$	$F_A(x)=\begin{cases}\frac{2a}{\sqrt{a^2-x^2}}, & \lvert x\rvert<a\\ 0, & \lvert x\rvert>a\end{cases}$
$\Pi\left(\frac{r}{2a}\right)$	$2\sqrt{a^2-x^2}\,\Pi\left(\frac{x}{2a}\right)$
$f(r)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}, & \lvert r\rvert<a\\ 0, & \lvert r\rvert>a\end{cases}$	$\pi\,\Pi\left(\frac{x}{2a}\right)$

续表

$f(r)$	$F_A(x)$
$\sqrt{a^2-r^2}\,\Pi\left(\frac{r}{2a}\right)$	$\frac{1}{2}\pi(a^2-x^2)\,\Pi\left(\frac{x}{2a}\right)$
$\exp(-r^2/2\sigma^2)$	$\sqrt{2\pi}\,\sigma\exp(-x^2/2\sigma^2)$
$\frac{\delta(r)}{\pi\lvert r\rvert}$	$\delta(x)$
$J_0(2\pi ar)$	$\frac{1}{\pi a}\cos 2\pi ax$

表 44.6　Mellin 变换简表

$f(x)$	$F_M(s)$
$\delta(x-a)$，　$a>0$	a^{s-1}
e^{-ax}，　$a>0$	$\frac{\Gamma(s)}{a^s}$，　$\mathrm{Re}(s)>0$.
e^{-x^2}	$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$
$\sin x$	$\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}$，　$-1<\mathrm{Re}\,s<1$
$\cos x$	$\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}$，　$-1<\mathrm{Re}\,s<1$
$\frac{1}{1+x}$	$\pi\csc\pi s$，　$0<\mathrm{Re}\,s<1$
$\frac{1}{1-x}$	$\pi\,\mathrm{ctan}\,\pi s$，　$0<\mathrm{Re}\,s<1$

45 Green 函数法

45.1 Green 函数与热传导方程基本解

长度为 l,侧表面绝热的均匀细杆,初始温度与细杆两端的温度已知,则杆上的温度分布 $u(x,t)$满足以下混合问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), & 0<x<l,0<t<T,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u|_{x=0}=g_1(t),\quad u|_{x=l}=g_2(t), & 0\leqslant t\leqslant T.\end{cases}\tag{45.1}$$

对于这样的问题我们可按照 43.2 节中的分离变量法来求解,这里我们给出另一种求解的方法——**Green 函数法**.

定义 45.1.1 设 $Q=\{(x,t)|0<x<l,t>0\}$,对于任意$(\xi,\tau)\in Q$,函数 $u(x,t)\in L(Q)\cap C[\overline{Q}\backslash(\xi,\tau)]$,且在广义函数意义下满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\delta(x-\xi,t-\tau), & (x,t)\in Q,\\ u|_{t=0}=0, & 0\leqslant x\leqslant l,\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0, & t\geqslant 0.\end{cases}\tag{45.2}$$

则称 $u(x,t)$为混合问题(45.2)的 **Green 函数**(Green function),记作 $G(x,t;\xi,\tau)$.

其物理意义是,考虑一根有限长的细杆,在 $t=\tau$ 时刻,在 $x=\xi$ 处放置一个单位点热源,若杆的两端温度保持为 0,则杆上所产生的温度分布即为 Green 函数.

类似于分离变量法,我们可以得到 Green 函数的表达式

$$G(x,t;\xi,\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}x \cdot e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2(t-\tau)} \cdot H(t-\tau). \tag{45.3}$$

Green 函数具有如下性质：

(1) 对称性　$G(x,t;\xi,\tau)=G(\xi,t;x,\tau)$.

(2) 当 $t>\tau$ 时，$G(x,t;\xi,\tau)$关于所有自变量无穷次连续可微，且满足方程

$$\frac{\partial G}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau}+a^2\frac{\partial^2 G}{\partial \xi}=0.$$

(3) 当 $t>\tau$ 时，$G(0,t;\xi,\tau)=G(l,t;\xi,\tau)=0$.

(4) 当 $t>\tau$ 时，有估计

$$|G(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{M}{\sqrt{t-\tau}},$$

其中 M 是常数.

(5) 如果 $\varphi\in C[0,l]$，且 $\varphi(0)=\varphi(l)=0$，则对于任意 $x\in[0,l]$

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^l G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=\varphi(x).$$

定义 45.1.2　记区域 $Q=\{0<x<l,0<t\leqslant T\}$，我们以 $C^{2,1}(Q)$表示所有在 Q 内关于 x 二阶连续可微、关于 t 一阶连续可微的函数构成的集合. 用 $C^{1,0}(Q)$表示在 Q 内函数本身连续且关于 x 一阶连续可微的函数构成的集合.

考虑一维热传导方程

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

其共轭算子记为

$$L^* u=-\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

定理 45.1.3 Green 公式(Green formula) 设 $u, v \in C^{2,1}(Q) \cap C^{1,0}(\bar{Q})$,则

$$\int_0^l u\, v\,|_{t=T}\mathrm{d}x = \iint_Q (v\,Lu - u\,L^*\,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^l u\,v\,|_{t=0}\mathrm{d}x$$

$$+ a^2\int_0^T \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=l}\mathrm{d}t$$

$$- a^2\int_0^T \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0}\mathrm{d}t.$$

混合问题(45.1)的解为

$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^l G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \int_0^l G(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+ a^2\int_0^t [G_\xi(x,t;0,\tau)g_1(\tau) - G_\xi(x,t;l,\tau)g_2(\tau)]\mathrm{d}\tau. \tag{45.4}$$

45.2 调和函数的性质

定义 45.2.1 具有二阶连续偏导数并且满足 Laplace 方程的连续函数称为调和函数(harmonic function).

调和函数的基本积分公式为

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma\left[u(M)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}\right) - \frac{1}{r_{M_0M}}\frac{\partial u(M)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S_M, \tag{45.5}$$

其中 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 内的某固定点,$r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$,$\Gamma = \partial\Omega$ 为区域边界,$\frac{1}{r_{M_0M}}$是 $\Delta u = 0$ 的基本解,$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}$表示外法向导数.

定理 45.2.2 设函数 u 在以 Γ 为边界的区域 Ω 内是调和的,在 $\Omega+\Gamma$ 上具有连续一阶偏导数,则

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = 0.$$

定理 45.2.3 平均值公式(mean value formula) 设函数$u(M)$在某区域Ω内调和,M_0是Ω中的任一点.若Γ_a是以M_0为中心,a为半径的球面,此球完全落在区域Ω的内部,则成立公式

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Gamma_a} u \mathrm{d}S.$$

定理 45.2.4 极值原理(extremum principle) 凡不恒等于常数的调和函数$u(x,y,z)$在区域Ω的任何内点上的值,不可能达到它在Ω上的上界或下界的数值.

推论 45.2.5 在有限区域Ω内调和,在$\Omega+\Gamma$上为连续的函数必在边界Γ上取得其最大值和最小值.

推论 45.2.6 比较原理(comparison theorem) 设u及v均为区域Ω内的调和函数,且在$\Omega+\Gamma$上连续,若在Ω的边界Γ上成立不等式$u \leqslant v$,则在Ω内上述不等式也成立,并且只有在$u \equiv v$时,在Ω内才会有等号成立的可能.

定理 45.2.7 调和函数的解析性定理(analyticity theorem of harmonic function) 设$u(M_0)$是区域Ω中的调和函数,那么它在Ω中是关于自变量(x_0, y_0, z_0)的解析函数,即在Ω中任一点$M_0^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$近旁,都可以展开成$x_0 - x_0^*, y_0 - y_0^*, z - z_0^*$的幂级数.

定理 45.2.8 Harnack(哈纳克)定理(Harnack theorem) 如果函数序列$\{u_k\}$中的每个函数在某有限区域Ω内都是调和函数,在闭区域$\Omega+\Gamma$上连续,而且此函数序列在Γ上一致收敛,则它在Ω内也一致收敛,并且极限函数u在区域Ω内也是调和函数.

定理 45.2.9 单调性定理(theorem of monotonicity) 如果在区域Ω内的调和函数序列$\{u_k\}$在Ω的某一内点A收敛,并且对

于任何 k 在区域 Ω 内的一切点上都有

$$u_{k+1}\geqslant u_k,$$

那么序列 $\{u_k\}$ 在区域 Ω 内处处收敛于某一调和函数 u，并且在 Ω 的所有有界闭子域上一致收敛.

定理 45.2.10 关于调和函数导数的估值定理 设在区域 Ω 上给定了一致有界的调和函数族，则在任一连同其边界都包含于 Ω 内的区域 Ω' 上函数族内一切函数的导数都一致有界.

定理 45.2.11 关于一致有界的调和函数族的列紧性定理 从任一在区域 Ω 上一致有界的调和函数族（无穷函数族）中可以选出一个在 Ω' 上一致收敛的无穷序列，其中 $\Omega'+\partial\Omega'\subset\Omega$.

定理 45.2.12 奇点可去性定理(movability of singular point of harmonic function) 设 $u(M)=u(x,y,z)$ 在点 A 的邻域内除点 A 外是调和函数，在 A 点附近成立

$$\lim_{M\to A} r_{AM}\cdot u(M)=0,$$

其中 r_{AM} 表示 A 点与 M 点的距离. 则可定义函数 u 在点 A 的值，使 $u(M)$ 在整个所考虑的点 A 的邻域内（包括 A 点在内）是调和函数.

45.3 Green 函数与 Laplace 方程第一边值问题

定义 45.3.1 设 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$，$M=(x,y,z)$，考察函数 $g(M,M_0)$，它在区域 Ω 内关于变量 M 是到处调和的，并且在区域 Ω 的边界 Γ 上与函数 $\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ 在 Γ 上的值相同，即

$$g(M,M_0)\big|_\Gamma=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}\bigg|_\Gamma.$$

令

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}-g(M,M_0),$$

称为 **Laplace 方程的 Green 函数**，其中

$$r_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},\qquad M_0,M\in\Omega.$$

公式 43.3.2 Green 第一公式

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v)\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Gamma}u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\mathrm{grad}\ u\cdot\mathrm{grad}\ v\ \mathrm{d}\Omega. \tag{45.6}$$

公式 45.3.3 Green 第二公式

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S. \tag{45.7}$$

利用 Green 第二公式及(45.5)调和函数的基本公式，我们可以得到 Laplace 方程 Dirichlet 问题的解的表达式：

$$u(M_0)=\iint_{\Gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S_M, \tag{45.8}$$

其中 G 是定义 45.3.1 中的 Green 函数.

Green 函数具有下列性质：

(1) Green 函数 $G(M,M_0)$ 除去 $M=M_0$ 外处处满足 Laplace 方程，当 $M\to M_0$ 时，$G(M,M_0)$ 趋于无穷大，其阶数与 $\frac{1}{r_{MM_0}}$ 相同.

(2) 在边界 Γ 上 Green 函数 $G(M,M_0)\equiv 0$.

(3) 在区域 Ω 内成立不等式

$$0<G(M,M_0)<\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}.$$

(4) Green 函数具有对称性，即设 M_1,M_2 为 Ω 中两点，则

$$G(M_1,M_2)=G(M_2,M_1).$$

(5) $\displaystyle\iint_{\Gamma}\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S_M=-1.$

Green 函数的物理意义：在物体内部 $M=M_0$ 处放置一个单位点热源，与外界接触的表面保持恒温 $u=0$，那么物体的稳定温度场就是 Green 函数. 或者说某导体的表面接地，在内部 M_0 处放置一单位点电荷，那么在导体内部产生的电位分布也是 Green 函数.

45.4 特殊区域上的 Green 函数

例 45.4.1 圆上的 Green 函数,Poisson 公式.

设 Ω 是以原点为心,a 为半径的圆 B_a. 在圆 B_a 外的 $P^*(\xi^*, \eta^*)$处虚设点源,它与圆内的点源的位置 $P(\xi,\eta)$具有某种对称性(见图 45.1). 我们可以求得 Green 函数为

$$G(Q,P)=G(x,y;\xi,\eta)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\overline{QP}}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho\cdot\overline{QP^*}},$$

其中分母中$\overline{QP}$表示长度. (ρ,θ)为 P 点的极坐标. 在极坐标形式下有

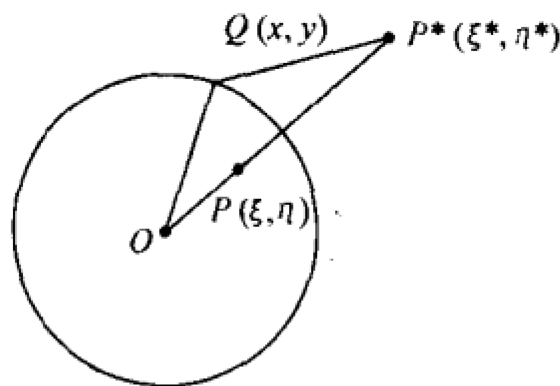


图 45.1

$$G(r,d;\rho,\theta)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)]},$$

外法向导数

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{r=a}=\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a}=\frac{1}{2\pi a}\frac{\rho^2-a^2}{\rho^2+a^2-2\rho a\cos(\theta-\alpha)}.$$

从而,圆上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,y), & (x,y)\in B_a.\\ u|_{\partial B_a}=\varphi(\alpha)\end{cases}$$

的解 $u(\rho,\theta)$可表示成

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_0^a\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\ln\frac{\rho^2r^2+a^4-2r\rho a^2\cos(\theta-\alpha)}{a^2[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)]}f(r,\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\varphi(\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

特别地,当 $f\equiv 0$ 时,

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho^2)\varphi(\alpha)}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\theta-\alpha)}\mathrm{d}\alpha,$$

称为圆上的 **Poisson 公式.**

公式 45.4.2 半圆上的 Green 函数 设 $G_0(x,y;\xi,\eta)$ 表示全圆上 Dirichlet 问题的 Green 函数,则半圆上的 Green 函数为

$$\widetilde{G}(x,y;\xi,\eta)=G_0(x,y;\xi,\eta)-G_0(x,y;\xi,-\eta). \qquad (45.9)$$

例 45.4.3 球上的 Green 函数,Poisson 公式.

如图 45.2,设 K 为以 O 为心,R 为半径的球面. 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 放置一单位电荷,设想在点 M_1 处有一个点电荷产生的电位在球面上与 M_0 所产生的电位抵消,则

$$r_{M_1P}=\frac{R}{\rho_0}r_{M_0P}, \qquad \rho_0=r_{OM_0},$$

$$g(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1M}}.$$

图 45.2

从而,Green 函数为

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{M_0M}}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_{M_1M}}\right).$$

在球坐标下,有

$$G(M,M_0)$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\gamma}}-\frac{R}{\sqrt{\rho^2\rho_0^2-2R^2\rho\rho_0\cos\gamma+R^4}}\right),$$

其中 $\rho=r_{OM}$,γ 是$\overline{OM_0}$和$\overline{OM}$的夹角. 从而 Laplace 方程 Dirichlet 问题的解为

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_K\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\varphi(S)\mathrm{d}S.$$

在球坐标下为

$$u(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varphi(R,\theta,\varphi)\,\frac{(R^2-\rho_0^2)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}},\tag{45.10}$$

其中$(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$是点$M_0$的坐标，$(R,\theta,\varphi)$是球面$K$上的点$P$的坐标，而

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0).$$

公式(45.10)称为球的 Poisson 公式.

例 45.4.4 上半空间 $z>0,-\infty<x,y<+\infty$ 的 Green 函数，如图 45.3. 利用类似于上面的方法，可求得 Green 函数为

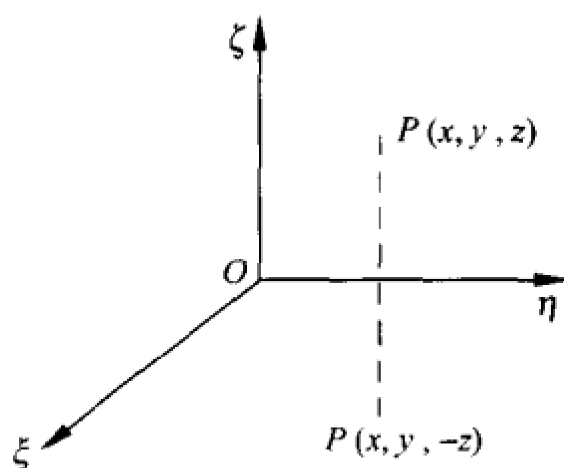


图 45.3

$$\begin{aligned}G(M,P)&=\frac{1}{4\pi r_{PM}}-\frac{1}{4\pi r_{P'M}}\\&=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta+z)^2}}\right].\end{aligned}$$

从而 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & z>0,\\ u|_{z=0}=\varphi(x,y), & -\infty<x,\quad y<+\infty\end{cases}$$

的解为

$$u(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(\xi,\eta)z}{[(\xi-x^2)+(\eta-y)^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

46 偏微分方程近代理论

46.1 解的惟一性

在前面的42章～45章，我们讨论了偏微分方程各种定解问题的解法，这些解都是形式解，利用数学分析的方法，可以证明在一定的可微条件下，形式解即是我们要求的方程的解. 现在我们分别建立这些定解问题的解的惟一性.

例 46.1.1 能量不等式，波动方程解的惟一性和稳定性.

考察膜振动方程的混合问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f, \qquad (x,y)\in\Omega<\mathbb{R}^2, t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x,y), \\ \left(b\dfrac{\partial u}{\partial n}+cu\right)\Bigg|_{\Gamma}=\mu(x,y,t). \end{cases}$$

令膜的总能量为

$$E(t)=\iint\limits_{\Omega}[u_t^2+a^2(u_x^2+u_y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+a^2\int\limits_{\Gamma}\frac{c}{b}u^2\mathrm{d}s.$$

由能量守恒有

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=0.$$

设 u_1,u_2 是定解问题的两个解，令

$$u=u_1-u_2,$$

则 $E(0)=0$. 从而 $E(t)=0$，亦即

$$u_t=u_x=u_y=0 \quad 或 \quad u(x,y,t)=\text{const}.$$

而在初始时刻 $u=0$，从而 $u(x,y,t)\equiv 0$，即：波动方程混合问题的

解如果存在的话，它一定是惟一的.

令

$$E_0(t)=\iint_{\Omega}u^2(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则有能量不等式

$$E_0(t)\leqslant \mathrm{e}^t E_0(0)+E(0)(\mathrm{e}^t-1).$$

从而：波动方程混合问题的解在下述意义下关于初始条件是稳定的：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \eta>0$，只要

$\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2(\Omega)}<\eta$，　$\|\varphi_{1x}-\varphi_{2x}\|_{L^2(\Omega)}<\eta$，

$\|\varphi_{1y}-\varphi_{2y}\|_{L^2(\Omega)}<\eta$，　$\|\psi_1-\psi_2\|_{L^2(\Omega)}<\eta$，　$\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2(\Gamma)}<\eta$，

则有

$$\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}<\varepsilon.$$

对于波动方程 Cauchy 问题也有类似结论.

例 46.1.2　热传导方程定解问题的解的惟一性和稳定性.

考察热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

极值原理　设 $u(x,t)$ 在矩形 $R:\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,0\leqslant t\leqslant T\}$ 上连续，并且在矩形内部满足热传导方程，则

$$\max_R|u(x,t)|=\max_\Gamma|u(x,t)|,$$

其中 $\Gamma=\{x=\alpha\text{ 及 }x=\beta,0\leqslant t\leqslant T\}\cup\{t=0,\alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$.

用极值原理可以证明：

(1) 热传导方程的混合问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}+f,\\ u(x,0)=\varphi(x),\\ u(\alpha,t)=\mu_1(t),\quad u(\beta,t)=\mu_2(t)\end{cases}$$

在区域 $\mathbb{R}$ 内的解是惟一的，并且连续依赖于边界 Γ 上所给的初始条件及边界条件.

(2) 热传导方程 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\\ u(x,0)=\varphi(x), \qquad -\infty<x<\infty\end{cases}$$

在有界函数类中的解是惟一的,并且连续依赖于所给的初始条件.

例 46.1.3 Laplace 方程第二边值问题(Neumann 问题)的惟一性.

强极值原理 设在半径为 R 的某一球上(包括球面在内)给定一个连续函数 $u(x,y,z)$,它在此球内是调和的,并且对此球的所有内点 (x,y,z),有 $u(x,y,z)>u(x_0,y_0,z_0)$ 成立,其中 (x_0,y_0,z_0) 是球面上的某定点.如果函数 $u(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 沿方向 $\boldsymbol{v}$ 的方向导数存在,而方向 $\boldsymbol{v}$ 与球的内法线方向成锐角,则在点 (x_0,y_0,z_0) 有

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}}>0.$$

设区域 Ω 具有这样的性质,即在 Ω 的边界 Γ 上的任一点 M 都可以作一个属于区域 Ω 的球 K_M,此球在点 M 与 Γ 相切.如果不等于常数的调和函数 $u(x,y,z)$ 在 $\Omega+\Gamma$ 上连续,在边界点 M_0 处取最小(最大)值,则只要在点 M_0 的外法向(对 Ω 而言)导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 存在,它在这一点的值必是负(正)的.

用上述强极值原理我们可以得到 Laplace 方程 Neumann 问题的解的惟一性:如果区域 Ω 的边界 Γ 满足强极值原理中的条件,那么同一个 Neumann 内问题的解彼此间只能相差一个常数.

46.2 弱解与泛函方法

设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域,在 G 上考察如下一般形式的二阶椭圆型方程:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad (46.1)$$

其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}(\boldsymbol{x}))$ 是对称矩阵，且存在与 $\boldsymbol{x} \in \bar{G}$ 无关的正常数 α，使得对一切实的 $\xi_i (i=1,2,\cdots,n)$ 有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad (46.2)$$

并且还假设 $a_{ij}(\boldsymbol{x}) \in C^1(\bar{G})$，$b_i(\boldsymbol{x}), c(\boldsymbol{x}) \in C(\bar{G})$，$f \in L^2(G)$.

定义 46.2.1 若 $u \in H_0^1(G)$，对一切 $v \in H_0^1(G)$ 成立

$$\int \cdots \int_G \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int \cdots \int_G v f \, \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

则称 u 为方程(46.1)的 Dirichlet 问题的弱解(weak solution)，其中 $H_0^1(G)$ 是 Sobolev(索伯列夫)空间.

定义 46.2.2 若 $u \in H^2(G) \cap H_0^1(\bar{G})$，且 $Lu = f$ 几乎处处成立，则称 u 为方程(46.1)的强解(strong solution).

定理 46.2.3 Lax-Milgram 定理(Lax-Milgram theorem) 设 $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是定义在实 Hilbert 空间 V 上的实双线性形式，即存在实 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 及 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2$，有

$$\begin{aligned} & a(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2, \beta_1 \boldsymbol{y}_1 + \beta_2 \boldsymbol{y}_2) \\ = & \alpha_1 \beta_1 a(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1) + \alpha_1 \beta_2 a(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2) + \alpha_2 \beta_1 a(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1) \\ & + \alpha_2 \beta_2 a(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2), \end{aligned}$$

且满足条件：

(1) 存在正的常数 K，使得对一切 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ 成立

$$|a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leqslant K \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|;$$

(2) 存在正的常数 C，使得对一切 $\boldsymbol{x} \in V$，成立

$$|a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})| \geqslant C \|\boldsymbol{x}\|^2.$$

则对任意 $f \in V'$，存在惟一的 $\boldsymbol{y} \in V$，使得

$$a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}),$$

且线性有界算子 $S: f \to \boldsymbol{y}$ 存在着有界逆算子 S^{-1}，

$$\| S^{-1} \| \leqslant K, \qquad \| S \| \leqslant \frac{1}{C}.$$

考察二阶自共轭椭圆型方程

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + cu = f. \tag{46.3}$$

应用 Lax-Milgram 定理,定义双线性形式

$$a(u,v) = \int_G \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + cuv \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

可以得到下面的定理.

定理 46.2.4 设 $C(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$,则对任意 $f \in L^2(G)$,方程(46.3)的 Dirichlet 问题存在惟一的弱解 $u \in H_0^1(G)$.

同样应用 Lax-Milgram 定理,可以讨论下列自共轭椭圆型方程的等值面边值问题:

$$\begin{cases} Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + Cu = f, \\ u|_{\Gamma} = \text{const}(\text{待定常数}), \\ \int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\boldsymbol{n}, x_j) \mathrm{d}s = 0. \end{cases} \tag{46.4}$$

定理 46.2.5 设 $C(\boldsymbol{x}) \geqslant C_0 > 0$,则对任意的 $f \in L^2(G)$,等值面边值问题(46.4)存在惟一的弱解

$$u \in V = \{ u \mid u \in H^1(G), \text{tr}\ \gamma_0(u) = \text{常数} \},$$

且成立估计式

$$\| u \|_{H^1(G)} \leqslant K \| f \|_{L^2}.$$

定理 46.2.6 对方程(46.1)的 Dirichlet 问题,存在与区域 G 和系数 a_{ij}, b_i 等相关的适当大的正常数 C_0,得当 $C(x) \geqslant C_0$ 时,对任意 $f \in L^2(G)$,存在惟一的弱解 $u \in H_0^1(G)$,且成立估计式

$$\| u \|_{H^1(G)} \leqslant k \| f \|_{L^2},$$

其中 k 是与 u 无关的正常数.

定理 46.2.7 对方程(46.1)的 Dirichlet 问题,存在着

Fredholm(弗雷德霍姆)两择性结果，即如果齐次方程的 Dirichlet 问题只有零解，则对任意 $f \in L^2(G)$ 非齐次问题有惟一弱解 $u \in H_0^1(G)$；如果齐次问题有非零解，则线性独立的解的个数为有限个(设为 N 个)，非齐次方程问题有解的充要条件是 f 属于某个 N 维子空间的正交补.

定义 46.2.8 高阶椭圆型方程 Dirichlet 问题(Dirichlet problem of elliptic equations of high order). 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界 C^m 正则区域，在 G 上考察如下一般的 2^m 阶椭圆型方程

$$Lu \equiv \sum_{\substack{|p|\leqslant m\\ |q|\leqslant m}} (-1)^{|p|} D^p(a_{p,q}D^q u) = f, \qquad (46.5)$$

其中 p,q 是多重指标，$p=(p_1,\cdots,p_n)$，$q=(q_1,\cdots,q_n)$，

$$|p| = \sum_{i=1}^{n} p_i, \qquad |q| = \sum_{i=1}^{n} q_i,$$

$$D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial {x_1}^{p_1}\cdots\partial {x_n}^{p_n}}, \qquad D^q = \frac{\partial^{|q|}}{\partial {x_1}^{q_1}\cdots\partial {x_n}^{q_n}}.$$

Dirichlet 问题为

$$Lu=f, \qquad u|_p = \frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_p = \cdots = \frac{\partial^{m-1}}{\partial v^{m-1}}\bigg|_\Gamma = 0. \qquad (46.6)$$

假设方程(46.5)是一致椭圆型的，即存在常数 $\alpha>0$，对一切 $\boldsymbol{x}\in\overline{G}$ 和实的向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，成立

$$\sum_{\substack{|p|=m\\ |q|=m}} a_{p,q}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}^p\boldsymbol{\xi}^q \geqslant \alpha \|\boldsymbol{\xi}\|^{2m}.$$

定义双线性形式为

$$a(u,v) = \int_G \sum_{\substack{|p|\leqslant m\\ |q|\leqslant m}} a_{p,q} D^p u D^q v \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

弱解为 $u \in H_0^m(G)$，$f \in L^2(G)$，$\forall\, v \in H_0^m(G)$，成立

$$a(u,v) = (f,v) = \int_G f v \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

定理 46.2.9 Gårding(戈尔丁)不等式(inequality of Gårding)

存在与 $u\in H_0^m(G)$无关的正常数 c_1,c_2,使得

$$a(u,u)\geqslant c_1\|u\|_{H^m}^2-c_2\|u\|_{L^2}^2,$$

$\forall u\in H_0^m(G)$,其中 $\|\cdot\|_{H^m}$ 为 Sobolev 模.

定理 46.2.10 对方程(46.5)的 Dirichlet 问题,存在着 Fredholm 两择性结果.

定理 46.2.11 设 G 是$\mathbb{R}^n$中有界的 C^2 正则区域,一致椭圆型方程(46.1)的系数 $a_{ij}(\boldsymbol{x}),b_i(\boldsymbol{x}),c(\boldsymbol{x})\in C^1(\overline{G})$,$f\in L^2(G)$,则对它的 Dirichlet 问题的任何弱解 $u\in H_0^1(G)$,必有 $u\in H^2(G)$.

定理 46.2.12 设 G 是$\mathbb{R}^n$中有界的 C^{k+2} 正则区域,方程(46.1)的系数 $a_{ij}(\boldsymbol{x}),b_i(\boldsymbol{x}),c(\boldsymbol{x})\in C^{k+1}(\overline{G})$,$f\in H^k(G)$,则 Dirichlet 问题的任何弱解 u 必属于 $H^{k+2}(G)$. 特别当 G 是 C^∞ 正则区域,$a_{ij}(\boldsymbol{x}),b_i(\boldsymbol{x}),c(\boldsymbol{x})\in C^\infty(\overline{G})$, $f(\boldsymbol{x})\in C^\infty(\overline{G})$时,弱解 $u\in C^\infty(\overline{G})$.

定理 46.2.13 设方程(46.1)的系数 $a_{ij}(\boldsymbol{x}),b_i(\boldsymbol{x}),c(\boldsymbol{x})\in C^{k+1}(G)$,$f\in H^k(G)$,则 Dirichlet 问题的任何弱解 u,对任意 $\varphi\in C_0^\infty(G)$,有 $\varphi u\in H^{k+2}(G)$. 或者说 $u\in H_{\mathrm{loc}}^{k+2}(G)$.

推论 46.2.14 当系数和右端属于 $C^\infty(G)$时,弱解 $u\in C^\infty(G)$.

46.3 线性算子半群与发展方程的解

定义 46.3.1 如果 X 是 B 空间(Banach 空间),$T_t(t\geqslant 0)$是 $L(X,X)$中的有界线性算子的单参数族,满足条件:

$$T_tT_s\doteq T_{t+s},\qquad t,s\geqslant 0;$$

$$T_0=I,\qquad \text{恒等算子};$$

$s-\lim\limits_{t\to t_0}T_t x=T_{t_0}x$ 强连续,对每一 $t_0\geqslant 0$ 和每一 $x\in X$ 成立,则称 $\{T_t\}$为 C_0 半群(C_0 - semigroup).

我们指出,C_0 半群满足条件

$$\| T_t \| \leqslant Me^{\beta t}, \qquad 0\leqslant t<\infty,$$

其中 $M>0$, $\beta<\infty$均为常数. 若对于 C_0 半群成立

$$\| T_t \| \leqslant 1, \qquad 0\leqslant t<\infty,$$

则称半群$\{T_t\}$为 **C_0收缩半群**(C_0 contraction semigroup)或**压缩半群**.

定义 46.3.2 设 X 是局部凸线性拓扑空间,而$\{T_t, t\geqslant 0\}$是 $L(X,X)$中的连续线性算子的单参数族,且有

$$T_t T_s = T_{t+s}, \qquad T_0 = I,$$

$$\lim_{t\to t_0} T_t x = T_{t_0} x, \qquad \forall\, t_0 \geqslant 0, \forall\, x \in X,$$

映射族$\{T_t\}$关于 t 等度连续,即对于 X 的任何连续半范数 p,都存在 X 的连续半范数 q,使得

$$p(T_t x)\leqslant q(x), \qquad \forall\, t\geqslant 0, \forall\, x\in X$$

成立,则称算子族$\{T_t\}$为等度连续 C_0 半群(equicontinuous C_0 semigroup).

定义 46.3.3 设$\{T_t, t\geqslant 0\}$是定义在局部凸线性拓扑空间 X 的 C_0 等度连续半群,设 X 是序列完备的,令

$$Ax=\lim_{h\to 0^+} \frac{(T_h - I)x}{h}$$

来定义 T_t 的**无穷小生成元**(infinitesimal generator)A,即 A 是线性算子,其定义域

$$D(A)=\left\{x\in X;\ \lim_{h\to 0^+} \frac{(T_h - I)x}{h}\text{存在(在 } X \text{ 中)}\right\}.$$

定理 46.3.4 $D(A)$在 Z 中稠密.

定义 46.3.5 对 $x\in X$,定义

$$D_t T_t x = \lim_{h\to 0^+} \frac{(T_{t+h} - T_t)x}{h},$$

若右边极限存在.

定理 46.3.6 若 $x\in D(A)$，则 $x\in D(D_tT_t)$，且

$$D_tT_t x = AT_t x = T_t Ax, \qquad t\geqslant 0,$$

即算子 A 同 T_t 是可交换的.

定理 46.3.7 如果 $n>0$，则算子 $nI-A$ 具有逆 $R(n;A)=(nI-A)^{-1}\in L(X,X)$，并且成立

$$R(n;A)x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ns}T_s x\mathrm{d}s, \qquad x\in X.$$

换言之，正实数属于 A 的预解集 $\rho(A)$.

定理 46.3.8 设 X 是局部凸序列完备的线性拓扑空间. 假设 A 是其定义域 $D(A)$ 在 X 中稠密而值域 $R(A)$ 在 X 中的线性算子，并且预解式 $R(n;A)=(nI-A)^{-1}\in L(X,X)$ 对 $n=1,2,\cdots$ 存在，则 A 是惟一确定的等度连续 C_0 半群的无穷小生成元当且仅当算子$\{(I-n^{-1}A)^{-m}\}$对 $n=1,2,\cdots$ 和 $m=0,1,\cdots$ 等度连续.

推论 46.3.9 Hille-Yoshida 定理　如果 X 是 Banach 空间，则定理的条件写为：$\overline{D(A)}=X$，预解式$(I-n^{-1}A)^{-1}$存在且满足

$$\|(I-n^{-1}A)^{-m}\|\leqslant C, \qquad n=1,2,\cdots,m=1,2,\cdots,$$

其中常数 C 与 n,m 无关. 特别对于收缩半群的情况，条件改为：$\overline{D(A)}=X$，$(I-n^{-1}A)^{-1}$存在且满足：

$$\|(I-n^{-1}A)^{-1}\|\leqslant 1, \qquad n=1,2,\cdots.$$

定理 46.3.10 Showalter 定理　线性算子 $-A:D(A)\to H$ 是 Hilbert 空间 H 上的收缩算子半群的生成元，当且仅当 $D(A)$ 在 H 中稠，A 是**增殖的**(accretive)，即 $\mathrm{Re}(Ax,x)_H\geqslant 0, x\in D(A)$ 及 $\lambda I+A$ 对某 λ 是满射.

定理 46.3.11 设 H 为 Hilbert 空间，$D(A)$在 H 中稠，$-A$ 是收缩算子半群的生成元，则对任意 $u_0\in D(A)$，$f(t)\in C^1([0,\infty),H)$，Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+Au(t)=f(t),\\ u(0)=u_0\end{cases}$$

存在着惟一的解.

例 46.3.12 考察抛物型方程混合问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial u}{\partial x_i}+c(\boldsymbol{x})u=F(\boldsymbol{x},t),\\ u\big|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0,\\ u\big|_{t=0}=u_0(\boldsymbol{x}),\end{cases}\tag{46.7}$$

其中,$\boldsymbol{x}\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$,并设系数矩阵$(a_{ij}(\boldsymbol{x}))$是一致椭圆型的,且设 $a_{ij}(\boldsymbol{x})\in C^1(\bar{\Omega})$, $b_i,c\in C(\bar{\Omega})$. 取 $H=L^2(\Omega)$,

$$D(A)=\{u\,|\,u\in H_0^1(\Omega),Au\in L^2(n)\},$$

并且

$$\begin{aligned}(Au,v)_{L^2}&=\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+cuv\right)\mathrm{d}x\\&=a(u,v).\end{aligned}$$

易知 $D(A)$在 H 中稠,A 增殖,以及$\lambda I+A$ 是满射(对某个 λ),从而按照定理 46.3.8 知$-A$ 是 H 上某收缩算子半群的生成元,再用定理 46.3.11 知存在惟一的

$$u(\boldsymbol{x},t)\in C^1([0,\infty),H)$$

满足方程(46.7).

46.4 不动点定理

定义 46.4.1 设 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^n$,$f(\boldsymbol{x})$是定义在包含 $\boldsymbol{x}_0$ 的有界集 D 上的函数,如果

$$[f]_{\alpha;x_0}=\sup_D\frac{|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^\alpha}$$

有限,其中 $0<\alpha<1$,则称 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点具有指数 α 的 **Hölder 连续性**(Hölder continuity),$[f]_{\alpha;x_0}$称为 Hölder 系数. 若 $\alpha=1$,则称 f 为

Lipschitz 连续. 如果

$$[f]_{\alpha;D}=\sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}}\frac{|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^{\alpha}},\qquad 0<\alpha\leqslant 1$$

有限,则称 f 在 D 内具有指数 α 的 Hölder 连续性.

定义 46.4.2 Hölder 空间 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$($C^{k,\alpha}(\Omega)$)定义为 $C^k(\bar{\Omega})$($C^k(\Omega)$)的子空间,其中的函数的 k 阶导数在 Ω 内具有 α 阶的 Hölder 连续性.

公式 46.4.3 Hölder 空间的模

$$\begin{aligned}&[u]_{k,0;\Omega}=|D^k u|_{0;\Omega}=\sup_{\Omega}\sup_{|\beta|=k}|D^{\beta}u|,\qquad k=0,1,2,\cdots;\\&[u]_{k,\alpha;\Omega}=[D^k u]_{\alpha;\Omega}=\sup_{|\beta|=k}[D^{\beta}u]_{\alpha;\Omega};\qquad (46.8)\\&\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})}=|u|_{k;\Omega}=|u|_{k,0;\Omega}=\sum_{j=0}^{k}[u]_{j,0;\Omega};\\&\|u\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}=|u|_{k,\alpha;\Omega}=|u|_{k;\Omega}+[u]_{k,\alpha;\Omega}.\end{aligned}$$

定理 46.4.4 Schauder(绍德尔)不动点定理(Schauder fixed point theorem) 设 S 是 Banach 空间 B 中的紧凸集,$T:S\to S$ 为连续映射. 则 T 有一不动点,即存在 $x\in S$ 使 $Tx=x$.

推论 46.4.5 设 S 为 Banach 空间 B 中的闭凸集,T 是 S 到自身的连续映射,若 TS 是预紧的(precompact),则 T 具有一个不动点.

定理 46.4.6 Leray-Schauder 定理(Leray-Schauder theorem) 设 T 是 Banach 空间 B 到自身的紧映射,并且存在常数 $M>0$成立

$$\|x\|_B<M,$$

其中 $x\in B$ 且满足 $x=\sigma Tx$, $\sigma\in[0,1]$. 则 T 具有一不动点.

我们考察椭圆型方程

$$Qu=\sum_{ij=1}^{n}a^{ij}(\boldsymbol{x},u,Du)D_{ij}u+b(\boldsymbol{x},u,Du),\qquad (46.9)$$

其中系数矩阵($a^{ij}(\boldsymbol{x},z,\boldsymbol{p})$)对$(x,z,\boldsymbol{p})\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$正定. 并且

$a^{ij}, b \in C^{\alpha}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

任给 $v \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$,定义算子

$$u = Tv$$

为下述线性 Dirichlet 问题的 $C^{2,\alpha\beta}(\bar{\Omega})$的解

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\boldsymbol{x}, v, Dv) D_{ij} u + b(\boldsymbol{x}, v, Dv) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{\partial n} = \varphi. \end{cases} \tag{46.10}$$

方程 $u = \sigma T u$ 等价于

$$\begin{cases} Q_{\sigma} u = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\boldsymbol{x}, u, Du) D_{ij} u + \sigma b(\boldsymbol{x}, u, Du) = 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u\Big|_{\partial n} = \sigma \varphi. \end{cases} \tag{46.11}$$

定理 46.4.7 设 Ω 是$\mathbb{R}^n$ 中的有界区域,并设 Q 在$\bar{\Omega}$ 中是椭圆算子,$a^{ij}, b \in C^{\alpha}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ $(0 < \alpha < 1)$. 设$\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 如果对某个 $\beta > 0$ 存在常数 M(与 u 及 σ 无关)使得问题(46.11)的每个 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$解满足

$$\| u \|_{C^{1,\beta}(\bar{\Omega})} < M.$$

那么问题(46.10)在 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$中有解.

定理 46.4.8 Leray-Schauder 不动点定理(Leray-Schauder fixed point theorem) 设 B 为 Banach 空间,T 是 $B \times [0,1]$到 B 的紧映射,满足 $T(x,0) = 0$, $\forall x \in B$. 假设存在常数 $M > 0$,成立

$$\| x \|_B < M,$$

其中$(x,\sigma) \in B \times [0,1]$,满足 $x = T(x,\sigma)$. 则映射 $T_1 x = T(x,1)$具有一不动点.

46.5 拟微分算子

定义 46.5.1 设 $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,则由 Fourier 变换知

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_\xi^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \tilde{f}(\xi) đ\xi,$$

其中 $\tilde{f}(\xi)$表示 $f(x)$的 Fourier 变换，$x\in\mathbb{R}^n$，$\langle x,\xi\rangle = x\cdot\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n$，$đ\xi=(2\pi)^{-n}d\xi$. 若以具有 $C^\infty(\Omega)$函数为系数的偏微分算子 $P(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)D^\alpha$ 作用于 $f(x)$ 上，得

$$P(x,D)f(x) = \int_{\mathbb{R}_\xi^n} p(x,\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \tilde{f}(\xi) đ\xi.$$

这里 $p(x,\xi)$是将 $p(x,D)$中微分算子 D 换成变量 ξ 后得到的函数，它是 x 的C^∞复值函数，是 ξ 的多项式，称为**偏微分算子的象征**(symbol of partial differential operators). 其中 $D=\{D_{x_j}\}=\left\{\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right\}(i=\sqrt{-1})$.

定义 46.5.2 设 Ω 是$\mathbb{R}^n$ 中的开集，m 为实数，设函数 $p(x,\xi)\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$，且对任意的重指标 α,β 以及紧集 $K\subset\Omega$，成立

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}(1+\|\xi\|)^{m-|\alpha|}, \qquad \forall x\in K,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

则称 $p(x,\xi)$属于函数类 $S^m(\Omega)$，即 $S^m(\Omega)$是具有上述性质的函数全体所组成的集.

定义 46.5.3 对 $p(x,\xi)\in S^m(\Omega)$，可以作一个算子 $P(x,D)$：

$$C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega),$$

$$P(x,D)u = \int_{\mathbb{R}_\xi^n} p(x,\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} \tilde{u}(\xi) đ\xi,$$

其中 $\tilde{u}$ 是 $u(x)\in C_0^\infty(\Omega)$的 Fourier 变换，称算子 $P(x,D)$为**拟微分算子**(pseudo differential operator)(或称 $PS(m)$类伪微分算子)，并称 $p(x,\xi)$为 $P(x,D)$的象征.

定理 46.5.4 由定义 46.5.3 给出的拟微分算子 $P(x,D)$是 $C_0^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$的线性连续映射，而且它可以扩张为 $\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$的线性连续映射.

定义 46.5.5 函数类 $S_{\rho,\delta}^m(0\leqslant\rho,\delta\leqslant1)$由以下性质的函数

$p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$全体组成：$p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\in C^{\infty}(\Omega\times\mathbb{R}^{n})$，且对任意的紧集 $K\subset\Omega$ 以及任意的重指标 α,β，成立

$$|D_x^{\beta}D_{\xi}^{\alpha}p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}(1+\|\boldsymbol{\xi}\|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

其中 $\boldsymbol{x}\in K,\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{n}$. 由 $S_{\rho,\delta}^{m}$ 按 $P(\boldsymbol{x},D)$ 的式子产生的算子也称为拟微分算子.

定义 46.5.6 函数 $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ 满足条件

(1) $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})\in C^{\infty}(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^{n})$；

(2) 对于任一重指标 α,β 以及 $\Omega\times\Omega$ 中紧集 K，成立

$$|D_{x,y}^{\beta}D_{\xi}^{\alpha}a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})|\leqslant C_{k,\alpha,\beta}(1+\|\boldsymbol{\xi}\|)^{m-|\alpha|},$$

其中$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K$，$m$ 为任一实数，称这样的函数 $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ 为**振幅**(amplitude).

定义 46.5.7 对于给定的振幅 $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$ 可以定义 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 上的算子 A 为

$$Au=\int_{\mathbb{R}_{\xi}^{n}}\int_{\Omega_y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}\rangle}a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{đ}\boldsymbol{\xi},$$

这里的积分仍按累次积分理解，也称 A 为拟微分算子.

定义 46.5.8 算子 A 的转置 ${}^{t}A$ 由下式给出：

$$\langle Au,v\rangle=\langle u,{}^{t}Av\rangle,\qquad\forall\, u,v\in C_0^{\infty}(\Omega).$$

表达式为

$${}^{t}Av(\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}_{\xi}^{n}}\int_{\Omega_y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}\rangle}a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\xi})v(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{đ}\boldsymbol{\xi}.$$

定理 46.5.9 由定义 46.5.7 给出的算子 A 与由定义 46.5.8 定义的算子 ${}^{t}A$ 都是 $C_0^{\infty}(\Omega)\to C^{\infty}(\Omega)$ 的线性连续映射，且可以扩张为 $\epsilon'(n)\to\mathscr{D}'(n)$ 的线性连续映射.

定义 46.5.10 利用 $a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})$，可以定义 $\Omega_x\times\Omega_y$ 上的广义函数 $K_{xy}\in\mathscr{D}'(\Omega_x\times\Omega_y)$ 为

$$\langle K_{xy},w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle=\int_{\mathbb{R}_{\xi}^{\Omega}}\int_{\Omega_x}\int_{\Omega_y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi}\rangle}a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{đ}\boldsymbol{\xi},$$

其中 $w(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in C_0^{\infty}(\Omega_x\times\Omega_y)$，称 K_{xy} 为**算子 A 的分布核**

(distribution kernel of operator A). 并且有

$$Au=\langle K_{xy},u(\boldsymbol{y})\rangle.$$

定理 46.5.11 上述算子 A 的核 K_{xy} 在 $\Omega\times\Omega$ 的对角线外为 C^{∞} 函数.

例 46.5.12 偏微分算子

$$P(\boldsymbol{x},D)=\int_{\mathbb{R}_{\xi}^{n}}\int_{\Omega_{y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x-y,\xi\rangle}p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}\text{đ}\boldsymbol{\xi},$$

振幅为 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$,核为 $P(\boldsymbol{x},D)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$. 当 $P(\boldsymbol{x},D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}a_{\alpha}(\boldsymbol{x})D^{\alpha}$ 时,它的核为

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_{\alpha}(\boldsymbol{x})\delta^{(\alpha)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

当 $P(\boldsymbol{x},D)=I$ 恒等算子时,$a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})=1$,核为 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$,这个核在对角线外恒为零,自然是 C^{∞} 函数.

定义 46.5.13 使广义函数 T 为 C^{∞} 函数的最大开集的余集称为 T 的**奇支集**(singular support),记为 sing supp T.

由奇支集与支集的定义可见,对任何广义函数 T,

$$\text{sing supp}T\subset\text{supp}T.$$

定理 46.5.14 若拟微分算子 A 由定义 46.5.7 给出,则

$$\text{sing supp }Au\subset\text{sing supp }u,\qquad\forall u\in\mathscr{E}'(\Omega),$$

称这时的算子 A 为拟局部算子.

定义 46.5.15 如果 Σ 为 $\Omega_{x}\times\Omega_{y}$ 中的子集,满足:对任一紧集 $K\subset\Omega$,$\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Sigma,\boldsymbol{x}\in K\}$ 和 $\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\Sigma,\boldsymbol{y}\in K\}$ 都是 $\Omega_{x}\times\Omega_{y}$ 的紧集,则称 Σ 为**恰当子集**(proper subset).

定义 46.5.16 如果广义函数 $K\in\mathscr{D}'(\Omega_{x}\times\Omega_{y})$,其支集 supp K 为 $\Omega_{x}\times\Omega_{y}$ 的恰当子集,则称 K 为**恰当支广义函数**.

如果一个拟微分算子 A 的核 K_{A} 为恰当支广义函数,则称 A 为**恰当支拟微分算子**(properly supported pseudodifferential operator).

定理 46.5.17 若算子 A 是由定义 46.5.7 定义的拟微分算子，且为恰当支的，则它是 $C_0^\infty(\Omega)\to C_0^\infty(\Omega)$ 的线性连续映射，且可以扩张为 $C^\infty(\Omega)\to C^\infty(\Omega)$ 的线性连续映射.

定义 46.5.18 设 $p_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\in S^{m_j}(\Omega)$，$m_j$ 单调下降趋于 $-\infty$，记为 $m_j\downarrow-\infty$，又有函数 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$，对任意的 k，成立

$$p-\sum_{j<k}p_j\in S^{m_k},$$

则称 p 有**渐近展开**(asymptotic expansion) $\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_j$，并记作

$$p\sim\sum_{j=1}^{\infty}p_j.$$

定理 46.5.19 设 $p_j\in S^{m_j}$，$m_j\downarrow-\infty$，则必存在 $p\in S^{m_0}$，使它以 $\sum p_j$ 为其渐近展开.

定理 46.5.20 若 $p_j\in S^{m_j}$，$m_j\downarrow-\infty$，又设 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 为 $C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ 函数，而且对任意的 α,β,K，存在常数 μ,C(依赖于 α,β,K)使

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})|\leqslant C(1+\|\boldsymbol{\xi}\|)^\mu,\quad \boldsymbol{x}\in K,\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n,$$

此外还设对任意的紧集 K，存在常数列 $\mu_K\downarrow-\infty$，与常数 C_K，使

$$\left|p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})-\sum_{j<k}p_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\right|\leqslant C_k(1+\|\boldsymbol{\xi}\|)^{\mu_k},\quad \boldsymbol{x}\in k,\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n,$$

则有

$$p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\in S^{m_0},\quad 且\quad p\sim\sum p_j.$$

定理 46.5.21 设 A 是由 46.5.7 定义的恰当支拟微分算子，则 A 可以用定义 46.5.3 中的式子表出，其中 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 有渐近展开

$$p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\sim\sum_{|\alpha|\geqslant0}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\xi})\Big|_{y=x}.$$

定理 46.5.22 若 A 为恰当支的拟微分算子，象征为 $\sigma_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$，则 ${}^tA$ 也是恰当支的拟微分算子，其象征有渐近展开

$$\sigma_{{}^tA}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\sim\sum_\alpha\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\sigma_A^T(\boldsymbol{x},-\boldsymbol{\xi})/\alpha!.$$

定理 46.5.23 若 A,B 都是恰当支拟微分算子,其象征分别为 $\sigma_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}),\sigma_B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$,则它们的复合 $B\circ A$ 也是恰当支拟微分算子,且其象征 $\sigma_{BA}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 有渐近展开

$$\sigma_{BA}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \sim \sum_{\alpha}\partial_{\xi}^{\alpha}\sigma_B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\cdot D_x^{\alpha}\sigma_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})/\alpha!.$$

定理 46.5.24 设 $A\in PS(m)$是恰当支拟微分算子,则对于任意给定的紧集 K,成立

$$\| Au \|_s \leqslant C_k \| u \|_{s+m}, \qquad \forall u\in C_0^{\infty}(K),$$

其中

$$\| u \|_s^2 = \int_{\mathbf{R}_{\xi}^n}(1+\|\boldsymbol{\xi}\|^2)^s\,|\tilde{u}(\boldsymbol{\xi})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$

为 H^s 模.

定义 46.5.25 若 $A\in PS(m)$,存在一个与 A 相差一个光滑算子的 A_1,其象征 $\sigma_{A_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$对于任一紧集 $K\subset\Omega$,有常数 C_k,R,使

$$|\sigma_{A_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})|\geqslant C_k(1+\|\boldsymbol{\xi}\|)^m, \qquad \boldsymbol{x}\in K,\ \|\boldsymbol{\xi}\|\geqslant R$$

成立,则称 A 为**椭圆型拟微分算子**(elliptic pseudodifferential operator).

当 A 为微分算子时,上述定义与椭圆型微分算子的定义等价.

定义 46.5.26 若 $Q\in PS(m)$是恰当支拟微分算子,又存在恰当支拟微分算子 P,使得

$$PQ-I=K_1\in PS(-\infty);$$
$$QP-I=K_2\in PS(-\infty).$$

则称 P 为 Q 的**拟逆**(parametrix). 其中 $PS(-\infty)$是由 $S^{-\infty}=\bigcup S^m$ 产生的拟微分算子类.

定理 46.5.27 若 $Q\in PS(m)$为恰当支的椭圆型拟微分算子,则存在一个恰当支的椭圆型拟微分算子 $P\in PS(-m)$,它是 Q 的拟逆.

定理 46.5.28 椭圆算子的内正则性 若 P 为椭圆型拟微分算子，$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$，$Pu=f$，则若有 $\omega\subset\Omega$，在 ω 上 f 为 C^{∞} 函数，则 u 在 ω 上也是 C^{∞} 函数.

定理 46.5.29 Gårding 不等式 设 $A\in PS(m)$ 是一个恰当支的自共轭拟微分算子，当 $\|\boldsymbol{\xi}\|$ 很大时，$\mathrm{Re}\,\sigma_A(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\xi})>C\|\boldsymbol{\xi}\|^m$ $(C>0)$，则对任意紧集 K 以及 $u\in C_0^{\infty}(K)$，成立

$$(Au,u)\geqslant C_1\|u\|_{\frac{m}{2}}^2-C_2\|u\|_s^2,$$

其中 s 是小于$\dfrac{m}{2}$的任意实数. 自共轭是指 $A=A^*$，A^* 满足

$$(Au,v)=(u,A^*v),\qquad \forall\, u,v\in C_0^{\infty}(\Omega),$$

其象征有渐近展开

$$\sigma_{A^*}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\sim\sum_{\alpha}\partial_{\xi}^{\alpha}D_x^{\alpha}\,\overline{\sigma_A^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}/\alpha!.$$

46.6 Lewy 反例

考虑线性方程

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_{\alpha}(\boldsymbol{x})D^{\alpha}u=f(\boldsymbol{x}),\qquad(46.12)$$

对于 $\boldsymbol{x}^0\in\mathbb{R}^n$，如果 $a_{\alpha}(\boldsymbol{x})$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 都在 $\boldsymbol{x}^0$ 附近解析，且对某一个 α，$|\alpha|=k$，有 $a_{\alpha}(\boldsymbol{x}^0)\neq0$，由 Cauchy-Kovalevskaya 定理 42.3.8 可知方程(46.12)有无穷多个解，因为不同的解析初值可以得到不同的解析解. 如果 f 与 a_{α} 不是解析的，但属于 C^{∞}，问在 $\boldsymbol{x}^0$ 点的邻域内是否有解存在呢? 长期以来人们认为这样的解应该是很多的，直到 1957 年，Lewy 举出了一个简单的反例，否定了这一猜测.

在$\mathbb{R}^3$(记为(x,y,t)变量)中考虑方程

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)\frac{\partial u}{\partial t}=f,\qquad(46.13)$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，有下面的结论.

定理 46.6.1 Lewy 反例　设 f 是仅依赖于 t 的实值连续函数，则方程(46.13)在原点的某邻域内存在 C^1 的解 $u(x,y,t)$ 的必要条件是 $f(t)$ 在 $t=0$ 是解析的.

积 分 方 程

47 积分方程的一般概念

47.1 基本概念与方程的分类

定义 47.1.1 未知函数出现在积分号下的方程称为积分方程(integral equation).

例 47.1.2 下面的方程均为积分方程

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,$$

$$f(s)=x(s)-\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,$$

$$x(s)=\int_a^b K(s,t)f(t,x(t))\mathrm{d}t,$$

$$x(s)=\int_a^b K(s,t,x(t))\mathrm{d}t,$$

$$x(s)=1+sx(s)\int_0^1 \frac{\Psi(t)x(t)}{s+t}\mathrm{d}t.$$

方程 47.1.3 下列方程为较一般形式的积分方程：

$$\alpha(x)\varphi(x)-\lambda\int_a^b F[x,\xi,\varphi(\xi)]\mathrm{d}\xi=f(x), \tag{47.1}$$

其中，$\varphi(x)$ 是未知函数；$\alpha(x)$，$f(x)$，$F(x,\xi,u)$ 是已知函数；λ,a,b

是常数，$x \in [a,b]$.

在(47.1)中，$f(x)$称为积分方程的自由项(free term)；λ 称为积分方程的参数(parameter).

定义 47.1.4 若未知函数在积分方程中以线性形式出现，则这种方程称为**线性积分方程**(linear integral equation)；否则，称为**非线性积分方程**(nonlinear integral equation).

例如，在(47.1)中，若 F 关于其变元 u 为线性时，则有如下的线性积分方程：

$$\alpha(x)\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{47.2}$$

定义 47.1.5 在(47.2)中，已知函数 $K(x,\xi)$称为积分方程的核(kernel). 若核 $K(x,\xi)$在 $a \leqslant x, \xi \leqslant b$ 上是连续的，则称之为**连续核**(continuous kernel)；若 $K(x,\xi)$是平方可积的，即

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,\xi)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}\xi < \infty ,$$

则称 $K(x,\xi)$ 是**平方可积核**(square integrable kernel)，简称 L_2 核.

定义 47.1.6 若积分方程的自由项恒为零，则该方程称为齐次积分方程(homogeneous integral equation)；否则，称为非齐次积分方程(nonhomogeneous integral equation).

公式 47.1.7 若线性方程(47.2)的核 $K(x,\xi)$为连续核或平方可积核，则有如下的 Fredholm **积分方程**(Fredholm integral equations)：

(1) 第一类 Fredholm 积分方程

$$\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x). \tag{47.3}$$

(2) 第二类 Fredholm 积分方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x) . \tag{47.4}$$

(3) 第三类 Fredholm 积分方程

$$\alpha(x)\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x). \tag{47.5}$$

显然,第一类及第二类 Fredholm 积分方程是第三类 Fredholm 积分方程当 $\alpha(x)$ 分别为 0 和 1 时的特殊情形. 当在区间 $[a,b]$ 上 $\alpha(x)>0$ 时,第三类 Fredholm 方程可化为第二类 Fredholm 方程. 本篇着重介绍第二类 Fredholm 方程. 至于第一类 Fredholm 积分方程,目前还未建立起系统的理论.

对于非齐次 Fredholm 积分方程,一般要求自由项 $f(x)$ 连续或至少平方可积.

公式 47.1.8 如果 Fredholm 积分方程的核 $K(x,\xi)$ 具有这样的性质:当 $x<\xi$ 时,$K(x,\xi)\equiv 0$,则有如下的 Volterra(沃尔泰拉)积分方程(Volterra integral equations):

(1) 第一类 Volterra 积分方程

$$\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x). \tag{47.6}$$

(2) 第二类 Volterra 积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x). \tag{47.7}$$

(3) 第三类 Volterra 积分方程

$$\alpha(x)\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x). \tag{47.8}$$

公式 47.1.9 对于方程(47.2),当核 $K(x,\xi)$ 满足一些特殊条件时,还可以得到一些特殊的方程:

(1) 若核具有如下形式:

$$K(x,\xi)=\frac{H(x,\xi)}{|x-\xi|^{\alpha}},\qquad 0<\alpha<1,$$

其中 $H(x,\xi)$ 是有界函数,则称方程(47.2)及其齐次方程为**弱奇性的线性积分方程**(linear integral equation with weakly singular

kernel).

(2) 若核 $K(x,\xi)$具有下述形式

$$K(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,\overline{b_j(\xi)},$$

其中 $a_j(x), b_j(\xi)(j=1,\cdots,n)$在$[a,b]$上平方可积,称方程(47.2)及其齐次方程为**退化核的积分方程**(integral equation with degenerate kernel).

(3) 若核 $K(x,\xi)$为如下形式:

$$K(x,\xi)=\frac{A(x,\xi)}{x-\xi},$$

其中 $A(x,\xi)$对 x,ξ 的偏导数存在,此时若积分

$$\int_a^b \frac{A(x,\xi)}{x-\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的主值

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_a^{x-\varepsilon} \frac{A(x,\xi)}{x-\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{x+\varepsilon}^b \frac{A(x,\xi)}{x-\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}$$

存在,则称方程(47.2)为**奇异积分方程**(singular integral equation).

(4) 若方程(47.2)中的核 $K(x,\xi)$及区间为下面的形式:

$$f(x)=\int_0^{\infty} K(x-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$$f(x)=\varphi(x)-\int_0^{\infty} K(x-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

分别称为第一类和第二类 **Wiener-Hopf 方程**(或卷积方程).

(5) 方程

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,\xi)f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi,$$

称为 **Hammerstein 方程**.

(6) 方程

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi,$$

称为 **Uryson 方程.**

(7) 方程

$$\varphi(x) = 1 + x\,\varphi(x)\int_0^1 \frac{\Psi(\xi)\varphi(\xi)}{x+\xi}\mathrm{d}\xi,$$

称为 **Chandrasekar – H 方程.**

47.2 积分方程与微分方程的关系

47.2.1 微分方程初值问题与积分方程的关系

考虑如下的二阶常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \varphi''(x)+A(x)\varphi'(x)+B(x)\varphi(x)=F(x), & (47.9) \\ \varphi(a)=\varphi_0, \qquad \varphi'(a)=\varphi_1, & (47.9\text{a}) \end{cases}$$

其中 $A(x)$,$B(x)$,$F(x)$是$[a,b]$上的连续函数,$A(x)$在$[a,b]$上有连续导数.

对(47.9)式从 a 到 x 积分并利用式(47.9a)有:

$$\varphi'(x)-\varphi_1 = -A(x)\varphi(x)-\int_a^x[B(\xi)-A'(\xi)]\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_a^x F(\xi)\mathrm{d}\xi + A(a)\varphi_0.$$

再积分一次,得

$$\varphi(x) = f(x)+\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{47.10}$$

其中

$$K(x,\xi) = (\xi-x)[B(\xi)-A'(\xi)]-A(\xi), \tag{47.11}$$

$$f(x) = \int_a^x(x-\xi)F(\xi)\mathrm{d}\xi+[A(a)\varphi_0+\varphi_1](x-a)+\varphi_0. \tag{47.11a}$$

反之,从(47.10)式微分两次,即可得到(47.9)式和(47.9a)式.因此,初值问题(47.9)、(47.9a)与第二类 Volterra 积分方程

(47.10)等价.

47.2.2 微分方程边值问题与积分方程的关系

考虑如下的二阶常微分方程的两点边值问题：

$$\begin{cases}\varphi''(x)+A(x)\varphi'(x)+B(x)\varphi(x)=F(x), & (47.12)\\ \varphi(a)=0, \qquad \varphi(b)=0. & (47.12a)\end{cases}$$

在一定条件下，边值问题(47.12)、(47.12a)可等价于一个第二类 Fredholm 积分方程.

例如，微分方程的边值问题：

$$\begin{cases}\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0, & (47.13)\\ \varphi(0)=\varphi(1)=0. & (47.13a)\end{cases}$$

和如下的第二类 Fredholm 积分方程等价：

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{47.14}$$

其中

$$K(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x), & \xi<x,\\ x(1-\xi), & \xi>x.\end{cases} \tag{47.15}$$

47.3 积分微分方程

定义 47.3.1 若包含未知函数的导数的方程中，未知函数还出现在积分号下，称这类方程为**积分微分方程**(integral differential equation).

例 47.3.2 一圆盘在地下水爆裂的初期，它的畸变率 u 满足积分微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\alpha u+\beta\int_0^s\left(1-\frac{t^2}{t_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}u(s-t)\mathrm{d}t=\nu\exp\left(-\frac{s}{t_2}\right).$$

例 47.3.3 考虑微分方程初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2 y}{ds^2}+\omega^2 y=f\cos\Omega s, & t\geqslant 0,\\
y\Big|_{t=0}=\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0.
\end{cases}
$$

积分一次，化为

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{ds}+\omega^2\int_0^s y(t)dt=\dfrac{f}{n}\sin\Omega s,\\
y\big|_{t=0}=0.
\end{cases}
$$

也是一个积分微分方程.

47.4 连续核与 L_2 核

定义 47.4.1 设 $K(x,\xi)$，$H(x,\xi)$分别是连续核，则称

$$L(x,\xi)=\int_a^b H(x,u)K(u,\xi)du$$

为核 H 与核 K 的**合成核**(composed kernel).

定义 47.4.2 设 $K(x,\xi)$为连续核，令

$$
\begin{aligned}
K^1(x,\xi)&=K(x,\xi),\\
K^i(x,\xi)&=\int_a^b K^{i-1}(x,u)K(u,\xi)du.
\end{aligned}
$$

称 $K^i(x,\xi)$为迭核，即 $K(x,\xi)$与自身的合成核称为**迭核**(iterated kernel).

定义 47.4.3 对给定的λ，满足下式的 L_2 核 $H_\lambda(x,\xi)$称为核 $K(x,\xi)$对于值λ的**预解核**(resolvent kernel)：

$$
\begin{aligned}
H_\lambda(x,\xi)-K(x,\xi)&=\lambda\int_a^b K(x,u)H_\lambda(u,\xi)du\\
&=\lambda\int_a^b H_\lambda(x,u)K(u,\xi)du.
\end{aligned}
$$

而值λ称为核 $K(x,\xi)$的正则值.

定理 47.4.4 设 $K(x,\xi)$ 为 L_2 核，$f(x)\in L_2$ 而且 $|\lambda|\cdot\|k\|<1$，则积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

有惟一 L_2 解，

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}f_i(x),\tag{47.16}$$

其中

$$f_i(x)=\int_a^b K^n(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad n\geqslant 1,$$

且级数(47.16)按平均收敛意义下收敛. 特别地，齐次方程有惟一 L_2 解 $\varphi(x)=0$.

定义 47.4.5 级数(47.16)称为 **Neumann 级数**(Neumann series).

定义 47.4.6 设 $K(x,\xi)$ 是一 L_2 核，则 $K^*(x,\xi)=\overline{K(\xi,x)}$ 也是一个 L_2 核，称为 $K(x,\xi)$ 的**共轭核**(conjugate kernel).

定义 47.4.7 如果一 L_2 核满足

$$K(x,\xi)=K^*(x,\xi)=\overline{K(\xi,x)},$$

则称之为 **Hermite 核**(Hermite kernel).

定义 47.4.8 一个实的 Hermite 核称为**对称核**(symmetric kernel).

公式 47.4.9

$$(K^*)^*(x,\xi)=K(x,\xi),\qquad \|K^*\|=\|K\|.\tag{47.17}$$

$$(\lambda K)^*(x,\xi)=\bar{\lambda}K^*(x,\xi)\tag{47.18}$$

$$(K+H)^*(x,\xi)=K^*(x,\xi)+H^*(x,\xi),\tag{47.19}$$

$$(KL)^*(x,\xi)=L^*K^*(x,\xi),\tag{47.20}$$

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K^*\psi),\qquad \varphi,\psi\in L_2.\tag{47.21}$$

定义 47.4.10 若 L_2 核 $K(x,\xi)$ 满足条件

$$KK^*(x,\xi)=K^*K(x,\xi),$$

则称 $K(x,\xi)$ 为正规核(regular kernel). 称方程

$$u=v+\bar{\lambda}K^{*}u$$

为积分方程

$$\varphi=f+\lambda K\varphi$$

的共轭方程,其中 $K\varphi$, $k^{*}u$ 表示积分算子.

定义 47.4.11 若积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_{a}^{b}K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad a\leqslant x\leqslant b$$

有异于零的 L_2 解 $\varphi(x)$,则称此函数为 $K(x,\xi)$ 的**特征函数**(eigen function),λ 称为**特征值**(eigenvalue). 特征值的倒数称为核 $K(x,\xi)$ 的固有值,此时与特征值对应的函数称为固有函数.

48 Volterra 积分方程

48.1 两类 Volterra 积分方程

48.1.1 第二类 Volterra 积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad a \leqslant x \leqslant b, \quad (48.1)$$

其中 $f(x) \in L_2[a,b]$是一给定的函数，$K(x,\xi)$是正方形$a \leqslant x$，$\xi \leqslant b$上的L_2 核，且当 $x<\xi$ 时 $K(x,\xi) \equiv 0$.

由 Volterra 核的定义可知，两个 Volterra 核 $K(x,\xi)$ 和 $H(x,\xi)$的合成核

$$L(x,\xi) = \int_a^b H(x,u)K(u,\xi)\mathrm{d}u$$

也是一个 Volterra 核，特别地，Volterra 核 $K(x,\xi)$的各次迭核

$$K^n(x,\xi) = \int_\xi^x K^i(x,u)K^{n-i}(u,\xi)\mathrm{d}u, \qquad i = 1,2,\cdots,n-1$$

都是 Volterra 核，其中$n \geqslant 2$.

定义 48.1.1 L_2 函数列$\{\varphi_n(x)\}$称为**几乎一致收敛**(almost uniform convergence)于 $\varphi(x)$，如果存在一非负的 L_2 函数 $p(x)$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，当 $n \geqslant N$ 时，成立

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon p(x).$$

L_2 函数的无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$称为几乎一致收敛于和函数 $\varphi(x)$，如果其部分和序列几乎一致收敛于 $\varphi(x)$.

L_2 核序列$\{K_n(x,\xi)\}$称为几乎一致收敛于 $K(x,\xi)$，如果存

在一非负的 L_2 核 $P(x,\xi)$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，当 $n\geqslant N(\varepsilon)$ 时，成立

$$|K_n(x,\xi)-K(x,\xi)|\leqslant \varepsilon P(x,\xi).$$

定理 48.1.2 设 $K(x,\xi)$ 为 L_2-Volterra 核，$a\leqslant x,\ \xi\leqslant b$，$\varphi(x)$ 是 L_2 函数，如果

$$\varphi_n(x)=\int_a^x K^n(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad n=1,2,\cdots,$$

则

$$|\varphi_n(x)|\leqslant\frac{k_1(x)\|\varphi\|}{\sqrt{(n-1)!}}\left\{\int_a^x[k_1(\xi)]^2\mathrm{d}\xi\right\}^{\frac{n-1}{2}},$$

其中

$$k_1(x)=\left\{\int_a^x|K(x,\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

定理 48.1.3 设 $K(\alpha,\xi)$ 为 L_2-Volterra 核，$a\leqslant x,\ \xi\leqslant b$，则

$$|K^{n+1}(x,\xi)|\leqslant\frac{\|K\|^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}k_1(x)k_2(\xi),\qquad n=1,2,\cdots,$$

$k_1(x)$ 同上述定理 48.1.3 中的记法，而

$$k_2(\xi)=\left\{\int_\xi^b|K(x,\xi)|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

定理 48.1.4 设 $K(x,\xi)$ 为 L_2-Volterra 核，则级数

$$K(x,\xi)+\lambda K^2(x,\xi)+\cdots+\lambda^{n-1}K^n(x,\xi)+\cdots$$

对任一复数 λ 都几乎一致绝对收敛，且其和 $H_\lambda(x,\xi)$ 是 $K(x,\xi)$ 的预解核.

定理 48.1.5 设 $K(x,\xi)$ 是 L_2-Volterra 核，则对于任一 L_2 函数 $f(x)$ 和任一值 λ，积分方程(48.1)有惟一的 L_2 解

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda f_1(x)+\lambda^2 f_2(x)+\cdots,\tag{48.2}$$

其中

$$f_n(x)=\int_a^x K^n(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad n=1,2,\cdots,$$

且级数(48.2)几乎绝对一致收敛于 $\varphi(x)$. 特别地，齐次方程对每一 λ 只有零解.

例 48.1.6 解方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x e^{x-\xi}\varphi(\xi)d\xi=f(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

$K(x,\xi)=e^{x-\xi}$, 迭核为

$$K^{n+1}(x,\xi)=e^{x-\xi}\frac{(x-\xi)^n}{n!},\qquad n=0,1,\cdots,$$

预解核

$$H_\lambda(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K^{n+1}(x,\xi)=e^{(1+\lambda)(x-\xi)},$$

故方程的解为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x e^{(1+\lambda)(x-\xi)}f(\xi)d\xi.$$

48.1.2 第一类 Volterra 积分方程

$$f(x)=\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,\qquad a\leqslant x\leqslant b,\qquad (48.3)$$

其中 $K(x,\xi)$为连续 Volterra 核或者 L_2 - Volterra 核.

我们假定 $f(x)$和 $K(x,\xi)$充分光滑，分 3 种情况讨论其解的存在性：

(1) 当 $K(x,x)\neq 0$, $x\in[a,b]$的情形.

定理 48.1.7 设方程(48.3)中的核在 $a\leqslant x$, $\xi\leqslant b$ 中连续，且存在连续偏导数 $K'_x(x,\xi)$，则该方程有连续解的充要条件是：$f(x)$及其导数 $f'(x)$在$[a,b]$中连续，且 $f(a)=0$. 此时方程有惟一连续解.

(2) 当 $K(x,x)\equiv 0$ 的情形.

定理 48.1.8 设方程(48.3)中的核 $K(x,\xi)$及 $K'_x(x,\xi)$, $K''_{xx}(x,\xi)$在 $a\leqslant x$, $\xi\leqslant b$ 内连续，且 $K(x,x)\equiv 0$，但 $K'_x(x,x)\neq 0$,

$x\in[a,b]$，则该方程有连续解的充要条件是：$f(x),f'(x),f''(x)$在$[a,b]$内连续，且 $f(a)=f'(a)=0$. 在这些条件下，方程有且仅有一连续解，满足

$$f''(x)=K'_x(x,x)\varphi(x)+\int_a^x K''_{xx}(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

(3) $K(x,x)$在$[a,b]$中只有有限个零点的情形. 设零点为$x_1<x_2<\cdots<x_n$，解方程(48.3)等价于解方程组

$$f(x)=\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad a\leqslant x\leqslant x_1,$$

$$f_1(x)=\int_{x_1}^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad x_1\leqslant x\leqslant x_2,$$

$$\vdots$$

$$f_n(x)=\int_{x_n}^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad x_n\leqslant x\leqslant b,$$

其中

$$f_i(x)=f(x)-\int_a^{x_i} K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

48.2 两类弱奇性积分方程

定义 48.2.1 考虑弱奇性核

$$K(x,\xi)=\frac{F(x,\xi)}{(x-\xi)^\alpha},\qquad 0<\alpha<1, a\leqslant x,\xi\leqslant b, \tag{48.4}$$

其中 $F(x,\xi)$是$[a,b]\times[a,b]$上的连续函数或有界可测函数.

对于由此核构成的第二类 Volterra 方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b, \tag{48.5}$$

也叫做**第二类弱奇性 Volterra 积分方程**(Volterra integral equation with weak singularity of second type).

当 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$时，核 $K(x,\xi)$不是平方可积的. 但存在某一正整数

n_0；当 $n \geqslant n_0$ 时，各次迭核 $K^n(x,\xi)$ 不仅是平方可积的，而且还是有界的，只要 n 满足：$(n-1)-n\alpha>0$.

定理 48.2.2 设核 $K(x,\xi)$ 为(48.4)的形式，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数，$|f(x)| \leqslant L$，若

$$|\lambda| < \frac{1-\alpha}{C(b-a)^{1-\alpha}},$$

其中 C 是 $F(x,\xi)$ 的界，为常数，则积分方程(48.5)有惟一的有界可测解

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda f_1(x) + \cdots + \lambda^n f_n(x) + \cdots, \qquad (48.6)$$

其中

$$f_n(x) = \int_a^x K^n(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_a^x K(x,\xi) f_{n-1}(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

并且级数(48.6)绝对一致收敛.

定义 48.2.3 对于由核(48.4)构成的第一类 Volterra 积分方程

$$f(x) = \int_a^x K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad a \leqslant x \leqslant b, \qquad (48.7)$$

也称为**第一类弱奇性 Volterra 积分方程**.

令

$$G(u) = \int_a^u \frac{f(x)}{(u-x)^{1-\alpha}} \mathrm{d}x,$$

$$H(u,\xi) = \int_\xi^u \frac{F(x,\xi)}{(u-x)^{1-\alpha}(x-\xi)^\alpha} \mathrm{d}x,$$

可得一新的第一类 Volterra 方程

$$G(u) = \int_a^u H(u,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad a \leqslant u \leqslant b. \qquad (48.8)$$

而核 $H(u,\xi)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 中有界，满足

$$|H(u,\xi)| \leqslant C\frac{\pi}{\sin \pi\alpha},$$

从而方程(48.8)可解.

例 48.2.4 考察第一类弱奇性方程

$$\int_0^x (x-\xi)^\beta \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = x^\lambda, \qquad 0 \leqslant x \leqslant b$$

的求解问题,其中 $\beta > -1$, $\lambda \geqslant 0$. 用上述简化方法,可以求得

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\lambda-\beta)} x^{\lambda-\beta-1},$$

其中 $\lambda-\beta+k \neq 0$, $k=0,1,2,\cdots,n$, 即为解.

48.3 Abel 方程

定义 48.3.1 Abel 积分方程(Abel integral equation)是指具有核

$$K(x,\xi) = \frac{1}{(x-\xi)^\alpha}, \qquad 0<\alpha<1$$

的第一类弱奇性 Volterra 积分方程

$$\int_a^x \frac{\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^\alpha} = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

公式 48.3.2 Abel 积分方程的解为

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\xi. \tag{48.9}$$

公式 48.3.3 方程

$$\int_0^x (x^p - \xi^p)^\alpha \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x), \quad -1<\alpha<0, \quad p \neq 0 \tag{48.10}$$

的解为

$$\varphi(x) = \frac{-p\sin \alpha\pi}{\pi} x^{p-1}\left[f(0) + \int_0^x (x^p - \xi^p)^{-1-\alpha} f'(\xi)\mathrm{d}\xi\right],$$

其中 $f(x)$ 为一可微函数.

公式 48.3.4 推广的 Abel 积分方程的解

$$\int_c^x \frac{\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi}{[p(x)-p(\xi)]^\alpha} = f(x), \quad 0<\alpha<1, \quad a\leqslant c<x<b,$$
(48.11)

其中 $p(x)$ 为连续可微的已知函数,方程有惟一解

$$\varphi(x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^x \frac{p'(\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi}{[p(x)-p(\xi)]^{1-\alpha}}.$$

48.4 卷积型的积分方程

定义 48.4.1 卷积型积分方程(integral equation of convolution-type)是指由核

$$K(x,\xi)=k(x-\xi)$$

构成的 Volterra 型积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^x k(x-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x).$$

及

$$\int_0^x k(x-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = f(x). \tag{48.12}$$

对于方程(48.12)取 Laplace 变换(参阅 44.4 节),得

$$\tilde{f}=\tilde{k}\cdot\tilde{\varphi},$$

从而取 $\tilde{\varphi}=\dfrac{\tilde{f}}{\tilde{k}}$. 再取 Laplace 逆变换即可求出 $\varphi(x)$.

例 48.4.2 解积分方程

$$\int_0^x \sin\alpha(x-\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = 1-\cos\beta x.$$

取 Laplace 变换,得

$$\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\tilde{\varphi}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\beta^2},$$

因此

$$\bar{\varphi}=\frac{\beta^2(p^2+\alpha^2)}{\alpha p(p^2+\beta^2)}=\frac{\alpha}{p}+\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha}\right)\frac{p}{p^2+\beta^2}.$$

故

$$\varphi(x)=\alpha+\frac{1}{\alpha}(\beta^2-\alpha^2)\cos\beta x.$$

例 48.4.3 解积分方程

$$\varphi(x)=x+\lambda\int_x^{\infty}e^{a(x-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi,\qquad x>0.$$

显然解不是惟一的. 可以利用 Laplace 变换求出其主解，即对应于 $\bar{\varphi}$ 的 $\varphi(x)$.

$$K(x)=e^{-ax},\qquad \widetilde{K}(p)=\frac{1}{p+a}.$$

对方程进行 Laplace 变换

$$\bar{\varphi}=p^{-2}+\lambda(a-p)^{-1}\bar{\varphi},$$

从而

$$\varphi(x)=(a-\lambda)^{-2}[\lambda+a(a-\lambda)x]+Ce^{(a-\lambda)x},$$

其中 C 为任意常数，$a\neq\lambda$. 当 $a=\lambda$ 时，

$$\varphi(x)=x-\frac{\lambda x^2}{2}.$$

49 Fredholm 积分方程

49.1 退化核

L_2 核 $K(x,\xi)$称为**退化核**(degenerate kernel),如果

$$K(x,\xi)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\overline{b_i(\xi)},\qquad a\leqslant x,\quad \xi\leqslant b,\qquad(49.1)$$

其中 $a_i(x),b_i(\xi)(i=1,2,\cdots,n)$是 L_2 函数.亦可记作

$$K=\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i.$$

定义 49.1.1 把 $K(x,\xi)$表示成(49.1)形式的最小正整数 n 称为退化核 $K(x,\xi)$的**秩**(rank).故退化核亦称为有限秩核.

定理 49.1.2 设 $f(x)$是 L_2 函数,$K(x,\xi)$为退化的 L_2 核:

$$K(x,\xi)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\overline{b_i(\xi)}.$$

设$(f,b_j)=f_j$,$(a_i,b_j)=k_{ji}$.如果 $\varphi(x)$是积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\qquad(49.2)$$

的 L_2 解,则 $\varphi_j=(\varphi,b_j)(j=1,\cdots,n)$是代数方程组

$$\varphi_j=f_j+\lambda\sum_{i=1}^{n}k_{ji}\varphi_i,\qquad j=1,\cdots,n\qquad(49.3)$$

的解.反之,设$\{\varphi_j\}$是方程(49.3)的解,令

$$\varphi=f+\lambda\sum_{i=1}^{n}\varphi_i a_i,\qquad(49.4)$$

则 $\varphi(x)$是方程(49.2)的 L_2 解.

定理 49.1.3 设

$$K=\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$$

是一退化的 L_2 核，令 $\boldsymbol{K}=(k_{ji})=((a_i,b_j))$ 表示矩阵，$d(\lambda)=\det(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})$ 为行列式，$\boldsymbol{D}_\lambda=\mathrm{adj}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})=(d_{ji})$ 为代数余子式的转置，则使 $d(\lambda)\neq 0$ 的任意 λ 是 K 的正则值，而且与之相应的预解核

$$H_\lambda=\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{j,i=1}^{n} d_{ji}(\lambda)(a_j\otimes b_i).$$

例 49.1.4 解积分方程

$$\varphi(x)=x+\lambda\int_0^\pi (1+\sin x\cdot\sin\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

解 $f(x)=x$，$a_1(x)=1$，$b_1(\xi)=1$，$a_2(x)=\sin x$，$b_2(\xi)=\sin\xi$，故

$$k_{11}=\int_0^\pi \mathrm{d}\xi=\pi,\qquad k_{12}=\int_0^\pi \sin\xi\,\mathrm{d}\xi=2,$$

$$k_{21}=\int_0^\pi \sin\xi\,\mathrm{d}\xi=2,\quad k_{22}=\int_0^\pi \sin^2\xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{\pi}{2},$$

$$f_1=\int_0^\pi \xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{\pi^2}{2},\qquad f_2=\int_0^\pi \xi\sin\xi\,\mathrm{d}\xi=\pi,$$

$$d(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\pi\lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 1-\frac{\pi}{2}\lambda \end{vmatrix}=1-\frac{3\pi}{2}\lambda+\left(\frac{\pi^2}{2}-4\right)\lambda^2.$$

若 $d(\lambda)\neq 0$，则由方程组

$$\begin{cases}(1-\pi\lambda)\varphi_1-2\lambda\varphi_2=\dfrac{\pi^2}{2}=f_1,\\[2mm] -2\lambda\varphi_1+\left(1-\dfrac{\pi}{2}\lambda\right)\varphi_2=\pi=f_2.\end{cases}$$

解得

$$\varphi_1=\frac{2\pi^2-(\pi^2-8)\pi\lambda}{2[2-3\pi\lambda+(\pi^2-8)\lambda^2]},$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{2-3\pi\lambda+(\pi^2-8)\lambda^2},$$

故积分方程的解为

$$\varphi(x)=x+\frac{\pi\lambda[2\pi-(\pi^2-8)\lambda+4\sin x]}{4-6\pi\lambda+2(\pi^2-8)\lambda^2}.$$

49.2 L_2 核的 ω -分解

定理 49.2.1 设 $K(x,\xi)$是一 L_2 核，则对于任给的 $\varepsilon>0$，存在一退化的 L_2 核 $K_\varepsilon(x,\xi)$使得 $\|K-K_\varepsilon\|<\varepsilon$.

定义 49.2.2 设 $K(x,\xi)$为一 L_2 核，ω 为一正数(可以任意大)，则可以把 $K(x,\xi)$分解为

$$K(x,\xi)=P(x,\xi)+Q(x,\xi),$$

其中 $P(x,\xi)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\overline{b_i(\xi)}$是一退化核，$\|Q\|<\frac{1}{\omega}$. 核 K 的这种分解称为 **ω-分解**(ω-decomposition).

定理 49.2.3 设 $K(x,\xi)$具有 ω -分解

$$K(x,\xi)=P(x,\xi)+Q(x,\xi).$$

设 G_λ 是 Q 对应于 λ，$|\lambda|<\omega$ 的预解核. 又 $\varphi(x)$，$f(x)$为 L_2 函数，令

$$z=f+\lambda G_\lambda f, \quad (\varphi,b_i)=\varphi_i, \quad (z,b_i)=z_i,$$
$$(a_i+\lambda G_\lambda a_i,b_j)=g_{ji}.$$

若 φ 是方程

$$\varphi=f+\lambda K\varphi \tag{49.5}$$

的解，则

$$\varphi_j=z_j+\lambda\sum_{i=1}^{n} g_{ji}\varphi_i, \qquad j=1,2,\cdots,n. \tag{49.6}$$

反之，若$\{\varphi_j\}$是(49.6)的解，定义

$$\varphi=f+\lambda G_\lambda f+\lambda\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(a_i+\lambda G_\lambda a_i),$$

则 φ 是(49.5)的 L_2 解，且 $\varphi_i=(\varphi,b_i)$.

49.3 Fredholm 择一性

定理 49.3.1 设 $K(x,\xi)$是一 L_2 核，且有 ω-分解

$$K(x,\xi)=Q(x,\xi)+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\overline{b_i(\xi)},$$

其中 $\|Q\|<\frac{1}{\omega}$. 又设 G_λ 是 Q 对应于 λ，$|\lambda|<\omega$ 的预解核，令 $\boldsymbol{F}=(f_{ji})$，其中

$$f_{ji}=(a_i+\lambda G_\lambda a_i,b_j),\qquad i,j=1,2,\cdots,n,$$
$$d(\lambda)=\det(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{F}),\qquad \boldsymbol{A}=(d_{ji})=\mathrm{adj}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{F}),$$

如果$|\lambda|<\omega$,且 $d(\lambda)\neq 0$,则 $K(x,\xi)$的预解核 $H_\lambda(x,\xi)$由下式给出：

$$H_\lambda=G_\lambda+\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{j,i=1}^{n}d_{ji}(a_j+\lambda G_\lambda G_j)\otimes(b_i+\bar{\lambda}(G_\lambda)^*b_i),$$

其中$(G_\lambda)^*$为 G_λ 的共轭核.

定理 49.3.2 Fredholm 择一性定理(Fredholm alternative theorem) 设 $K(x,\xi)$是一 L_2 核，则：

(1) 每一复数或者是 $K(x,\xi)$的正则值，或者是 $K(x,\xi)$的特征值. 特征值的集合至多是可数的，而且没有有限的极限点. $K(x,\xi)$的预解核 $H_\lambda(x,\xi)$是 λ 的半纯函数.

(2) 如果 λ 是 $K(x,\xi)$的正则值，则$\bar{\lambda}$是 $K^*(x,\xi)$的正则值，而且方程

$$\varphi=f+\lambda K\varphi$$

和方程

$$u=v+\bar{\lambda}K^*u.$$

分别对任意的 L_2 函数 f 和 v 有惟一的 L_2 解 φ 和 u，它们分别是

$$\varphi = f + \lambda H_\lambda f,$$

$$u = v + \bar{\lambda}(H_\lambda)^* v.$$

(3) 如果 λ 是 $K(x,\xi)$ 的秩为 p 的特征值，则 $\bar{\lambda}$ 是 $K^*(x,\xi)$ 的秩为 p 的特征值.

(4) 如果 λ 是 $K(x,\xi)$ 的特征值，f 是一 L_2 函数，则方程

$$\varphi = f + \lambda K\varphi \tag{49.7}$$

有 L_2 解的充要条件是 f 正交于共轭齐次方程

$$u = \bar{\lambda}K^* u$$

的每一 L_2 解 u，并且方程(49.7)的一般 L_2 解，由它的特解加上齐次方程

$$\varphi = \lambda K\varphi$$

的一般 L_2 解给出.

例 49.3.3 考察方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \sin\ln x \cdot \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = 2x.$$

该方程有解

$$\varphi(x) = C\lambda\sin\ln x + 2x,$$

其中 $C = \int_0^1 \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$. 代入原方程，得

$$C\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) = 1.$$

当 $\lambda \neq -2$ 时，原方程有惟一解

$$\varphi(x) = \frac{2\lambda}{2+\lambda}\sin\ln x + 2x.$$

这时齐次方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 \sin\ln x \cdot \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = 0 \tag{49.8}$$

只有零解.

当 $\lambda=-2$ 时,原方程无解:因为右端项 $f(x)=2x$ 不正交于其共轭齐次方程的解.这时相应的齐次方程(49.8)有无穷多解

$$\varphi(x)=-2C\sin\ln x.$$

49.4 连续核的 Fredholm 理论

设 $K(x,\xi)$ 和 $f(x)$ 分别是正方形 $a\leqslant x$, $\xi\leqslant b$ 和区间 $[a,b]$ 上的连续函数,我们的问题是要求出方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad a\leqslant x\leqslant b \quad (49.9)$$

在 $[a,b]$ 上的连续解.

解方程的基本思想是把方程(49.9)当作有限个变数的有限线性方程组的极限.

设 n 为任一正整数,将 $[a,b]$ n 等分:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

其中 $\delta_n=\dfrac{b-a}{n}$ 为各小区间的长度.令 $\varphi(x_i)=\varphi_i$, $f(x_i)=f_i$, $K(x_j,x_i)=k_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,当 x 取值 x_j 时,方程(49.9)化为

$$\varphi_j=f_j+\lambda\int_a^b K(x_j,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi. \qquad (49.10)$$

对充分大的 n,上式右端的定积分可用有限和来逼近,从而把方程(49.9)的解看成是代数方程组

$$\varphi_j=f_j+\lambda\delta_n\sum_{i=1}^{n}k_{ji}\varphi_i,\qquad j=1,\cdots,n \qquad (49.11)$$

的解当 $n\to\infty$ 时的极限.

方程(49.11)可写成向量形式

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{F}+\lambda\delta_n\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Phi}. \qquad (49.12)$$

当且仅当系数行列式

$$d_n(\lambda)=\det(\boldsymbol{I}-\lambda\delta_n\boldsymbol{K})\neq 0$$

时，方程(49.12)有惟一解 $\boldsymbol{\Phi}$.

将 $d_n(\lambda)$ 展开为 λ 的多项式

$$d_n(\lambda)=1-\lambda\sum_{j=1}^{n}\delta_n k_{jj}+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\delta_n^2\begin{vmatrix}k_{jj} & k_{ji}\\ k_{ij} & k_{ii}\end{vmatrix}$$

$$+\frac{\lambda^3}{3!}\sum_{i,j,u=1}^{n}\delta_n^3\begin{vmatrix}k_{jj} & k_{ji} & k_{ju}\\ k_{ij} & k_{ii} & k_{iu}\\ k_{uj} & k_{ui} & k_{uu}\end{vmatrix}+\cdots+(-1)^n\lambda^n\delta_n^n\det\boldsymbol{K}. \tag{49.13}$$

形式上取(49.13)的极限，令 $n\to+\infty$，记为

$$d(\lambda)=1-\lambda\int_a^b K(x,x)\mathrm{d}x$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,x) & K(x,\xi)\\ K(\xi,x) & K(\xi,\xi)\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi+\cdots. \tag{49.14}$$

如果 $d_n(\lambda)\neq0$，则方程(49.12)有惟一解

$$\boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{d_n(\lambda)}\,\mathrm{adj}(\boldsymbol{I}-\lambda\delta_n\boldsymbol{K})\boldsymbol{F}.$$

考虑 $n\to+\infty$，并记

$$D_\lambda(x,\xi)=K(x,\xi)-\lambda\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,\xi) & K(x,u)\\ K(u,\xi) & K(u,u)\end{vmatrix}\mathrm{d}u+\cdots, \tag{49.15}$$

方程(49.9)的解应为

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\frac{D_\lambda(x,\xi)}{d(\lambda)}f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

引用记号

$$K\begin{pmatrix}u_1,u_2,\cdots,u_n\\ v_1,v_2,\cdots,v_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}K(u_1,v_1) & K(u_1,v_2) & \cdots & K(u_1,v_n)\\ K(u_2,v_1) & K(u_2,v_2) & \cdots & K(u_2,v_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ K(u_n,v_1) & K(u_n,v_2) & \cdots & K(u_n,v_n)\end{vmatrix}, \tag{49.16}$$

则 $d(\lambda)$可以写成

$$d(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n\lambda^n, \tag{49.17}$$

其中 $d_0=1$,

$$d_n=\frac{(-1)^n}{n!}\underbrace{\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b}_{n\text{重}} K\begin{pmatrix}u_1, u_2, \cdots, u_n\\ u_1, u_2, \cdots, u_n\end{pmatrix}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n, \qquad n\geqslant 1.$$

核 $D_\lambda(x,\xi)$可写成

$$D_\lambda(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty} D_n(x,\xi)\lambda^n, \tag{49.18}$$

其中 $D_0(x,\xi)=K(x,\xi)$,

$$D_n(x,\xi)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}x, u_1, \cdots, u_n\\ \xi, u_1, \cdots, u_n\end{pmatrix}\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n, \quad n\geqslant 1.$$

定理 49.4.1 设 $K(x,\xi)$是一连续核,又 d_n 与 $D_n(x,\xi)$如上定义,则:

(1) 级数(49.17)对一切复 λ 均收敛,而且 $d(\lambda)$是 λ 的整函数.

(2) 对给定的(x,ξ),级数(49.18)对一切复数 λ 均收敛,且 $D_\lambda(x,\xi)$为 λ 的整函数.

(3) 当 λ 属于复平面内任一有界区域时,级数(49.18)关于(x,ξ,λ)绝对一致收敛,而且对每一给定的 λ, $D_\lambda(x,\xi)$是一个连续核.

定义 49.4.2 函数 $d(\lambda)$称为核 $K(x,\xi)$的 **Fredholm 行列式**(Fredholm determinant). $D_\lambda(x,\xi)$称为核 $K(x,\xi)$的第一阶 Fredholm **子式**(subdeterminant).

定理 49.4.3 设 $K(x,\xi)$是一个连续核, $d(\lambda)$及 $D_\lambda(x,\xi)$如上,若 $d(\lambda)\neq 0$,则 λ 是 $K(x,\xi)$的正则值,且预解核 $H_\lambda(x,\xi)$为

$$H_\lambda(x,\xi)=\frac{D_\lambda(x,\xi)}{d(\lambda)}.$$

定理 49.4.4 设 $K(x,\xi)$是一个连续核，$f(x)$连续函数，$d(\lambda)$与 $D_\lambda(x,\xi)$如上. 如果 λ 不是$d(\lambda)$的零点，则积分方程(49.9)有惟一连续解.

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{d(\lambda)}\int_a^b D_\lambda(x,\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

特别地，齐次方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{49.19}$$

有惟一连续解 $\varphi(x)=0$.

定理 49.4.5 设 $K(x,\xi)$为连续核，$d(\lambda)$是它的 Fredholm 行列式，设 λ_0 是 $d(\lambda)$的零点，则方程(49.19)存在不恒为零的连续解 $\varphi(x)$，即 λ_0 是 $K(x,\xi)$的一个特征值.

49.5 L_2 核的 Fredholm 公式

定义 49.5.1 对于 L_2 核 $K(x,\xi)$，如果 $K(x,x)$在$[a,b]$上可测并且可积，则称

$$\tau(K)=\int_a^b K(x,x)\mathrm{d}x$$

为核 $K(x,\xi)$的迹(trace).

定理 49.5.2 设 $K(x,\xi)$是$[a,b]\times[a,b]$上的 L_2 核，如果下列两个条件之一成立：

(1) $K(x,\xi)$可以表示成两个 L_2 核 $G(x,\xi)$和 $H(x,\xi)$的合成核 $GH(x,\xi)$；或者

(2) $K(x,\xi)$是一退化核，

则 $\tau(K)$存在.

定理 49.5.3 设 $K(x,\xi)$和 $L(x,\xi)$是$[a,b]\times[a,b]$上的两个 L_2 核，则有：

(1) 如果 $\tau(K)$，$\tau(L)$均存在，则对任意的数 α,β, $\tau(\alpha K+\beta L)$

也存在，且有

$$\tau(\alpha K+\beta L)=\alpha\tau(K)+\beta\tau(L);$$

(2) 如果 $\tau(K)$ 存在，则 $\tau(K^*)$ 也存在，且 $\tau(K^*)=\overline{\tau(K)}$；

(3) $\tau(KL)=\tau(LK)$；

(4) $|\tau(KL)|\leqslant\|K\|\cdot\|L\|$；

(5) 当 $n\geqslant 2$ 时，$\tau(K^n)$ 总存在，且有 $|\tau(K^n)|\leqslant\|K\|^n$；

(6) 如果 $\|K_n-K\|\to 0$，$\|L_n-L\|\to 0(n\to\infty)$，则当 $n\to\infty$ 时，$\tau(K_nL_n)\to\tau(KL)$.

定义 49.5.4 L_2 核 $K(x,\xi)$ 称为典则的退化核，如果它可以写成

$$K(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{p}k_{ji}\boldsymbol{e}_j(x)\overline{\boldsymbol{e}_i(\xi)}\overset{\text{def}}{=}\sum_{i,j=1}^{p}k_{ji}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i,$$

其中 $\boldsymbol{K}=(k_{ji})$ 是一个 p 阶方阵，$(e_1,\cdots,\boldsymbol{e}_p)$ 是一有限的完备正交基.

对于典则的退化核 $K(x,\xi)$，其迹 $\tau(K)$ 即是矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的代数迹 $\sum_{i=1}^{p}k_{ii}$. 记成

$$\tau(\boldsymbol{K})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{K})=\sum_{i=1}^{p}k_{ii}. \tag{49.20}$$

定理 49.5.5 设 K 为退化的 L_2 核，$K=\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i$，则存在一典则的退化核 $K_0(x,\xi)=\sum_{i,j=1}^{p}k_{ji}\,\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$，使得：

(1) $K(x,\xi)=K_0(x,\xi)$，a. e.（几乎处处）；

(2) $\tau(K^r)=\tau(K_0^r)=\operatorname{tr}(\boldsymbol{K}^r)(r=1,2,\cdots)$.

定理 49.5.6 设 $K(x,\xi)$ 是一典则的退化核，$K(x,\xi)=\sum_{j,i=1}^{p}k_{ji}\boldsymbol{e}_j(x)\overline{\boldsymbol{e}_i(\xi)}$，设 $K_i(i=1,\cdots,p)$ 是方阵 $\mathbf{K}=(k_{ji})$ 的特征多项式的零点，则

$$\tau(K^n)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{K}^n)=\sum_{i=1}^{p}K_i^n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

定理 49.5.7 设 K 为典则的退化核，$K=\sum_{j,i=1}^{p}k_{ji}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$，$d(\lambda)=\det(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})\neq0$，令 $\mathrm{adj}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})=\boldsymbol{A}_\lambda=(a_{ji})$，$A_\lambda=\sum_{j,i=1}^{p}a_{ji}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$，$D_\lambda=KA_\lambda$，则核 K 有预解核：$H_\lambda=\dfrac{D_\lambda}{d(\lambda)}$.

定理 49.5.8 设 K 为典则的退化核，又设

$$d(\lambda)=\det(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})=\sum_{n=0}^{\infty}d_n\lambda^n,$$

则 $d_0=1$，

$$d_n=\frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix}\sigma_1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \sigma_2 & \sigma_1 & n-2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \cdots & \sigma_1 & 1\\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \cdots & \sigma_2 & \sigma_1\end{vmatrix},$$

其中 $\sigma_n=\tau(K^n)(n\geqslant1)$.

定理 49.5.9 设 $K=\sum_{j,i=1}^{n}k_{ji}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i$，$d(\lambda)=\det(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{K})$，$K$ 有预解核 $H_\lambda=[d(\lambda)]^{-1}D_\lambda$，其中令 $D_\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\lambda^n$，则 $D_0=K$，

$$D_n=\frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix}K & n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ K^2 & \sigma_1 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ K^3 & \sigma_2 & \sigma_1 & n-2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ K^n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \sigma_{n-3} & \cdots & \sigma_1 & 1\\ K^{n+1} & \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \cdots & \sigma_2 & \sigma_1\end{vmatrix}.$$

定理 49.5.10 设 $K(x,\xi)$ 是一个 L_2 核，记 $\sigma_n=\tau(K^n)(n\geqslant 2)$，当 $n\geqslant 0$ 时，$\delta_n,\Delta_n(x,\xi)$ 分别定义为

$$\delta_0=1,\quad \Delta_0=K,$$

$$\delta_n=\frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix} 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_n & \sigma_{n-1} & \sigma_{n-2} & \cdots & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n=\frac{(-1)^n}{n!}\begin{vmatrix} K & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ K^2 & 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ K^{n+1} & \sigma_n & \sigma_{n-1} & \cdots & \sigma_3 & \sigma_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

则有

$$\Delta_{n+1}=\delta_{n+1}K+K\Delta_n=\delta_{n+1}K+\Delta_nK_1,\quad n\geqslant 0,$$

$$\tau(\Delta_n-\delta_nK)=-(n+1)\delta_{n+1},\quad n\geqslant 0,$$

$$|\delta_n|\leqslant\frac{e^{\frac{n}{2}}\|K\|^n}{n^{\frac{n}{2}}},\quad n\geqslant 1,$$

$$\|\Delta_n\|\leqslant\frac{e^{\frac{n+1}{2}}\|K\|^{n+1}}{n^{\frac{n}{2}}},\quad n\geqslant 1.$$

定理 49.5.11 设 $K(x,\xi)$ 是一个 L_2 核，δ_n 和 $\Delta_n(x,\xi)$ 如上，令

$$\delta(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\lambda^n,\tag{49.21}$$

$$\Delta_\lambda(x,\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n(x,\xi)\lambda^n.\tag{49.22}$$

则级数(49.21)对一切 λ 收敛，且 $\delta(\lambda)$ 是 λ 的整函数；级数(49.22)对任一固定的 λ 几乎绝对一致收敛，其和 $\Delta_\lambda(x,\xi)$ 对每一个 λ 是 L_2 核；而且对几乎所有的 (x,ξ)，$\Delta_\lambda(x,\xi)$ 是 λ 的整函数.

定义 49.5.12 称由(49.21)给出的$\delta(\lambda)$为$K(x,\xi)$的修改的 Fredholm 行列式，或称为$K(x,\xi)$的 Carleman(卡勒曼)-Fredholm 行列式. 称$\Delta_\lambda(x,\xi)$为修改的第一阶 Fredholm 子式，或称为 Carleman-Fredholm 第一阶子式.

定理 49.5.13 设$K(x,\xi)$是一L_2核，$\delta(\lambda)$，$\Delta_\lambda(x,\xi)$如上，如果$\delta(\lambda)\neq 0$，则λ是$K(x,\xi)$的正则值，而且预解核$H_\lambda(x,\xi)$可表示为

$$H_\lambda(x,\xi)=\frac{\Delta_\lambda(x,\xi)}{\delta(\lambda)}.$$

如果$f(x)$是L_2函数，则积分方程(49.9)有惟一的L_2解$\varphi(x)$，由下式给出：

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\frac{\Delta_\lambda(x,\xi)}{\delta(\lambda)}f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

定理 49.5.14 设$K(x,\xi)$是L_2核，$\varphi(x)$是$K(x,\xi)$对应于λ的L_2特征函数，$f(x)$是$K^*(x,\xi)$对应于$\bar{\mu}$的L_2特征函数，其中$\lambda\neq\mu$，则$\varphi(x)$与$f(x)$正交，即$(\varphi,f)=0$.

定理 49.5.15 设$K(x,\xi)$为L_2核，$f(x)$为L_2函数，λ是$K(x,\xi)$的一个特征值，则方程(49.9)有L_2解的充要条件是$f(x)$正交于$K^*(x,\xi)$对应于特征值$\bar{\lambda}$的一切L_2特征函数.

49.6 Hermite 核理论

我们来考察一个L_2核$K(x,\xi)$是 Hermite 核的情形，即

$$K(x,\xi)=K^*(x,\xi)=\overline{K(\xi,x)}.$$

实对称核是指实 Hermite 核.

定理 49.6.1 设$K(x,\xi)$是一非零的L_2-Hermite 核，则有：

(1) 核$K(x,\xi)$至少有一特征值；

(2) 核$K(x,\xi)$的每个特征值均为实的；

(3) $K(x,\xi)$对应于不同特征值的特征函数彼此正交.

定理 49.6.2 设 $K(x,\xi)$ 是一非零的 L_2-Hermite 核，则 $K(x,\xi)$ 的特征值全体的集合是一有限集或是没有有限极限点的可数集 $\{\lambda_n\}$，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\leqslant\|K\|^2<\infty,$$

其中重特征值按重数(即秩)出现在级数中.

定义 49.6.3 核 $K(x,\xi)$ 的所有特征值组成的集合称为该核的谱(spectrum).

例 49.6.4 求下列对称方程的特征值与特征函数

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中，对称核 $K(x,\xi)$ 为

$$K(x,\xi)=\begin{cases}x(1-\xi), & x\leqslant\xi,\\ \xi(1-x), & x>\xi.\end{cases}$$

解 积分方程等价于如下的偏微分方程边值问题：

$$\begin{cases}\varphi''(x)+\lambda\varphi(x)=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \varphi(0)=\varphi(1)=0.\end{cases}$$

解之得

$$\varphi(x)=\begin{cases}C_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}, & \lambda<0,\\ C_1+C_2x, & \lambda=0,\\ C_1\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x, & \lambda>0.\end{cases}$$

由边值条件，当 $\lambda\leqslant 0$ 时，$C_1=C_2=0$，即 $\varphi(x)\equiv 0$. 故 $\lambda\leqslant 0$ 不是 $K(x,\xi)$ 的特征值. 当 $\lambda>0$ 时，由边值条件必有 $C_2=0$，$C_1\sin\sqrt{\lambda}=0$. 因此要使 $C_1\neq 0$，必须 $\sin\sqrt{\lambda}=0$，即 $\lambda=n^2\pi^2\ (n=1,2,\cdots)$，由此可知，$K(x,\xi)$ 的谱是 $\{\lambda_n\}=\{n^2\pi^2\}$. 对应的特征函数系是 $\{\sqrt{2}\ \sin(n\pi x)\}$.

定理 49.6.5 一给定的标准正交系 $\{\varphi_n\}$ 是一非零 L_2-Hermite

核的特征函数标准系的充要条件是：

(1) 每一个 φ_n 是 K 的对应于某个特征值 λ_n 的特征函数；

(2) K 的每个 L_2 特征函数 φ 可以表示成 $\{\varphi_n\}$ 中的函数的有限线性组合.

定理 49.6.6 对称核 $K(x,\xi)$ 的最小特征值(按绝对值意义)的绝对值的倒数等于 $|(K\varphi,\varphi)|$ 在条件 $(\varphi,\varphi)=1$ 下的极大值. 且当 φ_1 是与 $K(x,\xi)$ 的最小特征值 λ_1 相对应的特征函数时，有

$$\frac{1}{|\lambda_1|}=|(K\varphi_1,\varphi_1)|=\max_{\|\varphi\|=1}|(K\varphi,\varphi)|.$$

定理 49.6.7 设 $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\varphi_n\}$ 分别是对称核 $K(x,\xi)$ 的谱和对应的特征函数系，则 $\{\lambda_n^m\}$ 和 $\{\varphi_n(x)\}$ 必是 $K(x,\xi)$ 的 m 次迭核 $K_m(x,\xi)$ 的谱和对应的特征函数系.

定理 49.6.8 设对称核 $K(x,\xi)$ 适合条件

$$\int_a^b |K(x,\xi)|^2 d\xi < C_1,$$

C_1 为正常数，$\{\lambda_n\}$，$\{\varphi_n(x)\}$ 为谱与特征函数系. 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\varphi_n(x)|^2}{\lambda_n^2}$$

收敛，且它的和不大于常数 C_1.

定理 49.6.9 设 $\{\lambda_n\}$ 是对称核 $K(x,\xi)$ 的全体特征值，$\{\varphi_n(x)\}$ 是对应的特征函数，则对称核

$$K^{(n)}(x,\xi)=K(x,\xi)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k}(\xi)}{\lambda_k}$$

有特征值 $\lambda_{n+1},\lambda_{n+2},\cdots$ 与特征函数 $\varphi_{n+1}(x),\cdots$ 相对应. 而 $K(x,\xi)$ 的其他特征值与特征函数均不是 $K^{(n)}(x,\xi)$ 的特征值与特征函数.

定理 49.6.10 对称核是退化核的充要条件是：它仅有有限个特征值.

定理 49.6.11 设 $K(x,\xi)$ 为非零的 L_2-Hermite 核，$\{\lambda_n\}$ 为特征值，$\{\varphi_n(x)\}$ 为特征函数系，则

$$K(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)}}{\lambda_n},$$

其中级数平均收敛于 $K(x,\xi)$.

定理 49.6.12 Hilbert-Schmidt(希尔伯特-施密特)定理(Hilbert-Schmidt theorem) 设 $K(x,\xi)$为非零 L_2-Hermite 核, $\{\lambda_n\}$, $\{\varphi_n(x)\}$是其特征系, $\varphi(x)$是一 L_2 函数, $f=K\varphi$,则有:

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n$, a. e. 级数几乎绝对一致收敛于 $f(x)$;

(2) 若再假设核 K 满足

$$\int_a^b |K(x,\xi)|^2\mathrm{d}\xi=[k_1(x)]^2\leqslant C^2,$$

C 正常数,则(1)中的级数绝对一致收敛于 $f(x)$.

定理 49.6.13 设$\{\lambda_n\}$为一给定的实数序列, $|\lambda_n|\leqslant|\lambda_{n+1}|$ $(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}<\infty$. 设$\{\varphi_n\}$是一给定的标准正交系,则存在以$\{\lambda_n\}$为特征值, $\{\overline{\varphi_n}(x)\}$为对应特征函数的 L_2 - Hermite 核 $K(x,\xi)$,其中$\overline{\varphi_n}=\varphi_n$, a. e. 并且此核在等价意义下是惟一的.

定理 49.6.14 设$\{\lambda_n\}$, $\{\varphi_n(x)\}$是 L_2 - Hermite 核 $K(x,\xi)$ 的特征系, φ 是任一 L_2 函数, $f=K^p\varphi$, $p>1$,则有

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_n)\varphi_n}{\lambda_h^p},\qquad \text{a. e.},$$

其中的级数几乎绝对一致收敛于 f.

定义 49.6.15 函数 $K(x,\xi)$ $(a\leqslant x,\xi\leqslant b)$ 称为 **B-核**(B-Kernel),如果存在常数 C_1, C_2 使得

$$\int_a^b |K(x,\xi)|^2\mathrm{d}\xi < C_1,\qquad \int_a^b |K(x,\xi)|^2\mathrm{d}x < C_2.$$

定义 49.6.16 函数 $K(x,\xi)$ $(a\leqslant x,\xi\leqslant b)$ 称为 **C_m-核**(C_m-kernel),如果对任意的 x_1, $\xi_1\in[a,b]$,有

$$\lim_{x\to x_1}\int_a^b |K(x,\xi)-K(x_1,\xi)|^2 d\xi=0,$$

$$\lim_{\xi\to \xi_1}\int_a^b |K(x,\xi)-K(x,\xi_1)|^2 dx=0.$$

定理 49.6.17 设 $K(x,\xi)$ 为 C_m-Hermite 核，$a\leqslant x,\xi\leqslant b$，$p>1$ 整数，$\{\lambda_n\}$，$\{\varphi_n(x)\}$为特征系，则

$$K^p(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)}}{\lambda_n^p},$$

级数关于(x,ξ)绝对一致收敛.

定理 49.6.18 设 $K(x,\xi)$是 C_m-Hermite 核，$\varphi(x)$是一 L_2 函数，$f=K\varphi$，则

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x),$$

级数是绝对一致收敛的.

定义 49.6.19 设 $\varphi(x)$为 L_2 函数，若核 $K(x,\xi)$满足

$$(K\varphi,\varphi)=\int_a^b\int_a^b K(x,\xi)\overline{\varphi(x)}\varphi(\xi)d\xi dx\geqslant 0.$$

则称 $K(x,\xi)$为**正核**(positive kernel)；反之，称为**负核**(negative kernel).

定义 49.6.20 若对 L_2 函数 $\varphi(x)$，核 $K(x,\xi)$满足

$$(K\varphi,\varphi)>0,$$

则称核 $K(x,\xi)$为**正定核**(positive definite kernel)；反之，称为**负定核**(negative definite kernel).

定理 49.6.21 L_2-Hermite 核 $K(x,\xi)$为正(负)核的充要条件是其所有特征值均正(负).

定理 49.6.22 对称正核为正定核的充要条件是：它的特征函数系是完备的.

定理 49.6.23 Mercer 定理 设 $K(x,\xi)$为一连续的且不恒为零的 L_2-Hermite 正核，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

收敛，而且有

$$K(x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(\xi)}}{\lambda_n}$$

关于(x,ξ)绝对一致收敛于 $K(x,\xi)$.

若连续对称核 $K(x,\xi)$不是正核，但除有限个特征值外，$K(x,\xi)$的其余所有特征值均保持正号或负号，则 Mercer 定理仍成立.

定理 49.6.24 Hilbert-Schmidt 定理(Hilbert-Schmidt theorem) 设$\{\lambda_n\}$,$\{\varphi_n(x)\}$是对称核 $K(x,\xi)$的谱和特征函数系，且

$$\int_a^b |K(x,\xi)|^2 d\xi < C_1, \qquad C_1 \text{ 为正常数},$$

则下列结论成立：

(1) 若 λ 不是 $K(x,\xi)$的特征值，则方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi) d\xi$$

对任给的自由项 $f(x)$都有惟一解 $\varphi(x)$，并且该解可以表示为

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x). \qquad (49.23)$$

上式右端的级数绝对一致收敛.

(2) 若 λ 是 $K(x,\xi)$的特征值，其秩为 r，$\lambda = \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \cdots = \lambda_{m+r}$，则方程有解的充要条件为

$$(f,\varphi_n) = 0, \qquad n = m+1, \cdots, m+r.$$

当此条件满足时，方程有无穷多个解，由下式给出：

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{m} \frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x) + \lambda \sum_{n=m+r+1}^{\infty} \frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x) + \sum_{n=m+1}^{m+r} C_n \varphi_n(x), \qquad (49.24)$$

其中 $C_n (n = m+1, \cdots, m+r)$为任意常数.

公式(49.23)、(49.24)一般称为 Hilbert-Schmide 公式(Hilbert - Schmide formula).

例 49.6.25 求解对称方程

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}x(1-x)+\lambda\int_0^1 K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

其中核 $K(x,\xi)$ 为

$$K(x,\xi)=\begin{cases}x(1-\xi), & x\leqslant\xi,\\ \xi(1-x), & x>\xi.\end{cases}$$

解 由例 49.6.4 可知,核 $K(x,\xi)$的特征值为

$$\lambda_n=n^2\pi^2,\qquad n=1,2,\cdots,$$

特征函数为

$$\varphi_n(x)=\sqrt{2}\ \sin\ (n\pi x),\qquad n=1,2,\cdots,$$

其中每个 λ_n 的秩均为 1. 经简单计算可知

$$\int_0^1 f(x)\overline{\varphi_n(x)}\ \mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\ \mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{n^3\pi^3}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

于是,由定理 49.6.24 有:

(1) 若 $\lambda\neq n^2\pi^2(n=1,2\cdots)$,则原方程有惟一解

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}x(1-x)-4\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^3\lambda^3[\pi^2(2n+1)^2-\lambda]}.$$

(2) 若 $\lambda=k^2\pi^2$,k 为正奇数,则方程无解.

(3) 若 $\lambda=k^2\pi^2$,k 为正偶数,则原方程有无穷多个解,可表示为

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}x(1-x)-4\lambda\sum_{n\neq k}\frac{\sin(2n+1)\pi x}{(2n+1)^3\pi^3[(2n+1)^2\pi^2-\lambda]}$$

$$+C\sin\ (k\pi x),\qquad C\text{ 为任意常数}.$$

49.7 第一类 Fredholm 积分方程

本节在实函数的范围内考虑如下的第一类 Fredholm 积分方程：

$$\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x), \qquad a\leqslant x\leqslant b, \tag{49.25}$$

并设方程(49.25)中的核 $K(x,\xi)$是实对称的，即 $K(x,\xi)=K(\xi,x)$.

事实上，可将(49.25)化为对称方程来求解，改写为

$$\int_a^b K(y,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=f(y). \tag{49.26}$$

方程(49.26)两边乘以 $K(y,x)$，并对 y 取积分得

$$\int_a^b K_*(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=F(x), \tag{49.27}$$

其中

$$K_*(x,\xi)=\int_a^b K(y,x)K(y,\xi)\mathrm{d}y, \tag{49.27a}$$

$$F(x)=\int_a^b K(y,x)f(y)\mathrm{d}y. \tag{49.27b}$$

显然，核 $K_*(x,\xi)$ 是对称核. 当然，(49.25) 和方程(49.27) 一般不等价.

定理 49.7.1 Schmidt-Picard 定理(Schmidt-Picard theorem) 设$\{\lambda_n\}$，$\{\varphi_n(x)\}$ 是实对称核 $K(x,\xi)$ 的特征系. 则(49.25) 有解的充要条件是下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 f_n^2, \qquad f_n=(f,\varphi_n)$$

收敛. 若$\{\varphi_n(x)\}$ 还是完备的，则(49.25) 有如下惟一解 $\varphi_0(x)$

$$\varphi_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n \varphi_n(x).$$

上式右端级数平均收敛. 若$\{\varphi_n(x)\}$ 不是完备的，且非零函数

$\Phi_1(x),\Phi_2(x),\cdots$ 和 $\{\varphi_n(x)\}$ 中的每一函数正交，则下列函数

$$\varphi_0(x)+C_1\Phi_1(x)+C_2\Phi_2(x)+\cdots$$

也是(49.25)的解，其中 $C_1,C_2,\cdots$ 是任意常数.

定理 49.7.2 设 $K(x,\xi)$ 是实对称正定核，且(49.25)的解存在. 则由下式

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}(x)+\lambda[f(x)-f_{n-1}(x)]$$

确定的序列平均收敛于(49.25)的解. 其中

$$f_{n-1}(x)=\int_a^b K(x,\xi)\varphi_{n-1}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

$\varphi_0(x)$ 是任一 L_2 函数，而 $0<\lambda<2\lambda_1$，λ_1 是 $K(x,\xi)$ 的最小特征值.

例 49.7.3 考察下列方程

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=\mathrm{e}^{2x}. \tag{49.28}$$

解 可将方程(49.28)写成

$$A\sin x+B\cos x=\mathrm{e}^{2x}, \tag{49.29}$$

其中

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\cos\xi\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\qquad B=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\xi\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

显然，无论 A 与 B 取什么数，(49.29)式均不成立. 因此原方程(49.28)不可解.

例 49.7.4 考察下列方程

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=3\sin x+2\cos x. \tag{49.30}$$

解 取下面形式的解

$$\varphi(x)=A\sin x+B\cos x, \tag{49.31}$$

其中 A,B 为待定常数. 将(49.31)代入(49.30)式，得

$$\pi B\sin x+\pi A\cos x=3\sin x+2\cos x,$$

于是 $A=\dfrac{2}{\pi},B=\dfrac{3}{\pi}$，故得到一个解

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi}(2\sin x + 3\cos x).$$

此外，函数

$$\Psi(x) = C_0 + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

与核 $\sin(x+\xi)$ 正交，即恒有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(x+\xi)\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi = 0,$$

这里 $C_0, a_n, b_n (n = 2, \cdots)$ 都是任意实常数．所以，方程(49.30)的一般解为

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \Psi(x),$$

因此，方程(49.30)有无穷多个解．

50 积分方程组

50.1 Fredholm 积分方程组

考察如下形式的 Fredholm 方程组：

$$\varphi_j(x) - \lambda \sum_{l=1}^{n} \int_a^b K_{jl}(x,\xi)\varphi_l(\xi)\mathrm{d}\xi = f_j(x), \quad j = 1,2,\cdots,n, \tag{50.1}$$

其中 $K_{jl}(x,\xi)$ 和 $f_j(x)(j,l=1,\cdots,n)$ 均是$[a,b]$上的 L_2 函数；而 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 是未知函数. 关于方程组(50.1)的理论与解法，与单个方程的情形基本类似.

令

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x)),$$

$$\boldsymbol{K}(x,\xi) = \begin{bmatrix} K_{11}(x,\xi) & K_{12}(x,\xi) & \cdots & K_{1n}(x,\xi) \\ K_{21}(x,\xi) & K_{22}(x,\xi) & \cdots & K_{2n}(x,\xi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1}(x,\xi) & K_{n2}(x,\xi) & \cdots & K_{nn}(x,\xi) \end{bmatrix},$$

则方程组(50.1)可写成向量形式

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\varphi}(x) - \lambda\int_a^b \boldsymbol{K}(x,\xi)\boldsymbol{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \boldsymbol{f}(x). \tag{50.2}$$

定义 50.1.1 称方程组(50.1)为 Fredholm 积分方程组. 称(50.2)中的矩阵 $\boldsymbol{K}(x,\xi)$ 为 Fredholm 方程组的核.

定义 50.1.2 所谓积分方程组(50.1)的一个解(solution)，是指 n 个函数 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$，把它们代入方程组后就得到一组恒等式.

定义 50.1.3 方程

$$\boldsymbol{N}^{*}\boldsymbol{\Psi}\equiv\boldsymbol{\Psi}(x)-\bar{\lambda}\int_{a}^{b}\boldsymbol{K}^{*}(x,\xi)\boldsymbol{\Psi}(\xi)\mathrm{d}\xi=\boldsymbol{g}(x),$$

称为方程(50.2)的共轭向量方程(conjugate vector equation).其中 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 为未知向量,$\boldsymbol{g}(x)$ 为已知向量,而

$$\boldsymbol{K}^{*}(x,\xi)=\overline{\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}(\xi,x)}.$$

这里 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$ 表示转置矩阵.相应的共轭方程组为

$$\Psi_{j}(\xi)-\bar{\lambda}\sum_{l=1}^{\infty}\int_{a}^{b}\overline{K_{lj}(\xi,x)}\,\Psi_{l}(x)\mathrm{d}x=g_{j}(\xi),\qquad j=1,\cdots,n.$$

对于 $\boldsymbol{N},\boldsymbol{N}^{*}$ 及任意两个可积向量 $\boldsymbol{\varphi}(x),\boldsymbol{\psi}(x)$,成立

$$(\boldsymbol{N}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi})=(\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{N}^{*}\boldsymbol{\psi}).\tag{50.3}$$

定理 50.1.4 对于方程组(50.2)有如下结论:

(1) 对于每个 λ 值,齐次向量方程 $\boldsymbol{N\varphi}=\boldsymbol{0}$ 只有有限个线性无关解向量,其共轭方程 $\boldsymbol{N}^{*}\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{0}$ 也有同样个数的线性无关解向量.

(2) 如果齐次向量方程 $\boldsymbol{N\varphi}=\boldsymbol{0}$ 只有零解,则向量方程(50.2)对于任意右端项 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 都是惟一可解的;如果齐次向量方程 $\boldsymbol{N\varphi}=\boldsymbol{0}$ 有 p 个非零解,则当且仅当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 满足:

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}^{(j)})=0,\qquad j=1,\cdots,p$$

时,方程(50.2)才是可解的,这里 $\boldsymbol{\psi}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\psi}^{(p)}(x)$ 是方程 $\boldsymbol{N}^{*}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{0}$ 的所有线性无关解.

(3) 当 $p=0$ 时,即 $\boldsymbol{Nx}=\boldsymbol{0}$ 只有零解时,则存在核阵 $\boldsymbol{K}(x,\xi)$ 的预解核矩阵 $\boldsymbol{H}_{\lambda}(x,\xi)$,此时方程(50.2)的解可写成

$$\boldsymbol{\varphi}(x)=\boldsymbol{f}(x)+\lambda\int_{a}^{b}\boldsymbol{H}_{\lambda}(x,\xi)\boldsymbol{f}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

当 $p>0$ 时,当且仅当(2)中的条件满足时,存在广义预解核矩阵.

50.2 Volterra 积分方程组

如果 Fredholm 积分方程组(50.1)中的 $K_{jl}(j,l=1,\cdots,n)$ 满足下面的条件:

$$K_{jl}(x,\xi) = 0, \quad 当 a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b; \quad j,l = 1,\cdots,n, \tag{50.4}$$

就有如下形式的 Volterra 积分方程组：

$$\varphi_j(x) - \lambda \sum_{l=1}^{n} \int_a^x K_{jl}(x,\xi)\varphi_l(\xi)\mathrm{d}\xi = f_j(x), \qquad j = 1,\cdots,n. \tag{50.5}$$

或写成向量形式：

$$\boldsymbol{\varphi}(x) - \lambda \int_a^x \boldsymbol{K}(x,\xi)\boldsymbol{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \boldsymbol{f}(x), \tag{50.6}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi}(x)$，$\boldsymbol{f}(x)$ 及核矩阵 $\boldsymbol{K}(x,\xi)$ 的定义同上节.

定理 50.2.1 设 $\boldsymbol{K}(x,\xi)$ 是 L_2 Volterra 核矩阵，则对任一 L_2 向量函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 和任一值 λ，向量方程(50.6) 有惟一的 L_2 解

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{f}(x) + \lambda \boldsymbol{f}_1(x) + \lambda^2 \boldsymbol{f}_2(x) + \cdots,$$

其中

$$\boldsymbol{f}_n(x) = \int_a^x \boldsymbol{K}^n(x,\xi)\boldsymbol{f}(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad n = 1,2,\cdots,$$

$\boldsymbol{K}^n(x,\xi)$ 是迭核，按方阵的乘积处理. 特别地，齐次方程

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \lambda \int_a^x \boldsymbol{K}(x,\xi)\boldsymbol{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

对每一 λ 值只有零向量解 $\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{0}$.

50.3 一类 Fredholm 型积分方程

考察积分方程

$$L\varphi = \varphi(x) + \int_\Gamma K_1(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_\Gamma K_2(x,\xi)\overline{\varphi(\xi)}\mathrm{d}\bar{\xi} = f(x), \tag{50.7}$$

其中 Γ 是平面上一条按段光滑的曲线，$K_1(x,\xi)$，$K_2(x,\xi)$，$f(x)$ 都是 Γ 上的点 x 与 ξ 的已知函数，假设它们有界可积.

由于在方程(50.7) 中既出现 $\varphi(x)$ 于积分号下，又有 $\overline{\varphi(x)}$ 出

现在积分号下，因此不能照平常的 Fredholm 方程去做. 我们令 $\varphi^*(x)=\overline{\varphi(x)}$，并取(50.7)的共轭，得到方程组

$$\begin{cases}\varphi(x)+\int_\Gamma K_1(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_\Gamma K_2(x,\xi)\,\overline{\xi'^2}\varphi^*(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x),\\ \varphi^*(x)+\int_\Gamma\overline{K_2(x,\xi)}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_\Gamma\overline{K_1(x,\xi)}\,\overline{\xi'^2}\varphi^*(\xi)\mathrm{d}\xi=\overline{f(x)}.\end{cases}\tag{50.8}$$

如果方程组(50.8)的解 $\varphi(x),\varphi^*(x)$ 满足

$$\varphi^*(x)=\overline{\varphi(x)},$$

则就得到方程(50.7)的解.

定理 50.3.1 Fredholm 定理　对于方程(50.7)有：

(1) 齐次积分方程 $L\varphi=0$(在狭义下)的线性无关解的个数是有限的，而且等于其共轭齐次方程 $L^*\psi=0$ 的线性无关解的个数，记之为 p.

(2) 如果齐次积分方程 $L\varphi=0$ 只有零解，则方程(50.7)对任意的右端项 $f(x)$ 总是惟一可解的.

(3) 如果齐次方程 $L\varphi=0$ 有非零解，则非齐次方程(50.7)当且仅当右端函数 $f(x)$ 满足

$$\mathrm{Re}(f,\Psi^{(j)})=0,\qquad j=1,\cdots,p$$

时才有解，这里 $\psi^{(1)},\cdots,\psi^{(p)}(x)$ 是共轭齐次方程 $L^*\psi=0$ 的所有线性无关解.

51 Cauchy 奇异积分方程

51.1 Cauchy 型积分

定义 51.1.1 设函数 $\varphi(t)$ 定义于简单光滑曲线 L 上. 若对 L 上任意两点 t_1,t_2, 恒有

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqslant A|t_1-t_2|^{\lambda},\qquad 0<\lambda\leqslant 1,$$

这里 A,λ 都是确定的常数,则我们称 $\varphi(t)$ 在 L 上满足 Hölder 条件(Hölder condition);称 A 为 **Hölder 常数**(Hölder constant);λ 为 **Hölder 指数**(Hölder index),记成 $\varphi(t)\in H(\lambda)$.

在本章中所涉及的曲线均为复平面上的简单光滑曲线. 因而,今后简单光滑曲线 L 就简称为曲线 L,其方程为

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),\qquad \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

性质 51.1.2 对曲线 L 上满足 Hölder 条件的函数,有

(1) 若 $\varphi(t)\in H(\lambda)$,则 $\varphi(t)$ 必连续;

(2) 若 $\varphi(t)\in H(\lambda)$,则 $|\varphi(t)|\in H(\lambda)$;

(3) 若 $\varphi(t),\psi(t)$ 均属于 $H(\lambda)$,则 $\varphi(t)\pm\psi(t),\varphi(t)\psi(t),\varphi(t)/\psi(t)$(在此 $\psi(t)\neq 0$) 均属于 $H(\lambda)$;

(4) 若曲线 L 包含在一有界区域内,$\varphi(t)\in H(\lambda)$,则对任何 $0<\mu\leqslant\lambda$,有 $\varphi(t)\in H(\mu)$.

定义 51.1.3 设 $\Phi(z)$ 是一个在不含曲线 L 的任何有界区域内都解析的函数,且当 $z=x+\mathrm{i}y$ 从 L 的任一确定的侧趋于 L 上的任何点 t 时,$\Phi(z)$ 的极限值即边界值存在,而在曲线端点附近满足条件

$$|\Phi(z)| \leqslant B|z-C|^{-\alpha}, \qquad 0<\alpha<1,$$

B 为正常数. 其中 C 是相应的端点. 则称函数 $\Phi(z)$ 是以 L 为跳跃(间断)曲线的分区解析函数(sectionally analytic function).

如果当 $|z|$ 充分大时,分区解析函数 $\Phi(z)$ 有如下展式:

$$\Phi(z)=a_k z^k+a_{k-1} z^{k-1}+\cdots, \qquad a_k \neq 0,$$

则称 $\Phi(z)$ 在无穷远点有有限阶(k 阶).

定义 51.1.4 设 $\varphi(t)$ 为定义在曲线 L 上的复函数,下列积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z} \mathrm{d} \tau, \qquad z \overline{\in} L, \tag{51.1}$$

称为以 $\varphi(t)$ 为**密度**(density)的 Cauchy 型积分(Cauchy type integral).

Cauchy 型积分给出了以 L 为跳跃曲线的分区解析函数. 当 L 包含在有界区域内时,$\Phi(\infty)=0$.

定义 51.1.5 设 t 为曲线 L 上任一异于端点 α,β 的点,以 t 为中心,充分小的 $\varepsilon>0$ 为半径作圆 C_ε 交 L 于 t' 和 t''. 设 l 表示弧 $\overset{\frown}{t't''}$. 如果当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,积分

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} \mathrm{d} \tau$$

有极限,则此极限称为

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t \mathrm{d} \tau}, \qquad t \in L \tag{51.2}$$

的 **Cauchy 积分主值**(Cauchy principal value)或 Cauchy 奇异积分(Cauchy singular integral);而$\frac{1}{\tau-t}$称为 **Cauchy 核**(Cauchy kernel).

定理 51.1.6 设 $\varphi(t) \in H(\lambda)$,则(51.2)的 Cauchy 积分主值存在,且

$$\Phi(t)=-\frac{1}{2} \varphi(t)+\frac{\varphi(t)}{2\pi \mathrm{i}} \ln \frac{t-\beta}{t-\alpha}+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} \mathrm{d} \tau,$$

其中 $\ln\dfrac{t-\beta}{t-\alpha}$ 理解为多值函数 $\ln\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ 在沿 L 剪开的平面上解析，且在无穷远点为零的单值分支靠 L 左侧(相对于曲线的正向而言)在 t 点所取的值.

定理 51.1.7 Сохочкий-Plemelj(萨霍茨基-普莱梅) 定理 设在曲线 L 上 $\varphi(t)\in H(\lambda)(t\in L)$，但不是 L 的端点. 则 Cauchy 型积分(51.1) 的左、右边界值 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 均存在，并且有

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t),$$

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau.$$

定理 51.1.8 Plemeli-Привалов(普莱姆利-普里瓦洛夫) 定理 设在曲线 L 上 $\varphi(t)\in H(\lambda)$，则 Cauchy 型积分(51.1) 的左、右边界值 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 除曲线 L 的端点的任意小邻域外，满足 Hölder 条件 $H(\nu)$，并且当 $\lambda<1$，$\nu=\lambda$；当 $\lambda=1$ 时，$\nu=1-\varepsilon$，ε 为任意小正数.

定理 51.1.9 Poincaré-Bertrand 定理 (Poincaré-Bertrand theorem) 设 $\varphi(t,\tau)$ 定义在 $L\times L$ 上，并对两个变量满足 Hölder 条件

$$|\varphi(t_1,\tau_1)-\varphi(t_2,\tau_2)|\leqslant A[|t_1-t_2|^\lambda+|\tau_1-\tau_2|^\lambda].$$

若 $t\in L$ 但不是 L 的端点，则有

$$\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\mathrm{d}\tau_1=-\pi^2\varphi(t,t)+\int_L\mathrm{d}\tau_1\int_L\frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

51.2 Cauchy 奇异积分方程和奇异算子

定义 51.2.1 设 $A(t)$，$f(t)$ 和 $K(t,\tau)$ 分别在曲线 L 和 $L\times L$ 上满足 Hölder 条件，下列方程

$$K\varphi = A(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \qquad t \in L, \tag{51.3}$$

称为 **Cauchy 奇异积分方程**(singular integral equation with Cauchy kernel);而 K 称为其相应的**奇异算子**(singular operator),这里 $\varphi(t)$ 是未知函数.

(51.3) 式亦可写为

$$K\varphi = A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t), \qquad t \in L, \tag{51.4}$$

其中

$$B(t) = K(t,t),$$
$$k(t,\tau) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\frac{K(t,\tau) - K(t,t)}{\tau - t}.$$

由于 $K(t,\tau)$ 满足 Hölder 条件,所以核 $k(t,\tau)$ 至多为一弱奇性核.

定义 51.2.2 方程

$$K^0\varphi = A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\mathrm{d}\tau = f(t), \quad t \in L, \tag{51.5}$$

称为 Cauchy 奇异积分方程(51.4)的**特征方程**(characteristic equation);而 K^0 称为算子 K 的**特征算子**(characteristic operator);$A(t)$,$B(t)$ 称为特征算子的**系数**(coefficients).

定义 51.2.3 在(51.4)中,若系数 $A(t)$,$B(t)$ 在 L 上满足条件

$$A^2(t) - B^2(t) \neq 0, \qquad t \in L,$$

则算子 K 称为**正规型算子**(singular operator of normal type).

今后所讨论的奇异算子均假定为正规型算子.

定义 51.2.4 设曲线 L 是闭的,定义整数

$$\chi(K) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\ln\frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)}\right]_L,$$

其中,$[\ ]_L$ 表示当 t 沿 L 正向(对于闭曲线 L,规定其正向为沿 L 运

动时，L 所围的区域始终在 L 的左侧）绕曲线一周时，括号中的函数的增量. $\chi(K)$ 称为 Cauchy 奇异积分算子 K 的指标（index of the singular operator K）.

性质 奇异算子 K 有以下基本性质：

（1）若 $\varphi(t) \in H(\lambda)$，则 $K\varphi \in H(\nu)$，$\nu = \begin{cases} \lambda, & \lambda < 1, \\ 1-\varepsilon, & \lambda = 1. \end{cases}$

（2）若 K_1, K_2 为两个奇异算子，则乘积 $K_3 = K_1 K_2$ 也是一奇异算子. 但一般不成立 $K_1 K_2 = K_2 K_1$.

（3）$(K_1 K_2) K_3 = K_1 (K_2 K_3)$.

（4）$\chi(K) = \chi(K^0)$.

（5）$\chi(K_1 K_2) = \chi(K_1) + \chi(K_2)$.

定义 51.2.5 方程

$$K'\psi = A(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{K(\tau,t)}{\tau - t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau = g(t), \quad t \in L, \tag{51.6}$$

称为方程（51.3）的相连方程（associated singular integral equation）；而奇异算子 K' 称为 K 的相连算子（associated singular operator）.

相连算子 K 与 K' 之间有如下关系：

（1）$\chi(K) = -\chi(K')$.

（2）$(K_1 K_2)' = K_2' K_1'$.

（3）对任何 $\varphi, \psi \in H(\lambda)$，有 $\int_L \psi K\varphi \mathrm{d}t = \int_L \varphi K'\psi \mathrm{d}t$.

定义 51.2.6 下列在 Cauchy 主值意义下存在的积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot\frac{\sigma - s}{2}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi, \tag{51.7}$$

称为 **Hilbert 奇异积分**（Hilbert singular integral）；而 $\cot\frac{\sigma - s}{2}$ 称为 **Hilbert 核**（Hilbert kernel）.

定义 51.2.7 下列方程

$$A(s)\varphi(s)+\frac{B(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cot\frac{\sigma-s}{2}\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma+\int_0^{2\pi}k(s,\sigma)\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma$$

$$=f(s),\qquad 0\leqslant s\leqslant 2\pi, \tag{51.8}$$

称为 **Hilbert 奇异积分方程**(singular integral equation with Hilbert kernel).

Cauchy 核与 Hilbert 核之间存在简单关系. 设 L 是具有连续曲率的简单光滑闭曲线,其参数方程为

$$t=t(s)=x(s)+\mathrm{i}y(s),\qquad 0\leqslant s\leqslant 2\pi.$$

不失一般性,设 s 为弧长参数. 设 τ 是 L 上任一点,则有一参数值 σ,使 $\tau=t(\sigma)$,于是有

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2}\cot\frac{\sigma-s}{2}\mathrm{d}\sigma+P(s,\sigma)\mathrm{d}\sigma, \tag{51.9}$$

其中 $P(s,\sigma)$ 为其变量的连续函数. 由此关系可把 Hilbert 奇异方程转化为 Cauchy 积分方程来研究.

51.3 Cauchy 奇异积分方程的解法 —— 化归为 Riemann 边值问题的解法

定义 51.3.1 寻求以闭曲线 L 为跳跃曲线,左侧和右侧边界值满足条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\qquad t\in L \tag{51.10}$$

的分区解析函数的问题称为 Riemann 边值问题(Riemann boundary value problem);这里 $G(t)$,$g(t)$ 是在 L 上满足 Hölder 条件的已知函数,并且在 L 上处处有 $G(t)\neq 0$.

定义 51.3.2 整数 $\chi=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\ln G(t)]_L$ 称为 **Riemann 边值问题**(51.10) **的指数**(index of the Riemann boundary problem).

先考虑齐次 Riemann 边值问题,即(51.10) 中 $g(t)\equiv 0(t\in L)$

的情形. 设闭曲线 L 分复平面为 L 的内部区域 D^+ 和外部区域 D^-.

定义 51.3.3 分区解析函数

$$X(z)=\begin{cases}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^+,\\ z^{-\chi}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^-,\end{cases} \tag{51.11}$$

其中

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln(\tau^{-\chi}G(\tau))}{\tau-z}d\tau,$$

称为齐次 Riemann 边值问题的**典则解**(fundamental solution).

当 $\chi\geqslant 0$ 时, $X(z)$ 是齐次 Riemann 边值问题的一个特解, 它在无穷远点有 χ 阶零点. 这时, 齐次 Riemann 边值问题的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P(z), \tag{51.12}$$

其中 $P(z)$ 是 z 的任意多项式, 它的次数由分区解析函数 $\Phi(z)$ 在无穷远处的阶决定.

齐次 Riemann 边值问题在无穷远点处等于零的解对于 Cauchy 奇异积分方程的求解具有特别意义. 对此, 有如下结论.

定理 51.3.4 如果 $\chi\leqslant 0$, 则齐次 Riemann 边值问题不存在在无穷远处为零的解; 如果 $\chi>0$, 则该问题在无穷远处为零的一般解为

$$\Phi(z)=X(z)P_{\chi-1}(z), \tag{51.13}$$

其中 $P_{\chi-1}(z)$ 是 z 的 $\chi-1$ 次多项式.

下面讨论非齐次 Riemann 边值问题(51.10), 一般解为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)}+X(z)P(z), \tag{51.14}$$

其中 $X(z)$ 如(51.11), $P(z)$ 为任一多项式.

对于非齐次问题(51.10) 在无穷远处为零的解, 有如下结论.

定理 51.3.5 若 $\chi\geqslant 0$, 则(51.10) 在无穷远处为零的一般解为

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} + X(z)P_{\chi-1}(z). \quad (51.15)$$

当 $\chi = 0$ 时，规定 $P_{\chi-1}(z) \equiv 0$；若 $\chi < 0$，则存在在无穷远处为零的解的充要条件是 $g(t)$ 满足

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^n d\tau = 0, \qquad n = 0,1,\cdots,\chi - 1.$$

当此条件满足时，(51.10) 有惟一解

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)}. \quad (51.16)$$

特征方程(51.5) 可以化为 Riemann 边值问题来求解. 设曲线 L 是闭的，并且(51.5) 有解 $\varphi(t) \in H(\lambda)$. 考虑如下的 Cauchy 型积分：

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \qquad \bar{z} \in L,$$

则由定理 51.1.6，求解(51.5) 和求下列 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t) = \frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)}\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{A(t) + B(t)}, \quad t \in L \quad (51.17)$$

在无穷远处为零的解是等价的.

显然，方程(51.5) 的指数与 Riemann 问题(51.17) 的指数是相同的. 由定理 51.3.5，当 $\chi \geqslant 0$ 时，边值问题(51.17) 在无穷远处为零的一般解为

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{[A(\tau) + B(\tau)]X^+(\tau)(\tau - z)} + X(z)P_{\chi-1}(z). \quad (51.18)$$

由此，可求得(51.5) 的解

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \\ &= A_0(t)f(t) - \frac{z(t)B_0(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{z(\tau)(\tau - t)} \\ &\quad + B_0(t)z(t)P_{\chi-1}(t),\end{aligned} \quad (51.19)$$

其中

$$A_0(t)=\frac{A(t)}{A^2(t)-B^2(t)},\qquad B_0(t)=\frac{B(t)}{A^2(t)-B^2(t)},$$

$$z(t)=t^{-\frac{\chi}{2}}\sqrt{A^2(t)-B^2(t)}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mathrm{Ln}\left[\tau^{-\chi}\dfrac{A(\tau)-B(\tau)}{A(\tau)+B(\tau)}\right]}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right\},$$

当 $\chi=0$ 时，$P_{\chi-1}(z)\equiv 0$.

当 $\chi<0$ 时，由定理 51.3.5 知方程(51.5)有解的充要条件为

$$\int_L\frac{f(\tau)\tau^n\mathrm{d}\tau}{[A(\tau)+B(\tau)]X^+(\tau)}=\int_L\frac{f(\tau)\tau^n\mathrm{d}\tau}{z(\tau)}=0,\quad n=0,1,\cdots,\chi-1.$$

当此条件满足时，方程(51.5)有惟一解，它可在(51.19)中令 $P_{\chi-1}(t)\equiv 0$ 而得到.

对于齐次方程，有以下结论：

(1) 如果 $\chi>0$，则齐次方程 $K^0\varphi=0$ 恰有 χ 个线性无关的解

$$\varphi_k(t)=\frac{B(t)z(t)}{A^2(t)-B^2(t)}t^k,\qquad k=0,1,\cdots,\chi-1. \tag{51.20}$$

(2) 如果 $\chi\leqslant 0$，则 $K^0\varphi=0$ 没有非零解. 对于相连方程 $K^{0\prime}\psi=0$，有结论：

① 如果 $\chi<0$，则 $K^{0\prime}\psi=0$ 恰有 $|\chi|$ 个线性无关解

$$\psi_k(t)=\frac{t^k}{z(t)},\qquad k=0,1,\cdots,-\chi-1. \tag{51.21}$$

② 如果 $\chi\geqslant 0$，则 $K^{0\prime}\psi=0$ 没有非零解. 利用特征方程(51.5)的解，可有如下的 Cauchy 反演公式(Cauchy inversion formula)：

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=f(t), \tag{51.22}$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau. \tag{51.23}$$

51.4　Cauchy 奇异积分方程的解法 —— 正则化方法

定义 51.4.1　若对奇异算子 K_2，存在奇异算子 K_1，使得 $K_1K_2\varphi = 0$ 成为 Fredholm 方程，则称 K_1 为 K_2 的正则化算子(regularizer).

定理 51.4.2　K_1 为 K_2 的正则化算子的充要条件是它们的特征算子的系数 $A_j(t), B_j(t)(j = 1,2)$ 满足

$$A_1(t)B_2(t) + A_2(t)B_1(t) = 0, \qquad t \in L.$$

对于已知的奇异算子 K_2，可根据上述条件来具体求出正则化算子 K_1. 显然，可以直接验证，算子 $K^{0\prime}$ 和 $K^{\prime 0}$ 都是算子 K 的正则化算子. 此外，若 K_1 是 K_2 的正则化算子，则 K_2 也是 K_1 的正则化算子. 互为正则化算子的两个奇异算子的指数绝对值相等而符号相反.

设奇异算子 $\widetilde{K}$ 是奇异算子 K 的一个正则化算子，将 $\widetilde{K}$ 作用于式(51.4) 两端，就得到一个第二类 Fredholm 积分方程：

$$\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}f, \qquad t \in L. \tag{51.24}$$

显然，式(51.4) 的任一解均是(51.24) 的解，但反过来不一定成立. 但如果我们找出(51.24) 的所有解，则(51.4) 的所有解也可找到. 对于这两个方程的关系，有 Bekya(维库阿) 等价性定理.

定理 51.4.3　Bekya 定理　Cauchy 奇异积分方程(51.4) 恒存在一个在一定意义下与其等价的第二类 Fredholm 积分方程.

这种用正则化算子把奇异积分方程化为 Fredholm 积分方程求解的方法，称为**正则化方法**(regularizing technique). 一般常用 $K^{0\prime}$ 和 $K^{\prime 0}$ 来求解.

解　考虑方程(51.5) 中 $A(t) = a, B(t) = b$ 均为常数的情形. 方程转化为

$$a\,\varphi(t)+\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau=f(t),\qquad t\in L,\qquad(51.25)$$

这里 L 为闭曲线.

将算子 $K'^0\psi=a\,\psi(t)-\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau$ 作用到(51.25)两端,得到

$$\begin{aligned}&a\left[a\varphi(t)+\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right]\\&-\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau-t}\left[a\varphi(\tau)+\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-\tau}\mathrm{d}\tau_1\right]\\=&\,af(t)-\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

应用定理 51.1.8,得

$$(a^2-b^2)\varphi(t)=af(t)-\frac{b}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau,$$

因此,方程(51.25)的解为

$$\varphi(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{(a^2-b^2)\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau.$$

51.5 Cauchy 奇异积分方程的基本定理

定理 51.5.1 Noether(E. 诺特)定理

(1) Cauchy 奇异积分方程(51.3)的齐次方程

$$K\varphi=A(t)\cdot\varphi(t)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=0,\qquad t\in L$$

只有有限个线性无关的解.

(2) 方程(51.3)有解的充要条件是

$$\int_L f(t)\psi_j(t)\mathrm{d}t=0,\qquad j=1,2,\cdots,k',$$

其中 $\psi_j(t)$ 为相连齐次方程 $K'\psi=0$ 的解.

(3) 设 χ 是奇异算子 K 的指数,又 k,k' 分别为齐次方程

$K\varphi = 0$ 与相连齐次方程 $K'\psi = 0$ 的线性无关解的个数，则 $k - k' = \chi$.

注 51.5.2 (1) 对于 Cauchy 奇异积分方程组

$$\sum_{j=1}^{n} A_{kj}(t)\varphi_j(t) + \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_L \sum_{j=1}^{n} \frac{K_{kj}(t,\tau)}{\tau - t}\varphi_j(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= f_k(t), \qquad k = 1,2,\cdots,n,\ t \in L. \tag{51.26}$$

当 $\det[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)] \neq 0, \det[\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{B}(t)] \neq 0, t \in L$ 时，Noether 定理仍成立. 方程(51.26) 的指标为

$$\chi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\{\ln[\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})] - \ln[\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})]\}_L,$$

其中 $\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{K}(t,\tau)$ 分别是矩阵 $(A_{kj}(t))$，$(K_{kj}(t,\tau))$，而 $\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{K}(t,\tau)$.

(2) 对第二类 Fredholm 方程而言，复平面上任一点 λ 或者为它的特征值，或者为它的正则值，并且复平面上任何有限点都不是它的特征值的极限点. 对奇异算子 K，情况却不同. 曲线 $A(t) + \lambda B(t) = 0$ 或 $A(t) - \lambda B(t) = 0$ 上的点都是 K 的谱点，并且它的每一有限点 λ 就是谱点的极限点.

52 Wiener-Hopf 积分方程

52.1 函数的因子分解

引入函数空间 $L^2(-\infty,+\infty)$ 的两个子空间 L_+^2 和 L_-^2 如下：

$$L_\pm^2=\{\varphi\in L^2(-\infty,+\infty):F(\varphi)=0,S\gtrless 0\},\qquad(52.1)$$

其中 $F(\varphi)$ 为函数 φ 的 Fourier 变换

$$F(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\varphi(x)\mathrm{d}x.\qquad(52.2)$$

空间 $L^2(-\infty,+\infty)$ 为子空间 L_+^2 与 L_-^2 的直和，即

$$L^2(-\infty,+\infty)=L_+^2\oplus L_-^2.\qquad(52.3)$$

对任给的函数 $\varphi\in L^2(-\infty,+\infty)$，引入两个新函数 $\varphi_+(x)$ 和 $\varphi_-(x)$ 如下：

$$\varphi_\pm(x)=\frac{1}{2}[\varphi\pm\mathrm{i}\,H(\varphi)],\qquad(52.4)$$

其中 $H(\varphi)$ 为 φ 的 Hilbert 变换

$$H(\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{x-y}\mathrm{d}y.\qquad(52.5)$$

性质 对 Hilbert 变换，下述关系成立：

(1) $H(H(\varphi))=-\varphi$;

(2) $H^{-1}(\varphi)=-H(\varphi)$;

(3) $F(H(\varphi))=\mathrm{i}\ \mathrm{sgn}\,sF(\varphi)$.

因此，关于 $\varphi_\pm(x)$ 有下述关系

$$F(\varphi_+)=\begin{cases}0, & s>0,\\ F(\varphi), & s<0,\end{cases}\qquad(52.6)$$

$$F(\varphi_-) = \begin{cases} F(\varphi), & s > 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases} \tag{52.7}$$

故 $\varphi_\pm \in L^2_\pm$. 这样,对任一函数 $\varphi \in L^2(-\infty, +\infty)$,可把 φ 惟一地分解为

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-. \tag{52.8}$$

例 52.1.1 求解积分方程

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{x-y}\mathrm{d}y = f(x),$$

其中 $f(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$.

解 由(52.4)及(52.8),可把原方程写成

$$\varphi_+ + \varphi_- + \mathrm{i}\,\lambda(\varphi_+ - \varphi_-) = f_+ + f_-,$$

或

$$(1+\mathrm{i}\,\lambda)\varphi_+ - f_+ = -(1-\mathrm{i}\,\lambda)\varphi_- + f_-.$$

利用(52.3)得

$$(1+\mathrm{i}\,\lambda)\varphi_+ - f_+ = 0,$$
$$(1-\mathrm{i}\,\lambda)\varphi_- - f_- = 0.$$

当 $\lambda \neq \pm\mathrm{i}$ 时,求得原方程的解

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{f + \lambda H(f)}{1+\lambda^2}.$$

定理 52.1.2 设 $\varphi(x) \in L^2_+$. 若有界函数 $a(z)(z = x+\mathrm{i}y)$,当 $y > 0$ 时解析,当 $y \geqslant 0$ 时连续,则 $a(x)\varphi(x) \in L^2_+$;又若 $a(z)$ 在上半平面($y > 0$),$z = \zeta(\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta)$ 处有一 n 阶极点,则对适当的常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,有

$$a(x)\varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(x-\xi)^k} \in L^2_+.$$

对 L^2_- 也有类似的结论.

Cauchy 型积分

$$q(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\mathrm{d}\tau \tag{52.9}$$

定义了一个以实轴($y=0$)为跳跃曲线的分区解析函数 $q(z)$，并且其左、右边界值(曲线正向沿 x 轴正方向)可由(52.7)给出如下：

$$\begin{cases} q^{+}(x)+q^{-}(x)=\mathrm{i}H(\varphi), \\ q^{+}(x)-q^{-}(x)=\varphi(x). \end{cases} \tag{52.10}$$

此外，对于 $q^{+}(x)$ 与 $q^{-}(x)$ 有

$$F(q^{+}(x))=\begin{cases} 0, & s>0, \\ F(\varphi), & s<0, \end{cases} \tag{52.11}$$

$$F(q^{-}(x))=\begin{cases} -F(\varphi), & s>0, \\ 0, & s<0. \end{cases} \tag{52.12}$$

因此 $q^{\pm}(x)\in L_{\pm}^{2}$.

下面给出函数的另一种因子分解.

定理 52.1.3 设 $p(x)$ 满足

$$\lim_{|x|\to\infty} p(x)=1,\quad \lim_{x\to\infty}\ln p(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\ln p(x)=0,$$

且 $\ln p(x)\in L^{2}(-\infty,+\infty)$. 则必存在一有界函数 $q(z)$ 当 $y\neq 0$ 时为解析的，并使得

$$p(x)=q^{-}(x)/q^{+}(x), \tag{52.13}$$

其中 $q^{\pm}(x)=\lim\limits_{y\to 0^{\pm}} q(z)$ 分别为 $q(z)$ 在 $y=0$ 上的左、右边界值.

证明 在(52.9)中取 $\varphi(x)=-\ln p(x)$，则可定义 $q^{+}(x)$ 和 $q^{-}(x)$ 如下：

$$\begin{aligned} &-\ln p(x)=\ln q^{+}-\ln q^{-}, \\ &-\mathrm{i}\,H(\ln p)=\ln q^{+}+\ln q^{-}, \\ &\ln q(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-\ln p(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{52.14}$$

由关于 $\ln p(x)$ 的假设，(52.14)定义了这样一个分区解析函数 $\ln q(z)$，其边界值为

$$q^{\pm}(x) = \exp\frac{1}{2}\{-\mathrm{i}H(\ln p) \mp \ln p\}, \qquad (52.15)$$

从而(52.13)得证.

例 52.1.4 求函数

$$p(x) = \frac{x^2 + a^2}{x^2 + 1}, \qquad \mathrm{Re}\, a > 0$$

的形如(52.13)的因子分解.

解 显然所给的函数 $p(x)$ 满足定理 52.1.3 的条件，由性质有

$$F(H(\ln p)) = \mathrm{i}\ \mathrm{sgn}\, sF(\ln p).$$

而

$$F(\ln p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{x^2+a^2}{x^2+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx}\mathrm{d}x$$

$$= \sqrt{2\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-|s|} - \mathrm{e}^{-a|s|}}{s}\mathrm{sgn}\, s,$$

故得

$$F(H(\ln p)) = \mathrm{i}\sqrt{2\pi}\,(\mathrm{e}^{-|s|} - \mathrm{e}^{-a|s|})/s.$$

上式两端取 Fourier 逆变换得

$$H(\ln p) = 2\left(\arctan\frac{a}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right),$$

于是由(52.15)得

$$q^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}H(\ln p)\right\} = \frac{x+\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}a},$$

$$q^{-}(x) = \sqrt{p(x)}\exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}H(\ln p)\right\} = \frac{x-\mathrm{i}a}{x-\mathrm{i}}.$$

52.2 Wiener-Hopf 方法

本节讨论下列 Wiener-Hopf 方程

$$\varphi(x)-\int_0^{\infty}K(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x),\qquad f(x)\in L^2[0,\infty)$$

(52.16)

的求解问题.

定义 52.2.1 整数$n=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\ln(1-\sqrt{2\pi}F^{-1}(k))]_{-\infty}^{+\infty}$,称为方程(52.16)的**指数**(index of the Wiener-Hopf integral equation). 这里$F^{-1}(K)$表示核K的Fourier逆变换,而$[\cdot]_{-\infty}^{+\infty}$表示自变量$x$从$-\infty$变到$+\infty$时,括号中的函数的增量.

我们分3种情况,即$n=0$,$n<0$,$n>0$来讨论. 首先讨论$n=0$的情形. 令

$$\varphi(x)=f(x)=0,\qquad x<0 \tag{52.17}$$

$$g(x)=\begin{cases}-\int_0^{\infty}K(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y, & x<0,\\ 0, & x>0,\end{cases} \tag{52.18}$$

则可以把方程(52.16)扩充到$(-\infty,+\infty)$上为

$$\varphi(x)-\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x)+g(x). \tag{52.19}$$

设$K(x)\in L^2(-\infty,+\infty)$,并假定$\varphi$,$g$都属于$L^2(-\infty,+\infty)$. 此外还假定$\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x)|\mathrm{d}x<\infty$,则对(52.19)两端取Fourier变换并利用卷积公式得

$$F^*(\varphi)-\sqrt{2\pi}F^*(K)F^*(\varphi)=F^*(f)+F^*(g),$$

或写成

$$p(s)F^*(\varphi)-F^*(f)=F^*(g), \tag{52.20}$$

其中$p(s)=1-\sqrt{2\pi}F^*(K)$,$F^*(\cdot)=F^{-1}(\cdot)$.

由(52.17)和(52.18)知,$F^*(\varphi)$,$F^*(f)$均属于L_-^2,而$F^*(g)\in L_+^2$. 所以(52.20)可写成

$$p(s)F_-^*(\varphi)-F_-^*(f)=F_+^*(g). \tag{52.21}$$

利用关于 K 的假定和 Riemann-Lebesgue 定理得

$$\lim_{|s|\to\infty} F^*(K) = 0,$$

所以，我们可以定义 $\ln p(s)$ 使得下式成立：

$$\lim_{|s|\to\infty} p(s) = 1, \qquad \lim_{s\to\infty} \ln p(s) = 0, \qquad \lim_{s\to-\infty} \ln p(s) = 2n\pi\mathrm{i}. \tag{52.22}$$

但已设 $n=0$，故由定理 52.1.3 得

$$p(s) = q^-(s)/q^+(s), \tag{52.23}$$

其中 $q^{\pm}(s)$ 由(52.15)给出. 将(52.23)代入(52.21)得

$$q^- F_-^*(\varphi) - q^+ F_-^*(f) = q^+ F_+^*(g).$$

对于已知函数 $q^+ F_-^*(f)$ 进行 52.1 节中的分解，上述方程可化成

$$q^- F_-^*(\varphi) - (q^+ F_-^*(f))_- = (q^+ F_-^*(f))_+ + q^+ F_+^*(g).$$

由定理 52.1.2，上式左右两端均为零，

$$q^- F_-^*(\varphi) - (q^+ F_-^*(f))_- = 0,$$

$$(q^+ F_-^*(f))_+ + q^+ F_+^*(g) = 0,$$

即 $F_-^*(\varphi) = (q^+ F_-^*(f))_- / q^-$. 但因 $F_-^*(\varphi) = F^*(\varphi)$，$F_-^*(f) = F^*(f)$，最后得到

$$\varphi = F\left(\frac{(q^+ F^*(f))_-}{q^-}\right). \tag{52.24}$$

这一解是方程(52.16)在 $n=0$ 时的惟一解.

例 52.2.2 求解方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-|x-y|}\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x).$$

解 $K(x-y) = \lambda\mathrm{e}^{-|x-y|}$, $\qquad F^*(K) = \dfrac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}(1+s^2)}$,

代入前面的式子，$p(s) = \dfrac{s^2+a^2}{s^2+1}$，$a^2 = 1-2\lambda$. 当 $\mathrm{Re}\,(a) > 0$，即 $\lambda \notin \left[\dfrac{1}{2}, -\infty\right)$ 时，由例 52.1.4 得

$$p(s) = q^-(s)/q^+(s),$$

其中

$$q^-(s) = (s - \mathrm{i}\, a)/(s - \mathrm{i}),$$
$$q^+(s) = (s + \mathrm{i})/(s + \mathrm{i}\, a).$$

最后,求得方程的解为

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|} f(y)\mathrm{d}y$$
$$+ \frac{\lambda(\sqrt{1-2\lambda}-1)}{1-2\lambda+\sqrt{1-2\lambda}}\mathrm{e}^{-\sqrt{1-2\lambda}\,x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{1-2\lambda}\,y} f(y)\mathrm{d}y, \qquad x > 0.$$

下面我们来考虑指数 $n < 0$ 时方程(52.16)的情形.

(1) 考虑齐次 Wiener-Hopf 积分方程

$$\varphi(x) - \int_0^\infty K(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y = 0. \qquad (52.25)$$

此时(52.21)变为

$$p(s)F_-^*(\varphi) = F_+^*(g).$$

由于(52.22)及 $n < 0$,故不能直接应用定理 52.1.3.

引入函数

$$\tau(s) = (s - \mathrm{i})/(s + \mathrm{i}). \qquad (52.26)$$

容易证明 $\tau^n(s)p(s)$ 满足定理 52.1.3 的条件,故可以把它分解成 $q^-(s)/q^+(s)$ 的形式. 从而得到

$$q^-(s)F_-^*(\varphi) = \tau^n(s)q^+(s)F_+^*(g). \qquad (52.27)$$

当 $n < 0$ 时,$\tau^n(s)$ 在上半平面有一个 $|n|$ 阶极点. 但由定理 52.1.2,可适当选取常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{|n|}$,使下式

$$q^-(s)F_-^*(\varphi) - \sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-\mathrm{i})^k} = \tau^n(s)q^+(s)F_+^*(g) - \sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-\mathrm{i})^k}$$

的右端属于 L_+^2,并且左端属于 L_-^2. 从而可得到

$$F_-^*(\varphi) = \frac{1}{q^-(s)}\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-\mathrm{i})^k},$$

$$\varphi(x) = F\left[\frac{1}{q^-(s)}\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-\mathrm{i})^k}\right]. \tag{52.28}$$

显然，当 $n<0$ 时，齐次方程(52.25)有 $|n|$ 个线性无关的解.

(2) 非齐次方程的情形

在(52.20)两端乘以 $\tau^n(s)$，并将 $\tau^n(s)p(s)$ 分解成 $q^-(s)/q^+(s)$ 的形式. 则(52.20)成为

$$q^-(s)F_-^*(\varphi) - \tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f) = \tau^n(s)q^+(s)F_+^*(g). \tag{52.29}$$

上式两端同时减去 $\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-\mathrm{i})^k}$，并将 $\tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f)$ 分解成两项之和，得

$$q^-(s)F_-^*(\varphi) - (\tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f))_- - \sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-\mathrm{i})^k}$$

$$= (\tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f))_+ + \tau^n(s)q^+(s)F_+^*(g) - \sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-\mathrm{i})^k}.$$

适当选取常数 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,|n|)$，可使上式左端属于 L_-^2，右端属于 L_+^2. 故求得

$$\varphi = F\left\{\frac{1}{q^-(s)}\left[(\tau^n(s)q^+(s)F_-^*(f))_- + \sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-\mathrm{i})^k}\right]\right\}. \tag{52.30}$$

因此，当 $n<0$ 时，非齐次方程有解，但不惟一.

我们再来考虑 $n>0$ 的情形：

(1) 齐次方程的情形，当 $n>0$ 时，$\tau^n(s)$ 在上半平面内解析，因而(52.27)左端属于 L_-^2，右端属于 L_+^2. 从而得 $F^*(\varphi)=0$，即 $\varphi=0$. 即齐次方程(52.25)当 $n>0$ 时只有零解.

(2) 非齐次方程的情形，(52.16)有解的充要条件是其自由项 $f(x)$ 与(52.16)的共轭齐次方程

$$\psi(x) - \int_0^\infty \overline{K(y-x)}\varphi(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{52.31}$$

的每一解 $\psi(x) \in L^2[0,\infty)$ 相正交. 此时非齐次方程有惟一解

$$\varphi(x) = F\left\{\frac{1}{q^-(s)}[\tau^n(s)q^+(s)F^*(f)]_-\right\}. \qquad (52.32)$$

52.3 Wiener-Hopf 积分方程的基本定理

设 Wiener-Hopf 方程(52.16) 的核 $K(x-y)$ 满足下列条件:

$$p(s) = 1 - \sqrt{2\pi}F^*(K) \neq 0, \qquad -\infty < s < \infty,$$

则有如下的基本定理.

定理 52.3.1 Noether 定理

(1) 齐次方程(52.25) 和与之相应的共轭齐次方程(52.31) 在 $L^2[0,\infty)$ 中只有有限个线性无关的解.

(2) 非齐次方程(52.16) 在 $L^2[0,\infty)$ 中有解的充要条件是自由项 $f(x)$ 满足

$$\int_0^\infty f(x)\psi_i(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,|n|,$$

其中 $\psi_i(i = 1,2,\cdots,|n|)$ 是(52.31) 的所有线性无关解. 当(52.16) 的指数 $n < 0$ 时,方程对任意 $f(x) \in L^2[0,\infty)$ 都可解.

(3) 设 l,l' 分别表示齐次方程(52.25) 和(52.31) 在 $L^2[0,\infty)$ 中线性无关解的个数,则 $l - l' = n$.

注 52.3.2 (1) 关于 Wiener-Hopf 方程的 Noether 理论同样适用于 Wiener-Hopf 方程组.

(2) 曲线 $\lambda = \sqrt{2\pi}F(K(x))(-\infty < x < +\infty)$ 上的任何一点都是 Wiener-Hopf 方程的谱点,并且也是其谱集的有限极限点. 这和 Fredholm 方程是不同的.

53 非线性积分方程

53.1 Fredholm 型非线性积分方程

考虑下列 Fredholm 型非线性积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b F[x,y,\varphi(y)]\mathrm{d}y, \tag{53.1}$$

其中 λ 是参数，$\varphi(x)$ 是变量 $x \in [a,b]$ 的未知函数.

定理 53.1.1 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的实连续函数，$F(x,y,u)$ 是 $x,y \in [a,b]$ 和 $u \in [p,q]$ 的连续函数，关于 u 满足 Lipschitz 条件：

$$|F(x,y,u_1) - F(x,y,u_2)| \leqslant k|u_1 - u_2|,$$

其中 p,q 及 $k>0$ 均为常数. 此时存在常数 m_1,m_2 及 $M>0$，使 $m_1 \leqslant f(x) \leqslant m_2$，及 $|F(x,y,u)| \leqslant M$，不妨设 $p < m_1 \leqslant m_2 < q$. 则当参数 λ 适合条件

$$|\lambda| \leqslant \min\left[\frac{m_1 - p}{M(b-a)}, \frac{q - m_2}{M(b-a)}, \frac{1}{k(b-a)}\right]$$

时，方程(53.1)有惟一连续解，这个解可用逐次逼近法求出：

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_a^b F[x,y,\varphi_{n-1}(y)]\mathrm{d}y, \qquad n \geqslant 1,$$

并且函数列$\{\varphi_n(x)\}$绝对一致收敛到方程(53.1)的解.

53.2 Volterra 型非线性积分方程

考虑如下 Volterra 型非线性积分方程：

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x F[x,y,\varphi(y)]\mathrm{d}y. \tag{53.2}$$

定理 53.2.1 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的已知实连续函数，$F(x,y,u)$ 是 $x,y\in[a,b]$ 和 $u\in[p,q]$ 的连续函数，且关于 u 满足 Lipschitz 条件. 这里 p,q 为常数，则存在常数 m_1, m_2 及 $M>0$，使 $m_1\leqslant f(x)\leqslant m_2$，$|F(x,y,u)|\leqslant M$，不妨设 $p<m_1\leqslant m_2<q$. 则当 λ 满足条件

$$|\lambda|\leqslant \min\left[\frac{m_1-p}{M(b-a)},\frac{q-m_2}{M(b-a)}\right]$$

时，方程(53.2)有惟一连续解. 可由如下迭代得到

$$\varphi_0(x)=f(x),$$

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x F[x,y,\varphi_{n-1}(y)]\mathrm{d}y,\qquad n\geqslant 1,$$

且 $\{\varphi_n(x)\}$ 绝对一致收敛到(53.2)的解.

例 53.2.2 求解积分方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^x\{1+[\varphi(y)]^2\}\mathrm{d}y.$$

解 逼近法可求出

$$\varphi_0(x)=0,$$

$$\varphi_1(x)=\lambda x,$$

$$\varphi_2(x)=\lambda x+\frac{\lambda^3}{3}x^3,$$

$$\varphi_3(x)=\lambda x+\frac{1}{3}(\lambda x)^3+\frac{1}{3\times 5}(\lambda x)^5+\frac{1}{7\times 9}(\lambda x)^7,$$

$$\cdots$$

另外，也可用初等方法求出其精确解为

$$\varphi(x)=\tan(\lambda x).$$

53.3 Hammerstein 型非线性积分方程

在非线性积分方程中,研究较多的是下列的 **Hammerstein**(哈默斯坦)**型积分方程**(integral equation of the Hammerstein type)

$$\varphi(x)=\int_0^1 K(x,y)F[y,\varphi(y)]\mathrm{d}y,\qquad x\in[0,1],\qquad (53.3)$$

其中 $K(x,y)$, $F(y,u)$ 为已知函数.

定理 53.3.1 设核 $K(x,y)$ 是连续实对称正核, $F(x,u)$ 连续并满足如下条件:

(1) 存在 $p\geqslant 2$, $a(x)\geqslant 0$, $a(x)\in L^q$, $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, $b>0$,使得

$$|F(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-1}.$$

(2) 存在 $0<\gamma<2$, $b(x)\in L^{2/\gamma}$, $c(x)\in L^2$, $0\leqslant a<\lambda_1$, 使得

$$\int_0^u F(x,u)\mathrm{d}v\leqslant \frac{a}{2}u^2+b(x)|u|^{2-\gamma}+c(x),$$

其中 λ_1 是积分算子 $K\varphi=\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$ 的最小特征值. 则方程(53.3) 在 L^p 中至少有一解.

定理 53.3.2 设核 $k(x,y)$ 为连续实对称正核, $F(x,u)$ 连续,并且存在 $0<\gamma<1$, $b(x)\in L^{2/\gamma}$, $c(x)\in L^2$ 及 $0\leqslant a<\lambda_1$ (λ_1 同上),使

$$|F(x,u)|\leqslant a|u|+b(x)|u|^{1-\gamma}+c(x).$$

则(53.3) 在 L^2 中至少有一解.

定理 53.3.3 如果对任何固定的 $x\in[0,1]$, $F(x,u)$ 是 u 的非减函数,则(53.3) 至多有一解.

定义 53.3.4 设 λ_0 为实数,如果对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在实数

λ 及函数 φ,满足积分方程(53.3),使得 $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$, $0<\|\varphi\|<\varepsilon$, $\|\varphi\|$ 表示在所属空间的模. 则称 λ_0 是方程(53.3) 的歧点(bifurcation point).

定理 53.3.5 设核 $K(x,y)$ 为实对称连续核,λ_0 是 $K(x,y)$ 的线性算子 $K\varphi=\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$ 的特征值. 又设(53.3) 中的 $F(x,u)$ 满足 $F(x,0)\equiv 0$, $F(x,u)$ 关于 u k 阶连续可微($k\geqslant 3$ 为奇数),且

$$\frac{\partial F(x,0)}{\partial u}\equiv 1,\qquad \frac{\partial^2 F(x,0)}{\partial u^2}\equiv\cdots\equiv\frac{\partial^{k-1}F(x,0)}{\partial u^{k-1}}\equiv 0,$$

对任给的 $x\in[0,1]$, $\dfrac{\partial^k F(x,0)}{\partial u^k}\neq 0$,令

$$g(x)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k F(x,0)}{\partial u^k},\qquad x\in[0,1],$$

则有如下结论:

(1) 若 λ_0 是 K 的奇数重特征值,$g(x)<0$, $x\in[0,1]$,则 λ_0 是(53.3) 的歧点,且存在 $\varepsilon>0$, $\delta>0$,使得对任给 $\lambda\in(\lambda_0,\lambda_0+\delta)$,都存在 φ_λ, $0<\|\varphi_\lambda\|<\varepsilon$,满足

$$\varphi_\lambda(x)=\lambda\int_0^1 K(x,y)F[y,\varphi_\lambda(y)]\mathrm{d}y. \tag{53.4}$$

(2) 若 λ_0 是 k 的奇数重特征值,$g(x)>0$, $x\in[0,1]$. 则 λ_0 是(53.3) 的歧点,并且存在 $\varepsilon>0$, $\delta>0$,使得对任给 $\lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0)$,都存在 φ_λ, $0<\|\varphi\|<\varepsilon$,满足(53.4).

(3) 若 λ_0 是 K 的偶数重特征值,$g(x)>0$, $x\in[0,1]$,则 λ_0 是(53.3) 的歧点,并且存在 $\varepsilon>0$, $\delta>0$,使得对任给 $\lambda\in(\lambda_0-\delta,\lambda_0)\cup(\lambda_0,\lambda_0+\delta)$,都存在 φ_λ, $0<\|\varphi_\lambda\|<\varepsilon$,满足(53.4).

定理 53.3.6 设(53.3) 中的核 $K(x,y)$ 为实对称连续正核,$F(x,u)$ 关于 x 连续,$F(x,0)\equiv 0$, $F'_u(x,u)$ 关于 u 连续,存在 $a(x)\in L^{p/(p-2)}$ ($p>2$),及常数 $b>0$,使得

$$|F'_u(x,u)|\leqslant a(x)+b|u|^{p-2},$$

则线性积分算子

$$B\psi=\int_0^1 K(x,y)F'_u(y,0)\psi(y)\mathrm{d}y$$

的每一特征值都是(53.3)的歧点.

附录

中文—外文名词索引

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

外文—中文名词索引

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

Z

外国人名表

A

Abel, N. H.　阿贝尔

Airy　艾里

Apollonius　阿波罗尼奥斯

Archimedes　阿基米德

B

Bernoulli, J.　伯努利

Bertrand, J. L. F.　贝特朗

Bessel, F. W.　贝塞尔

Bekya　维库阿

Bianchi, L.　比安基

Bolzano, B.　波尔查诺

Borel, É.　波莱尔

C

Cantor, G.　康托尔

Carleman, T.　卡莱曼

Cartesian　笛卡儿

Cauchy, A. L.　柯西

Cayley, A.　凯莱

Chebyshev, P. L.　切比雪夫

Christoffel, E. B.　克里斯托费尔

Clairaut　A. -C. 克莱罗

Clark, L. G.　克拉克
Cramer, G. 克拉默

D

D'Alembert, J.　达朗贝尔
Darboux, J. G.　达布
De Moivre, A.　棣莫弗
Dedekind, J. W. R.　戴德金
Dini, U.　狄尼
Dirichlet, P. G. L.　狄利克雷
Doob, J. L.　杜布
Duffing　达芬

E

Eddington, A. S.　埃丁顿
Einstein, A.　爱因斯坦
Euclid　欧几里得
Euler, L.　欧拉

F

Fejér, L.　费耶
Fermat, P. de　费马
Fibonacci, L.　斐波那契
Fisher, R. A.　费希尔
Fourier, J.-B.-J.　傅里叶
Frechét, M.-R.　弗雷歇
Fredholm, (E.) I.　弗雷德霍姆

G

Gårding, L.　戈尔丁
Gauss, K. F.　高斯

Gibbs,J. W.　吉布斯
Grassmann,H. G.　格拉斯曼
Green,G.　格林

H

Hadamard,J. S.　阿达玛
Hamilton,W. R.　哈密顿
Hammerstein,H.　哈默斯坦
Harnack　哈纳克
Heaviside,O.　赫维赛
Heine,H. E.　海涅
Helmholtz,H.　亥姆霍兹
Hermite,C.　埃尔米特
Hesse,O.　赫西
Hessian　黑塞
Hilbert,D.　希尔伯特
Hille,(C.)E.　希尔
Hodge,W. V. D.　霍奇
Hölder,O.　赫尔德
Hopf,E.　霍普夫
Householder　豪斯霍尔德
Hurwitz,A.　赫尔维茨

J

Jacobi,C. G. J.　雅可比
Jensen　詹森
Jordan,C.　约当

K

Kalman,R. E.　卡尔曼
Khintchine　辛钦

Klein,(C.)F.　克莱因
Kovalevskaya　柯瓦列夫斯卡娅
Kronecker,L.　克罗内克
Kullback　库尔贝克

L

Lagrange,J. L.　拉格朗日
Lamé,G.　拉梅
Laplace,P. S.　拉普拉斯
Laurent,P. A.　洛朗
Lax,P. D.　拉克斯
Lebesgue,H. L.　勒贝格
Legendre,A. M.　勒让德
Leibniz,G. W.　莱布尼茨
Leray,J.　勒雷
Levy,P.　利维
Lewy,H.　莱维
L'Hospital,G. F.　洛必达
Liapunov　李雅普诺夫
Lienard　李纳
Lindstedt,A　林斯泰特
Liouville,J.　刘维尔
Lipschitz,R. O. S.　利普希茨

M

Maclaurin,C.　麦克劳林
Maxwell　麦克斯韦
Mellin,R. H.　梅林
Mercer　麦切尔
Mertens,H.　默腾斯
Milgram　梅格莱姆

Rolle, M.　罗尔

Rouché　鲁谢

S

Schauder, J. P.　绍德尔

Schmidt, E.　施密特

Schwarz, H. A.　施瓦茨

Stewart, D. F.　斯图尔特

Sobolev　索伯列夫

Stieltjes, T. J.　斯蒂尔切斯

Stirling, J.　斯特林

Stokes, G. G.　斯托克斯

Stolz, O.　斯托尔兹

Sturm, C.-F.　施图姆

Sylvester, J. J.　西尔维斯特

T

Taylor, B.　泰勒

Toeplitz, O.　特普利茨

Tricomi, F. G.　特里科米

V

Viéte, F.　韦达

Volterra, V.　沃尔泰拉

Vandermonde　范德蒙

W

Wall, E. T.　沃尔

Wallis, J.　沃利斯

Walker, J. A.　沃克

Weierstrass, K.　魏尔斯特拉斯

Y

参 考 文 献

一 元 分 析

[1] Фихтенгольц Г М. 微积分学教程(共 3 卷). 徐献瑜等译. 北京:人民教育出版社,1955—1959

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(上、下). 北京:人民教育出版社,1981

[3] 复旦大学数学系. 数学分析(上、下). 上海:上海科学技术出版社,1962

[4] 江泽坚. 数学分析(上、下). 北京:人民教育出版社,1965

[5] 陈建功. 三角级数论(上、下). 上海:上海科学技术出版社,1979

[6] Hardy G H. Inequalities. Cambridge University Press,1952

[7] Hardy G H,Rogosiniski W W. Fourier Series. Cambridge University Press,1956

[8]《数学手册》编写组. 数学手册. 北京:人民教育出版社,1979

[9] Pearson Carl E. Handbook of Applied Mathematics. VNK Co.

[10] Kern A,Kern M. 数学手册. 周民强等译. 北京:工人出版社,1987

多 元 分 析

[1] Кочин,H. E. 著. 向量计算及张量计算初步. 史福培译. 北京:商务印书馆,1951

[2] 谢树艺. 矢量分析与场论. 北京:高等教育出版社,1983

[3]《数学手册》编写组. 数学手册. 北京:高等教育出版社,1979

[4] Reddy J N, Ramussen M L. Advanced Engineering Analysis. New

York: John Wiley & Sons, 1982

[5] Borisenko A I, Tarapov I E. Vector and Tensor Analysis with Applications. London: Prentice-Hall, 1968

[6] Bowen Ray M, Wang C C. Introduction to Vectors and Tensors. Vol. l. New York: Plenum Press, 1976

[7] Chorlton F. Vector and Tensor Methods. New York: Halsted Press, 1976

[8] 廖可人，李正元. 数学分析(第 3 册). 北京：高等教育出版社，1986

[9] 江泽坚. 数学分析(下册). 北京：人民教育出版社，1965

[10] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册). 北京：人民教育出版社，1981

[11] Фихтенгольц Г М 著. 微积分学教程(第 3 卷第 1 分册). 路见可译. 北京：商务印书馆，1953

[12] Фихтенгольц Г М 著. 微积分学教程(第 3 卷第 2 分册). 吴亲仁，路见可译. 北京：商务印书馆，1953

[13] Фихтенгольц Г М 著. 微积分学教程(第 2 卷第 3 分册). 徐献瑜等译. 北京：商务印书馆，1954

[14] Courant R, John F 著. 微积分和数学分析引论(第 2 卷第 1 分册). 林建祥等译. 北京：科学出版社，1985

[15] Courant R, John F 著. 微积分和数学分析引论(第 2 卷第 2 分册). 张恭庆等译. 北京：科学出版社，1989

[16] Apostål T M. Calculus. Vol. Ⅱ, 2nd Edition. New York: John Wiley & Sons, 1969

[17] Apostål T M. Mathematical Analysis. 2nd Edition. California: Addisen-Wesley, 1975

[18] Borden R S. A Course in Advanced Calculus. New York: North Holland, 1983

[19] Buck R C. Advanced Calculus. 3rd Edition. New York: McGraw-Hill, 1978

[20] Lang S. Undergraduate Analysis. New York: Springer Verlag, 1983

[21] Kaplan W. Advanced Calculus. 3rd Edition. California: Addisen-

Wesley,1984

[22] Marsden J E, Tromba A. Vector Calculus. San Francisco: Freeman,1981

[23] Banxandall P, Liebeck H. Vector Calculus. Oxford: Clarendon Press,1986

[24] 吴望一. 流体力学(上册). 北京:北京大学出版社,1982

[25] 棚橋隆彦. 連続体の力学(5)—ベクトル演算上物理成分. 東京都:理工図書株式会社,1988

[26] 棚橋隆彦. 連続体の力学(6)—ベクトル場の微分上积分. 東京都:理工図書株式会社,1988

[27] Farrashkhalvat M, Miles J P. Tensor Methods for Engineers and Scientists. London: Ellis Horwood,1990

[28] Flügge W. Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Berlin: Springer,1972

[29] 郭仲衡. 张量(理论和应用). 北京:科学出版社,1988

[30] 郭仲衡. 非线性弹性理论. 北京:科学出版社,1980

[31] 陈省身,陈维垣. 微分几何讲义. 北京:北京大学出版社,1983

[32] 黄克智. 张量分析. 北京:清华大学出版社,1986

[33] Eringen A C 著. 张量分析(现代连续统物理丛书第一分册). 钱伟长译. 南京:江苏科学技术出版社,1981

[34] Schouten J A. Tensor Analysis for Physicists. London: Oxford University Press,1954.

[35] Bishop R L, Goldberg S I. Tensor Analysis on Manifolds. New York: Macmillan,1968

[36] Abraham R Marsden J E, Ratu T. Manifolds, Tensor Analysis, and Applications. London: Addison-Wesley,1983

[37] Boothby W M. An Introduction to Differential Manifolds and Riemanniann Geometry. 2nd Edition. New York: Academic Press,1986

[38] Gotab S. Tensor Calculus. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1974

[39] Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics. V.

1. New York: Academic Press, 1991

[40] Truesdell C. The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1992

[41] Gurtin M E. An Introduction to Continuum Mechanics. New York: Academic Press, 1981

复 变 函 数

[1] 克莱因 M. 古今数学思想(第 3 册). 上海:上海科学技术出版社, 1980

[2] 亚历山大洛夫 A Д 等. 数学——它的内容、方法和意义(第 2 卷). 北京:科学出版社, 1984

[3] 拉甫伦捷夫 M A, 沙巴特 Ъ A. 复变函数论方法. 北京:高等教育出版社, 1956

[4] 庄圻泰, 张南岳. 复变函数. 北京:北京大学出版社, 1984

[5] Knopp K. Elements of the Theory of Functions. New York: Dover Publications, 1952

[6] Knopp K. Theory of Functions. New York: Dover Publications, 1945

常微分方程

[1] 贺建勋, 王志成. 常微分方程. 长沙:湖南科学技术出版社, 1981

[2] 秦元勋, 王慕秋, 王联等. 运动稳定性理论与应用. 北京:科学出版社, 1981

[3] William E Boyce, Richard C Diprima. Elementary Differential Equations. New York: John Wiley & Sons, 1977

[4] Jordan D W, Smith P. Nonlinear ordinary differential equations. 2nd. New York: Oxford University Press, 1987

矩阵分析、线性系统与系统辨识

[1] 須田信英,兜玉慎三,池田雅夫著. 自动控制中的矩阵理论. 曹长修译. 北京:科学出版社,1979

[2] 复旦大学数学系主编,金福临,李训经等编. 常微分方程(第 2 版). 上海:上海科学技术出版社,1962

[3] Apostol Tom M. Calculus. Second Edition. New York: Wiley & Sons,1969

[4] LaMar K Timothy,Blair E Bona. State Space Analysis:an introduction. McGraw-Hill Book Company,1968

[5] Graham C Goodwin, Robert L Payne. Dynamic System Identification:experiment disign and data analysis. 动态系统辨识:试验设计与数据分析. 张永光,袁震东译. 北京:科学出版社,1979

[6] Ljung L,Söderström T. Theory and Practice of Recursive Identification. 递推辨识的理论与实践. 田立生,褚家晋,善铁军译. 北京:科学出版社,1989

[7] Ljung L. System Identification: Theory for the User. 系统辨识——使用者的理论. 袁震东,阮荣耀,陈树中译. 上海:华东师范大学出版社,1990

[8] Chui C K,Chen G. Kalman Filtering with Real-Time Applications. New York:Spring-Verlag,1987

[9] 复旦大学编. 概率论(第 3 册)随机过程. 北京:人民教育出版社,1981

偏微分方程与积分方程

[1] 日本数学会. 数学百科辞典. 北京:科学出版社,1984

[2] 斯米尔诺夫. 高等数学教程,第二卷第三分册,第四卷第一分册. 北京:人民教育出版社,1979

[3] 伍卓群,赵俊宁,尹景学,李辉来. 非线性扩散方程. 长春:吉林大学出版社,1996

[4] 陈恕行．偏微分方程概论．北京:人民教育出版社,1981

[5] 董光昌．非线性二阶偏微分方程．北京:清华大学出版社,1988

[6] 姜礼尚,陈亚浙．数学物理方程讲义．北京:高等教育出版社,1988

[7] 华罗庚．高等数学引论,第一卷第一分册．北京:科学出版社,1979

[8] 陈亚浙．二阶抛物型偏微分方程．北京:北京大学出版社,2003

[9] 柯郎,希尔伯特．数学物理方法．钱敏,郭敦仁译．北京:科学出版社,1981

[10] 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌．实变函数与泛函分析(上、下册).北京:高等教育出版社,1984

[11] R. A. Adams. Sobolev Spaces. New York-SanFrancisco-London, Academic Press, 1975

[12] D. Gilbarg, N. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1983

[13] A. Fasano, M. Primicerio. Nonlinear Diffusion Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1988

[14] V. Barbu. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space. Noordhoff International Publishing, The Neatherlands, 1976

[15] J. K. Hale. Theory of Functional-Differential Equations. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1977

[16] D. Henry. Geometric Theory of Semi-linear Parabolic Equations. Berlin: Springer-verlag, 1981

[17] O. Ladyzhenskaya, V. Solonnikov, N. Uralceva. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Moscow: Nauka, 1967

[18] L. Hormander. The analysis of linear Partial Differential Operators. Grundlehren Math. Wiss., 256, 257, 274, 275. Berlin: Springer-verlag, 1983, 1985

[19] K. Yosida. Functional Analysis. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1980

[20] 陈传璋,侯宗义,李明忠．积分方程及其应用．上海:上海科学技术出版社,1987

[21] 侯宗义,李明忠．奇异积分方程理论．上海:复旦大学出版社,

1990

[22] 沈以淡．积分方程．北京:北京理工大学出版社,1992

[23] 郭大钧,孙经先．非线性积分方程．济南:山东科学技术出版社,1987

[24] 赵桢．奇异积分方程．北京:北京师范大学出版社,1984